МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОПОЛОСНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

В. В. Ермаков, С. Г. Журавлев (Москва, Россия)
ermakov-vv2010@yandex.ru

1. Исторические замечания. Начала математического моделирования транспортных потоков относят к 30-м годам XX века, когда развитие автомобилизации, особенно в Северо-Американских Соединенных Штатах, достигло такого уровня, что заставило задуматься об увеличении пропускной способности дорог и о мерах по устранению пробок. Считают, что первым математические модели стал разрабатывать и применять Б.Д. Гриншилдс [1, 2], занимавшийся изучением пропускной способности дорог и влияющим на нее факторам (таким, как плотность потока транспортных средств). Ему принадлежит авторство фазовой диаграммы, связывающей величину потока и плотность. Впрочем, серьезные исследования разных аспектов дорожного движения были осуществлены буквально в первые же годы после рождения автомобиля, в частности, можно отметить монографию российского профессора Г.Д. Дубелира [3], оценивавшего пропускную способность дорог и пересечений.

Литература по моделированию транспортных потоков чрезвычайно обширна и практически необозрима. В первую очередь это объясняется широтой и разнообразием задач, для решения которых создается та или иная модель [4]. Помимо классических задач в последнее время добавилось много задач, прямо или косвенно связанных с проблемами экологии [5, 6]. Хорошая библиография работ по математическому моделированию транспортных потоков, написанных до 60-х гг. XX века, содержится в книге Ф. Хейта [7]. Он первым выделил моделирование транспортных потоков в самостоятельный раздел прикладной математики. Из обзоров последних лет нужно упомянуть статьи [8–14], монографии [15–19], диссертации [20–22] с большими списками литературы. Кроме того, по нечетным годам проходят международные конференции “Traffic and Granular Flow”, труды которых издаются в издательстве “Springer”. В 2011 году прошла 9-я конференция.

Несмотря на обилие разнообразных моделей, теория транспортных потоков очень далека от логического завершения. Надежды, возлагавшиеся на большой эффект от применения математики, в значительной степени не оправдались, так что появились утверждения о необходимости революционной смены самой парадигмы исследований, так как старая парадигма оказалась несостоятельной [23]. Утверждение смелое, но не совсем справедливое. Модели, разработанные ранее в рамках существовавшей парадигмы, вполне работоспособны и адекватно описывают моделируемое явление, но — в определенном диапазоне предположений и начальных условий. Некоторые эффекты они не отражают, что вполне ожидаемо, так как универсальной модели на все случаи жизни нет. Что же касается не оправдавшихся надежд, то они и не могли оправдаться, так как изначально были очень сильно завышены. Отчасти это объясняется тем, что разработчики, желая получить деньги на свои исследования, обещали такие результаты, которые в принципе были недостижимы. От математиков ждали ответа на вопрос, как с помощью математического моделирования, ничего не меняя и не вкладывая ни рубля, увеличить пропускную способность дорог, ликвидировать заторы, повысить безопасность движения, снизить вредное воздействие на экологию. Ответ, который дала теория, был единственно возможным и очевидным: «Никак». Математическая теория подтвердила то, что было видно и без ее применения. Пробки в первую очередь порождаются «узкими местами» на дорогах, без расшивки которых заторы устранить нельзя. Бесполезно увеличивать число полос там, где их и так много, если сохраняется узкое место, которое порождало и будет порождать заторы. Теоретически было доказано, что при высоких интенсивностях движения транспортный поток неустойчив. Устойчивые режимы возможны только тогда, когда дороги загружены не более чем на 50% своей предельной пропускной способности. Неустойчивый режим является не чем-то исключительным, а, наоборот, обычным состоянием интенсивного транспортного потока.

Несмотря на большую практическую важность моделирования транспортных сетей и транспортных потоков, развитие этой области прикладной математики сопряжено со значительными трудностями. В частности, это связано с такими объективными причинами, влияющими на адекватность модели реальной ситуации и делающими ее непредсказуемой и трудно просчитываемой [14]: 1) реальная система адаптируется под управление: увеличение пропускной способности при развитии сети компенсируется увеличением спроса на перевозки и перераспределением его в новых условиях; 2) поведение каждого водителя (следование по выбранному маршруту и манера поведения) в высшей степени индивидуально и непредсказуемо; 3) сильное влияние случайных факторов (ДТП, погодные условия) и флуктуаций, связанных с сезоном, праздниками и т. п. Кроме того, оказалось, что для России необходимо разрабатывать модели, существенно отличающиеся от зарубежных [13]. Это связано с различиями в правилах дорожного движения, иной системой управления, чрезвычайно низкой дисциплиной водителей и т. п.

