БИФУРКАЦИОННОЕ МНОЖЕСТВО В МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ АЭРОУПРУГОСТИ

Т. Е. Бадокина (Саранск, Россия)
(badokinate@gmail.com)

При проектировании летательных аппаратов возникают серьезные трудности, связанные с изучением потери устойчивости деформируемых элементов конструкции в потоке газа. Различают две формы потери устойчивости – статическая и динамическая. Выпучивание (дивергенция) – статическая потеря устойчивости деформируемых элементов конструкции в потоке газа, которая приводит к изгибным деформациям конструкции. Флаттер – динамическая колебательная потеря устойчивости деформируемых элементов конструкции, которая приводит к периодическим незатухающим колебаниям, повышению износа в процессе эксплуатации и возможному последующему разрушению конструкции. При создании современных летательных аппаратов предъявляются повышенные требования к прочности конструкции. Таким образом разработка новых эффективных и надежных методов расчета потери устойчивости является актуальной задачей.

Задачам дивергенции и флаттера пластин и оболочек посвящены монографии российских и зарубежных математиков: А.С.Вольмир [1], В.В. Болотин [2], С.Д. Алгазин, И.А. Кийко[3] ; Р.Л. Бисплингхофф, Х. Эшли, Р.Л. Халфмэн [4]; Е.Х. Доуэлл, М.А. Ильгамов [5]; и многочисленные работы школ академика А.А. Ильюшина (ссылки в монографии [3]), В.В. Болотина [6–9] и др. В частности, к задаче о дивергенции удлиненной пластины с одним бифуркационным параметром – числом Маха – применялись методы теории бифуркаций и групповых преобразований Ц. На. Эти методы применяли в своих работах ташкентские математики А.А. Азизова, А.О. Кузнецов, Б.В. Логинов [10], затем ульяновские математики П.А. Вельмисов и Б.В. Логинов [11], а также П.А. Вельмисов и С.В. Киреев [12].

Изгибные формы удлиненной пластины на упругом основании, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа вдоль оси Ox и подверженной малой нормальной нагрузке, в безразмерных переменных описываются обыкновенным интегро-дифференциальным уравнением 4-го порядка с двумя бифуркационными параметрами: M – число Маха, $M = M_0+\varepsilon$ (M_0 – его критическое значение) и малая нормальная нагрузка $\varepsilon_0 q(x)$.

Результаты исследования частных случаев модели удлиненной пластины $T \neq 0$, $\beta_0 = 0$ [13], $T = 0$ и $\beta_0 \neq 0$, [14] согласуются с результатами исследования наиболее полной модели обтекания пластины при наличии сжимающего (растягивающего) внешнего краевого усилия и малой нормальной нагрузки, а также с численными расчетами, приведенными в известной монографии В.В. Болотина [2].

При применении методов теорий бифуркаций и катастроф [16–18] к нелинейным граничным задачам для ОДУ высоких порядков возникает ряд технических трудностей, связанных с исследованием спектра прямой и сопряженной задач. Для их преодоления используется метод отделения корней характеристического уравнения с последующим представлением через них бифуркационных многообразий. Этот прием позволяет исследовать многопараметрические бифуркационные граничные задачи для ОДУ высоких порядков в точной постановке, а так же строить стандартными методами [19] соответствующие функции Грина [13, 15], тем самым доказывая фредгольмовость линеаризованных операторов. В известном справочнике Мельникова [20] отмечено, что функция Грина для задач аэроупругости ранее не была построена.

Постановка задачи. В работе кратко иллюстрируется применение указанного метода для конкретной задачи аэроупругости – дивергентной потере статической устойчивости удлиненной пластины на упругом основании в сверхзвуковом потоке газа вдоль оси Ox, сжимаемой или растягиваемой внешними краевыми усилиями, описываемой уравнением [1, 5, 14]:

$$\begin{gathered}\chi^2\left(\frac{w''}{(1+w'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)'' - Tw'' + \beta_0 w + \varepsilon_0 q(x) = \\ = kK(w', M, \kappa) + \theta w'' \int\limits_0^1 [(1+w'^2)^{\frac{1}{2}} - 1]\, dx\end{gathered} \tag{1}$$

на примере граничных условий (В): $w''(0) = w'''(0) = 0$ – левый край свободен, $w(1) = w'(1) = 0$ – правый – жестко закреплен.