2. Классификация моделей. Математические модели транспортных сетей и потоков на них отличаются большим разнообразием, так как создаются для различных целей, в связи с чем используют различный аппарат и разную степень детализации описания движения. С точки зрения целей, Швецов [12] выделяет три основных класса моделей: прогнозные, оптимизационные и имитационные.

Прогнозные модели предназначены для прогнозирования транспортных потоков в сетях в предположении, что геометрия и характеристики транспортной сети известны, а также известны расположение и производственные характеристики основных объектов, влияющих на формирование транспортных потоков. Такие модели, как правило, носят феноменологический характер, то есть их параметры постулируются на основе наблюдений за конкретной транспортной сетью, а также в результате статистической обработки данных, полученных при выборочных экспериментах. Поскольку транспортный поток рассматривается агрегированно, а не на корпускулярном уровне, особенности многополосных транспортных потоков не играют в таких моделях сколько-нибудь заметной роли.

Очень обширный и специфический класс представляют оптимизационные модели [24]. На таких моделях решаются задачи оптимизации маршрутов и объемов перевозок (грузовых и пассажирских), совершенствование транспортной сети, количество и расположение стоянок и т. п.

Цель имитационных моделей – описать транспортный поток и присущие ему особенности. По степени детализации различают модели макроскопические, где транспортные средства рассматриваются агрегированно, аналогично потоку жидкости, и микроскопические, где каждое транспортное средство рассматривается индивидуально и учитываются взаимодействия между транспортными средствами.

3. Имитационные модели. Первые модели Гриншилдса [1, 2] , где рассматривалась зависимость между интенсивностью потока автомобилей, скоростью движения транспортных средств и пропускной способностью дороги, фактически представляли собой макроскопические модели.

В 1955 году Лайтхилл и Уизем [25] провели аналогию между гидродинамическими законами движения жидкости и законами движения транспортных средств (при некоторых упрощающих предположениях). Их модель основана на законе сохранения $\partial\rho/\partial t + \partial(\rho V)/\partial x = 0$, где $\rho(x,t)$ – плотность транспортного потока, $V(x,t)$ – средняя скорость автомобилей в точке дороги с координатой x в момент времени t. Предполагается, что $V(x,t)$ – убывающая функция плотности. На этой модели были продемонстрированы бегущие волны уплотнения. Гидродинамический подход оказался очень плодотворным. Несмотря на то, что модель Лайтхилла-Уизема не работала при очень низких и очень высоких плотностях транспортного потока и была заведомо неадекватной вблизи сужений, въездов-выездов, перекрестков со светофорами и т.п., она стимулировала разработку огромного числа более совершенных, но и более сложных гидродинамических моделей. Так, Пэйн [26] предложил вместо детерминированной зависимости средней скорости от плотности потока использовать динамическую зависимость через дифференциальное уравнение конвекционного типа. Такое уравнение было выведено из модели движения отдельных автомобилей вслед за лидером. Филипс [27] учел внутреннее давление потока, влияющее на поведение водителей: если лидирующий автомобиль вынужден снижать скорость, то и следующие за ним водители притормаживают. Если же впереди появляется свободное пространство, то есть внутреннее давление потока снижается, водители ускоряются.

В микроскопических моделях рассматривается сценарий поведения каждого автомобиля на дороге во взаимодействии с другими автомобилями. Очень удобным аппаратом для реализации микроскопических моделей оказались клеточные автоматы, обладающие достаточно сложным поведением, но допускающие проведение эффективных и быстрых расчетов на компьютерах [9].

Микроскопические модели хорошо подходят для описания транспортных потоков на многополосных дорогах, так как в сценарий могут вносится реалистичные правила перемещения с полосы на полосу, обгонов, перестроения для выполнения последующего поворота и т.п., причём правила перемещений могут быть как детерминированными, так и стохастическими.

Микроскопические модели стали широко применяться с тех пор, как появились быстродействующие компьютеры, так как такие модели ориентированы именно на численные расчеты (имитационное моделирование). Большим их недостатком является то, что они мало пригодны для получения аналитических формул.

Промежуточное положение между макроскопическими (гидродинамическими) и микроскопическими (корпускулярными) моделями занимают модели мезоскопические. Их еще называют кинетическими или газодинамическими, так как поведение транспортных средств в таких моделях описывается уравнениями, сходными с уравнениями кинетической теории газов. Мезоскопические модели удачно сочетают достоинства макроскопических и микроскопических моделей: описание аналитическими формулами, пригодными для качественного анализа, как в гидродинамических моделях, и возможность учета взаимодействий между отдельными транспортными средствами, как в моделях корпускулярных. Широко распространена практика, когда уравнения кинетической модели выводятся на основе закономерностей, выявленных на микроскопической модели [11].

4. Теория Кернера трех фаз транспортного потока и её связь с многополосностью. В последние годы большое внимание уделяется теории Кернера трех фаз в транспортном потоке [15;16;28]. Классическая теория оперировала двумя фазами транспортного потока: свободный поток (free flow – F) и так называемый плотный поток (congested traffic). Кернер выделил в плотном потоке две фазы: фазу S – синхронизированный поток (synchronized flow) и фазу J – широкий движущийся кластер (wide moving jam). В свободном потоке каждый водитель может двигаться с выбранной им самим скоростью, не испытывая затруднений со стороны других водителей. Однако такой поток при интенсивном движении может спонтанно или из-за внешнего воздействия неожиданно изменить фазовое состояние. При переходе к синхронизированному потоку водителю приходится подстраиваться к режиму движения других автомобилей на его полосе, как при движении в колонне. Возможности перестроения на другие полосы затруднены и мало целесообразны, так как и по ним движение носит аналогичный характер — свободного потока нет. Фаза J – это локальный движущийся затор. Кернер указал определяющее свойство этой фазы: задний по направлению движения фронт кластера движется против потока с постоянной скоростью, проходя через все узкие места на скоростной магистрали. В отличие от фазы J в фазе S задний по направлению движения фронт области синхронизированного потока этим свойством не обладает. В частности, он обычно оказывается фиксированным вблизи узкого места на скоростной автомагистрали. Переход $F \to S$ является фазовым переходом. Он может быть как спонтанным, так и индуцированным (например, около одного и того же сужения на дороге). Вероятность спонтанного перехода $F \to S$ растет при росте величины потока машин. Переход $S \to J$ возникает спонтанно только в синхронизированном потоке машин, причем переход $S \to J$ происходит позднее и часто совсем в другом месте, чем переход $F \to S$. На классической фазовой диаграмме зависимость между величиной потока q и плотностью автомобилей ρ изображалась одномерной линией, то есть предполагалась функциональная зависимость между этими переменными. Такое действительно имеет место в свободном потоке, до достижения плотностью ρ некоторого критического значения. При переходе к синхронизированному потоку функциональная зависимость q от ρ теряется: одному и тому же значению ρ может соответствовать множество значений q, то есть вместо одномерной кривой на фазовой диаграмме появляется двумерная область. С содержательной точки зрения это соответствует парадоксальному выводу, что при одной и той же плотности пропускная способность дороги имеет множество значений. Это явление в большой степени связано с многополосностью дороги и непредсказуемым характером действий водителей. Встречая перед собой препятствие в виде медленно двигающейся машины, водитель может выбрать либо тактику «адаптации скорости», когда он притормаживает до скорости впереди идущей машины, либо тактику «переускорения», когда он увеличивает скорость и пытается перестроиться на соседнюю полосу, чтобы совершить по ней обгон. Конкуренция между «адаптацией скорости» и «переускорением» влияет на пропускную способность дороги, хотя плотность потока машин остается неизменной.