Здесь $K(w', M, \kappa) = 1 - \left[1 + \frac{\kappa-1}{2} M w'\right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}$ – при одностороннем обтекании, $K(w', M, \kappa) = \left[1 - \frac{\kappa-1}{2} M w'\right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} - \left[1 + \frac{\kappa-1}{2} M w'\right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}$ – при двустороннем обтекании пластины сверхзвуковым потоком газа вдоль оси Ox. Здесь $w = w(x)$ – прогиб пластины, $0 \leqslant x_1 \leqslant d$, $-\infty \leqslant y_1 \leqslant \infty$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x = \frac{x_1}{d}$ – прямоугольные координаты. $\chi^2 = \frac{h^2}{12(1-\mu^2)d^2}$, $t = \frac{qd}{Eh}$ и $k = \frac{p_0 d}{Eh}$, где d – ширина пластины, h – ее толщина, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона, $q < 0$ ($q > 0$) – сжимающее (растягивающее) усилие, M – число Маха, p_0 – давление и κ – показатель политропы.

Уравнение (1) вместе с различными граничными условиями закрепления является двупараметрической бифуркационной задачей. Поэтому для вычисления изгибных форм в окрестности критических значений M_0 числа Маха, изменяющегося в зависимости от коэффициента жесткости основания, применяются методы теорий бифуркаций в принятой там терминологии и обозначениях. Фредгольмовость соответствующих линеаризованных операторов доказана с помощью построения функций Грина.

Линеаризации

$$Bw = \chi^2 w^{(4)} - Tw'' + \sigma w' + \beta_0 w = 0 \tag{2}$$

с условиями (B) отвечает характеристическое уравнение $\lambda^4 - a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, $a = \frac{T}{\chi^2}$, $b = \frac{\sigma}{\chi^2} = \frac{1(2)k\kappa M}{\chi^2}$, $c = \frac{\beta_0}{\chi^2}$, множитель $1(2)k\kappa M$ отвечает одностороннему/двустороннему обтеканию пластины потоком газа. Комплексное применение метода Штурма и теоремы Виета показывает возможность существования корней трех невырожденных видов для рассматриваемого характеристического уравнения

1°. $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\delta_1$, $\lambda_{3,4} = \gamma \pm i\delta_2$, $\gamma > 0$, $\delta_1 \geqslant \delta_2 > 0$;

2°. $\lambda_1 = -\alpha_1$, $\lambda_2 = -\alpha_2$, $\lambda_{3,4} = \gamma \pm i\delta$, $\lambda_{1,2} > 0$, $\gamma, \delta > 0$;

3°. $\lambda_1 = -\alpha_1$, $\lambda_2 = -\alpha_2 (\alpha_1 \geqslant \alpha_2 > 0)$, $\lambda_3 = \alpha_3$, $\lambda_4 = \alpha_4$ $(\alpha_4 \geqslant \alpha_3 > 0)$.

и трех вырожденных видов, в которых характеристическое уравнение имеет корни кратности 2. Все вырожденные случаи такого вида получены из основных случаев при осуществлении соответствующих предельных переходов:

$1-2^\circ$. $\lambda_{1,2} = -\alpha$, $\lambda_{3,4} = \gamma \pm i\delta$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$;

$1-3^\circ$. $\lambda_{1,2} = -\alpha$, $\lambda_{3,4} = \alpha_2$,

$2-3^\circ$. $\lambda_1 = -\alpha_1$, $\lambda_2 = -\alpha_2 (\alpha_1 \geqslant \alpha_2 > 0)$, $\lambda_{3,4} = \gamma (\alpha_1 + \alpha_2 = 2\gamma)$.

Следует различать случаи $a > 0$ (растяжение) и $a < 0$ (сжатие).

Контроль построения функций Грина и асимптотики разветвляющихся решений осуществляется выполнением предельного перехода к кратным корням характеристического уравнения.

Случай 1°**.** Согласно теореме Виета $\delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\gamma^2 = -a$, $2\gamma(\delta_1^2 - \delta_2^2) = -b, \gamma^4 + +\gamma^2(\delta_1^2 + \delta_2^2) + \delta_1^2\delta_2^2 = c \Rightarrow \delta_1 = \gamma(1 - \frac{2}{2\gamma^2} - \frac{b}{4\gamma^3})^{1/2}, \delta_2 = \gamma(1 + \frac{2}{2\gamma^2} + \frac{b}{4\gamma^3})^{1/2}$.