5. Особенности моделей многополосных потоков. Моделирование многополосного движения, даже в случае движения по трассе (freeway), существенно отличается от моделирования однополосного транспортного потока. В условиях однополосного движения, когда обгоны невозможны, быстро устанавливается единая скорость движения всех автомобилей, равная скорости самого медленного транспортного средства [6]. В условиях многополосного движения прежде всего необходимо построить модель обгонов. В простейшей модели одностороннего двухполосного движения [7] предполагается, что все транспортные средства по скорости разделяются на два класса: медленные, имеющие одинаковую скорость, и быстрые, скорость которых можно считать бесконечно большой. Размеры транспортных средств точечные, так что обгоны возможны всегда, как только перед быстрым автомобилем появляется медленный. В такой модели происходит перераспределение транспортных средств таким образом, что левую полосу занимают быстрые автомобили, а правую – медленные.

Повышение реалистичности модели требует учета геометрических размеров транспортных средств и того фактора, что согласно правилам дорожного движения полосы неравноправны. Переход с одной полосы на другую возможен не всегда. Моделирование таких переходов представляет достаточно сложную задачу. В модели [29] учитываются 2 критерия перехода: побуждающий и безопасный. Побуждающий критерий: по соседней полосе можно ехать с более высокой скоростью. Безопасный критерий: на соседней полосе появилось окно, протяженность которого достаточно велика, чтобы без риска совершить перестроение. И тот, и другой критерий носят вероятностный характер. Перестроение на более скоростную соседнюю полосу тем вероятнее, чем выше разность скоростей транспортных средств на соседних полосах и чем длиннее свободное окно на скоростной полосе. На практике на частоту перестроений влияет еще темперамент и стиль вождения водителей.

Интересное наблюдение провели Хельбинг и Хуберманн [30]. Оказалось, что даже при относительно малой плотности (примерно 25 транспортных средств на 1 км полосы) есть тенденция к установлению когерентного движения грузовых и легковых автомобилей. В таком состоянии быстрые и медленные автомобили движутся с одинаковой скоростью, как будто составляют единый кластер. Это происходит из-за того, что практически не появляются свободные промежутки достаточной длины, чтобы быстрые автомобили совершили перестроение и обгон. Однако если поток становится неустойчивым, когерентные состояния распадаются и между машинами начинают появлятся достаточно длинные свободные промежутки.

6. Вероятностная имитационная модель многополосного транспортного потока. Рассмотрим модель, разработанную авторами [31]. Она достаточно типична для класса микроскопических моделей и обладает той особенностью, что транспортное средство моделируется динамической клеткой переменной длины [32].

Чаще всего при имитационном моделировании многополосную дорогу разбивают на одинаковые ячейки и рассматривают (например, на языке цепей Маркова или конечных автоматов) законы перехода частиц (автомобилей) из ячейки в ячейку. Модель получается дискретной и по времени, и по пространству.

В целях уточнения модели и придания ей большей реалистичности предлагается микроскопическая модель многополосного транспортного потока с непрерывным изменением пространственных координат.

Пусть моделируется отрезок L–полосной дороги. Полосы нумеруются, начиная с крайней правой. В начальный момент времени $t = 0$ по дороге движется N автомобилей. Состояние i–го автомобиля в момент времени t описывается набором

$$\{i, l_i(t), j_i(t), k_i(t), x_i(t), v_i(t), w_i, a_i\},$$

где $l_i(t)$ – полоса, занимаемая i–ым автомобилем, $j_i(t)$ – число автомобилей на этой полосе перед i–ым, $k_i(t)$ – номер автомобиля, движущегося по полосе $l_i(t)$ непосредственно перед i–ым, $v_i(t)$ – скорость i–го автомобиля, w_i – его максимальная скорость (максимально возможная в соответствии с мощностью двигателя или ограниченная правилами дорожного движения), a_i – максимальное ускорение. Состояние всех автомобилей в момент времени $t = 0$ предполагается известным. Шаг моделирования по времени равен Δt. Каждый автомобиль занимает на своей полосе переменное динамическое расстояние $d_i(t) = c_0 + c_1 v_i(t) + c_2 v_i^2(t)$; здесь параметр c_0 описывает линейные размеры автомобиля, c_1 зависит от скорости реакции водителя, $c2_v^2$ оценивает тормозной путь, причем параметр c_2 зависит от погодных условий и качества дорожного покрытия. В модели Х. Иносэ–Т. Хамада [32] $c_0 = 5,7$ (м), $c_1 = 0,504$ (с), для дороги с сухим асфальтовым покрытием c_2 равно 0,0285, для мокрого асфальта эта величина возрастает вдвое, а для дороги, покрытой льдом, достигает 0,165 . Если препятствий впереди нет, автомобиль стремится двигаться с максимально возможной скоростью w_i. Переход с полосы на полосу происходит тогда, когда движению с максимальной скоростью препятствует впереди идущий автомобиль. Такой переход за один шаг моделирования может быть осуществлен только на соседнюю полосу, то есть на полосы $l_i + 1$ и $l_i - 1$ (с полосы 1 – только на полосу 2; с полосы L – только на полосу $L - 1$). Переход возможен только в том случае, если на соседней полосе есть свободное пространство для этого маневра. Можно считать, что это пространство также равно $d_i(t)$. Переход целесообразен, если скорость движения машин по соседней полосе выше, чем на покидаемой полосе. Разность скоростей обозначим $\Delta v_{i,i\pm1}$. Но даже при $\Delta v_{i,i\pm1} > 0$ переход с полосы на полосу совершается не детерминировано, а с некоторой вероятностью, причем вероятность перехода пропорциональна $\Delta v_{i,i\pm1}$. Коэффициент пропорциональности для перехода на левую полосу выше, чем этот же коэффициент для перехода на правую полосу, так как по правым полосам двигаются обычно более медленные транспортные средства.

Каждый шаг имитационного моделирования по методу Монте–Карло разбивается на два этапа, причем все перемещения автомобилей с одной полосы на другую будут осуществляться только на первом этапе. Сначала рассчитывается виртуальное местоположение всех автомобилей в момент времени $t + \Delta t$ при следующих предположениях: 1) состояния всех автомобилей в момент времени t известны; 2) если $v_i(t) < w_i$, то движение автомобиля предполагается равноускоренным с ускорением a_i до достижения скорости w_i, после чего оно становится равномерным; 3) если $v_i(t) = w_i$, то движение автомобиля предполагается равномерным со скоростью w_i.

Определение 1. *i-коллизией* будем называть тот случай, когда для виртуального местоположения $i\breve{}$го автомобиля $x_i(t + \Delta t)$ и виртуального местоположения движущегося перед ним k_i –го автомобиля $x_k(t+\Delta t)$ выполнено неравенство: $x_k(t+\Delta t) - x_i(t+\Delta t) < d_i(t+\Delta t)$.

Смысл понятия i–коллизии: $i-$й автомобиль не может двигаться с желаемой скоростью. Ему мешает впереди идущий автомобиль.

Все коллизии должны быть устранены. Это можно сделать либо за счет перехода на соседнюю полосу, либо за счет снижения скорости. Коллизии устраняем, начиная с наибольшей координаты $x(t)$, по следующему алгоритму. 1. Есть свободное место для перехода на соседнюю полосу слева? Да — переходим к 2, нет – переходим к 5. 2. Скорость левой полосы выше? При усреднении учитываются только скорости тех автомобилей левой полосы, координаты которых превышают $x(t)$. Да – переходим к 3, нет – переходим к 5. 3. Подсчитываем вероятность перехода на соседнюю полосу слева по формуле и моделируем случайное событие A=переход на соседнюю полосу слева. Если A произошло –переходим к 4, не произошло – переходим к 5. 4. В состоянии $i\breve{}$го автомобиля заменяем $l_i(t)$ на $l_i(t) + 1$, а $k_i(t)$ заменяем на номер того автомобиля, который теперь оказался непосредственно перед $i\breve{}$ым на полосе $l_i(t) + 1$. Переходим к 10. 5. Есть свободное место для перехода на соседнюю полосу справа? Да — переходим к 6, нет — переходим к 9. 6. Скорость правой полосы выше? При усреднении учитываются только скорости тех автомобилей правой полосы, координаты которых превышают $x(t)$. Да – переходим к 7, нет – переходим к 9. 7. Подсчитываем вероятность перехода на соседнюю полосу справа по формуле и моделируем случайное событие B=переход на соседнюю полосу справа. Если B произошло – переходим к 8, не произошло — переходим к 9. 8. В состоянии $i\breve{}$го автомобиля заменяем $l_i(t)$ на $l_i(t)-1$, а $k_i(t)$ – на номер того автомобиля, который теперь оказался непосредственно перед $i\breve{}$ым на полосе $l_i(t)-1$. Переходим к 10. 9. Уменьшаем скорость $v_i(t+\Delta t)$ до такой величины, чтобы выполнялось равенство: $x_k(t+\Delta t)-x_i(t+\Delta t)=d_i(t+\Delta t)$. 10. Коллизия устранена.