Для функции прогиба $w(x) = e^{-\gamma x}(c_1 \cos \delta_1 x + c_2 \sin \delta_1 x) + e^{\gamma x}(c_3 \cos \delta_2 x + c_4 \sin \delta_2 x)$ определитель матрицы граничных условий

Рисунок 1 – Схема вырождения корней характеристического уравнения

имеет вид

$$
\begin{gathered}
\Delta_B(\gamma, \delta_1, \delta_2) = \delta_1\delta_2(3\gamma^2 - \delta_1^2)^2 e^{-2\gamma} + \delta_1\delta_2(\gamma^2 + \delta_1^2)^2 e^{2\gamma} + \\
+4\gamma\delta_2(3\gamma^4 - 4\gamma^2\delta_1^2 + \delta_1^4)\sin\delta_1\cos\delta_2 + \\
+2\delta_1\delta_2(13\gamma^4 - 2\gamma^2\delta_1^2 + \delta_1^4)\cos\delta_1\cos\delta_2 + \\
+2\gamma^2(3\gamma^4 + 2\gamma^2\delta_1^2 - \delta_1^4)\sin\delta_1\sin\delta_2 + 4\gamma\delta_1(\gamma^4 - \delta_1^4)\cos\delta_1\sin\delta_2
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Существуют значения параметров, при которых Δ_B имеет противоположные знаки ($\Delta_B < 0$ для $\gamma = 1,16$, $\delta_1 = 1,189$, $\delta_2 = 1,509$ при $a = -1$, $b = 2$, $c = 10$, а $\Delta_B > 0$ для $\gamma = 1,252$, $\delta_1 = 1,104$, $\delta_2 = 1,421$ при $a = -0.1$, $b = 2$, $c = 10$), а следовательно будет иметь место дивергенция, т. е. бифуркационное множество определяется набором параметров, при котором $\Delta_B = 0$. Применяя метод Ляпунова–Шмидта при определении значений базисных элементов $\varphi \in N(B)$, $\psi \in N^*(B)$ построена асимптотика решений, ответвляющихся от точек бифуркационного множества.

Случай 2°**.** Здесь $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\gamma$, $\alpha_1\alpha_2 - 2\gamma(\alpha_1 + \alpha_2) + \gamma^2 = \delta^2 = -a$, $2\gamma\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)(\gamma^2 + \delta^2) = -b$, $\alpha_1\alpha_2(\gamma^2 + \delta^2) = c \Rightarrow \alpha_{1,2} = \gamma\left[1 \pm \sqrt{-1 + \frac{a}{2\gamma^2} + \frac{b}{4\gamma^3}}\right]$. Таким образом $\alpha_1 = \gamma(1 + u)$, $\alpha_2 = \gamma(1 - u)$, если $0 < -1 + \frac{a}{2\gamma^2} + \frac{b}{4\gamma^3} < 1$.

Для функции прогиба $w(x) = c_1 e^{-\alpha_1 x} + c_2 e^{-\alpha_2 x} + e^{\gamma x}(c_3\cos\delta x +$

$+c_4 \sin \delta x)$ выпишем определитель граничных условий

$$\begin{gathered}
\Delta_B(\alpha_1,\alpha_2,\gamma,\delta)=\delta\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_1-\alpha_2)e^{2\gamma}+\delta(\alpha_1-\alpha_2)(\gamma^2+\delta^2)^2e^{-2\gamma}-\\
-\delta\alpha_2^2\cos\delta e^{-\alpha_1+\gamma}[(\gamma^2+\delta^2)(2\gamma+\alpha_2)+\alpha_1(3\gamma^2-\delta^2+2\gamma\alpha_2)]+\\
\alpha_2^2\sin e^{-\alpha_1+\gamma}[(\gamma^2+\delta^2)(3\gamma^2-\delta^2+\alpha_1\alpha_2)-2\delta^2\alpha_1(\alpha_2+2\gamma)]+\\
+\delta\alpha_1^2\cos\delta e^{-\alpha_2+\gamma}[(\gamma^2+\delta^2)(2\gamma+\alpha_1)+\alpha_2(3\gamma^2-\delta^2+2\gamma\alpha_1)]-\\
-\alpha_1^2\sin e^{-\alpha_2+\gamma}[(\gamma^2+\delta^2)(3\gamma^2-\delta^2+\alpha_1\alpha_2)-2\delta^2\alpha_2(\alpha_1+2\gamma)]
\end{gathered} \tag{4}$$

Существуют значения параметров, при которых Δ_B имеет противоположные знаки ($\Delta_B < 0$ при $\alpha_1 = -1,469$,$\alpha_2 = -0,253$, $\gamma \pm \delta = 0,861 \pm 1,397i$ для $a = -0.1$, $b = 4$, $c = 1$, а $\Delta_B > 0$ при $\alpha_1 = -1,249$, $\alpha_2 = -0,269$, $\gamma \pm \delta = 0,759 \pm 1,547i$ – для $a = -1$, $b = 4$, $c = 1$). Это доказывает наличие дивергенции в рассматриваемом случае корней характеристического уравнения.