Теперь приступаем ко второму этапу, исходя из новых (видоизмененных за счет перемещения на соседние полосы) состояний автомобилей. Рассчитываем виртуальные местоположения всех автомобилей в момент времени $t+\Delta t$ по аналогии с расчетами первого этапа, но при следующем ограничении: если $x_i(t+\Delta t)$ превысило $x_k(t+\Delta t)-d_i(t+\Delta t)$, то расчетную скорость снижаем до такой величины, чтобы выполнялось равенство $x_k(t+\Delta t)-x_i(t+\Delta t)=d_i(t+\Delta t)$. Это исключает коллизии и позволяет определить состояния всех автомобилей в момент времени $t+\Delta t$, тем самым завершая шаг имитационного моделирования.

За счет введения стохастичности в процесс перехода с полосы на полосу удается избежать «эффекта пинг-понга», как в классической модели Т.Нагатани с детерминированными переходами, когда при определенных начальных условиях все автомобили, сосредоточенные на первой полосе, совершают одновременные переходы на 2-ю, 3-ю и т. д. полосы до крайней левой, а затем в обратном порядке от крайней левой до крайней правой.

Эту модель можно обобщать и совершенствовать в нескольких направлениях.

Во-первых, можно учесть наличие на трассе светофоров. Пусть в точках $X_1, X_2, \ldots, X_m$ расположены светофоры, работающие по детерминированному закону, т.е. нам известно, какой свет в какой момент времени горит. Перед каждым светофором определим зону торможения $[X_q-D; X_q]$, где $D=D_0+c_1w+c_2w^2$. Здесь D_0 – некоторая константа, w – максимальная скорость, разрешенная на данном участке трассы.

Определение 2. *i-коллизией второго рода* будем называть тот случай, когда интервал $(x_i(t); x_i(t+\Delta t))$ пересекается с зоной торможения $[X_q-D; X_q]$ при некотором q, а $t+\Delta t$ приходится на время горения красного сигнала q–го светофора.

Суть i-коллизии второго рода: i-ый автомобиль не может проехать без остановки перед светофором.

Устранение i-коллизий второго рода не предполагает перехода с одной полосы на другую. Поэтому все они устраняются на втором этапе шага имитационного моделирования за счет снижения скорости i-го автомобиля до полной остановки перед светофором.

Далее, в модели можно предусмотреть источники и стоки, что соответствует въездам на трассу и съездам с нее. Машины, въезжающие на трассу, ожидают в заданных точках, начиная с заданных моментов времени. Въезд происходит после того, как на трассе образуется динамическое окно, достаточное для осуществления маневра.

Съезды с трассы в простейшем случае имитируются случайными событиями, разыгрываемыми для машин, движущихся по крайней правой или крайней левой полосам, в моменты достижения ими определенных точек.

Дальнейшее усложнение модели может осуществляться за счет изменения геометрии трассы и приписывания отдельным ее участкам индивидуальных значений параметров, характеризующих динамическое расстояние, занимаемое автомобилями на дороге, и тормозной путь перед светофорами (учет изменения характера покрытия дороги) или ограничивающих максимальную скорость движения.

Список литературы

[1] Greenshields B.D. *The photographic method of studying traffic behavior*//Highway Res. Board Proc. 1933. Vol. 13.

[2] Greenshields B.D. *A study of traffic capacity*// Highway Res. Board Proc. 1934. Vol. 14.

[3] Дубелир Г.Д. *Городские улицы и мостовые.* Киев, 1912.

[4] Дрю Д. *Теория транспортных потоков и управление ими.* М.: Транспорт, 1972.

[5] *Автотранспортные потоки и окружающая среда*/ Луканин В.Н., Буслаев А.П., Трофименко Ю.В., Яшина М.В. М.: Инфра-М, 1998.

[6] *Автотранспортные потоки и окружающая среда-2*/Луканин В. Н., Буслаев А.П., Трофименко Ю.В., Яшина М.В. М.: Инфра-М, 2001.

[7] Хейт Ф. *Математическая теория транспортных потоков.* М.: Мир,1966.

[8] Mahnke R., Kaupužs J., Lubaschevsky I. *Probabilistic description of traffic flow*// Phys. Rep. 2005. Vol. 408. P. 1–130.

[9] Chowdhury D., Santen L., Schadschneider A. *Statistical physics of vehicular traffic and some related systems*// Phys. Rep. 2000. Vol. 329. P. 199–329.

[10] *Bibliography of theory of traffic flow and related subjects*//Operations Res. 1971. Vol. 9, №4. P. 568–575.

[11] Helbing D. *Traffic and related self-driven many-particle systems*// Review of Modern Physics. 2003. Vol. 73. P. 1067–1141.

[12] Швецов В.И. *Математическое моделирование транспортных потоков*// Автоматика и телемеханика. 2003. №11. С. 3–46.

[13] Семенов В.В. *Математическое моделирование динамики транспортных потоков мегаполиса.* М., 2004. (Препринт №34 Ин-та прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН).

[14] Семенов В.В. *Математическое моделирование автотранспортных потоков (обзорный реферат).* М., 2003.

[15] Kerner B. *Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control.* Berlin: Springer, 2009.

[16] Kerner B. *The Physics of Traffic.* Berlin: Springer, 2004.

[17] Leutzbach W. *Einführung in die Theorie des Verkehrsflusses.* Berlin:Springer, 1972.

[18] *Вероятностные и имитационные подходы к оптимизации автодорожного движения*/ Буслаев А.П., Новиков А.В., Приходько В.М. и др. М.: Мир, 2003.

[19] Helbing D. *Verkehrsdynamik. Neue physikalische Modellierungskonzepte.* Berlin: Springer, 1997.

[20] Tampere Chris M.J. *Human-kinetic multiclass traffic flow. Theory and Modelling. With application to advanced driver assistance systems in congestion.* Delft, 2004.

[21] Poeffel A. *Simulation hochbelasteter Kreisel.* Diss... Doktors der Informatik. Universität Zürich, 2006.

[22] Krauss S. *Microscopic modeling of traffic flow: Investigation of collision free vehicle dynamics.* PhD thesis. Univ. of Cologne, Germany, 1997.

[23] Семенов В.В. *Смена парадигмы в теории транспортных потоков.* М.: 2006. (Препринт №46 Ин-та прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН).

[24] Стенбринк П.А. *Оптимизация транспортных сетей.* М.: Транспорт, 1981.

[25] Lighthill M.J., Whitham G.B. *On kinematic waves*// Proc. of the Royal Soc. Ser.A. 1955. Vol.229. P. 281–345.

[26] Payne H.J. *Models of freeway traffic and control*// Math. models of Public Systems. Ed. Bekey G.A. La Jolla, CA: Simulation Council. 1971. Vol.1. P. 51–61.

[27] Philips W.F. *A kinetic model for traffic flow with continuum implications*// Transp. Plan. Technol. 1979. Vol. 5. P. 131–138.

[28] Кленов С.Л. *Теория Кернера трех фаз в транспортном потоке – новый теоретический базис для интеллектуальных транспортных технологий*//Труды МФТИ, 2010, том 2, №4, с.75-89.

[29] Nagel K., Wolf D.E., Wagner P., Simon P. //Phys.Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 1425.

[30] Helbing D., Hubermann B.A. // Nature. 1998. Vol. 396. P. 738.

[31] Ермаков В.В. *Микроскопическое моделирование многополосного транспортного потока*// Компьютерное моделирование-2007. СПб.: Санкт-Петербургский транспортный университет, 2007.

[32] Иносэ Х., Хамада Т. *Управление дорожным движением.* М.: Транспорт, 1983.