Случай 3°. Для корней характеристического уравнения справедливы следующие неравенства: $\alpha_1+\alpha_2 = \alpha_3+\alpha_4$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2 > a$, $\alpha_3^2+\alpha_4^2 < a$. Этот случай корней возможен только при $a > 0$. Функции прогиба $w(x) = c_1e^{-\alpha_1} + c_2e^{-\alpha_2} + c_3e^{\alpha_3} + c_4e^{\alpha_4}$ отвечает определитель матрицы граничных условий

$$\begin{gathered}
\Delta_B(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\alpha_3^2\alpha_4^2(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)e^{-\alpha_1-\alpha_2}+\\
+\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)e^{\alpha_3+\alpha_4}-\alpha_2^2\alpha_4^2(\alpha_2+\alpha_4)(\alpha_1+\alpha_3)e^{-\alpha_1+\alpha_3}+\\
+\alpha_2^2\alpha_3^2(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_4)e^{-\alpha_1+\alpha_4}+\alpha_1^2\alpha_4^2(\alpha_1+\alpha_4)(\alpha_2+\alpha_3)e^{-\alpha_2+\alpha_3}-\\
-\alpha_1^2\alpha_3^2(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_4)e^{-\alpha_2+\alpha_4}
\end{gathered} \tag{5}$$

Существуют значения параметров, при которых Δ_B имеет противоположные знаки ($\Delta_B < 0$ при $\alpha_1 = -3,363$, $\alpha_2 = -0,263$, $\alpha_3 = 0,801$, $\alpha_4 = 2,825$ для $a = 10$, $b = 5$, $c = 2$, а $\Delta_B > 0$ при $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = -0,618$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 1,618$ для $a = 4$, $b = 1$, $c = 2$), следовательно присутствует дивергенция.

Случай $1-2°$.

Корни характеристического уравнения: α – кратности 2, $\alpha \pm i\delta$. Из теоремы Виета следуют соотношения между α и δ: $\alpha > \frac{\delta}{\sqrt{2}}$.

Для функции прогиба $w(x) = c_1e^{-\alpha x} + c_2xe^{-\alpha x} + e^{\alpha x}(c_3 \cos \delta x + c_4 \sin \delta x)$ определитель матрицы граничных условий имеет вид

$$\begin{gathered}
\Delta_B(\alpha,\delta)=\delta(\alpha^2+\delta^2)^2e^{-2\alpha}+\alpha^4\delta e^{2\alpha}+\\
+\alpha(2\alpha^2\delta^2+2\delta^4-4\alpha^5-8\alpha^4+3\alpha^3\delta^2+\alpha\delta^4)\sin\delta+\\
+2\alpha^2\delta(\alpha\delta^2+4\alpha^3+3\delta^2+7\alpha^2)\cos\delta
\end{gathered}$$

Существуют значения α и δ, при которых $\Delta_B(\alpha,\delta)$ имеет противоположные знаки, из чего следует вывод о существовании непустого

Рисунок 2 – Визуализация Δ_B в случае $1-2^\circ$

множества значений, состоящего из пар чисел $\{(\alpha,\delta)\}$, на котором $\Delta_B(\alpha,\delta)=0$, т.е. имеет место дивергенция ($\Delta_B(\alpha,\delta)>0$ при $\alpha=1$, $\delta=2,333$ и $\Delta_B(\alpha,\delta)<0$ при $\alpha=1$, $\delta=2,335$).

Случай $2-3^\circ$**.**

Корни характеристического уравнения: $-\alpha_1$, $-\alpha_2$ и γ кратности 2, такие что $\alpha_1+\alpha_2=2\gamma$. Теорема Виета показывает, что указанный случай возможен только при $a>0$.

Для функции прогиба $w(x)=c_1e^{-\alpha_1 x}+c_2e^{-\alpha_2 x}+c_3e^{\gamma x}+c_4xe^{\gamma x}$ определитель матрицы граничных условий имеет вид

$$\begin{gathered}\Delta_B(\alpha_1,\alpha_2,\gamma)=\gamma^4(\alpha_1-\alpha_2)e^{-\alpha_1-\alpha_2}+\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_1-\alpha_2)e^{2\gamma}+\\ \gamma\alpha_2^2(\gamma^3+(\alpha_1+\alpha_2-2)\gamma^2+((\alpha_2-3)\alpha_1-\alpha_2)\gamma-2\alpha_1\alpha_2)e^{-\alpha_1+\gamma}-\\ -\alpha_1^2\gamma(\gamma^3+(\alpha_1+\alpha_2-2)\gamma^2+((\alpha_2-1)\alpha_1-3\alpha_2)\gamma-2\alpha_1\alpha_2)e^{\gamma-\alpha_2}.\end{gathered}$$

Существуют значения α_1, α_2 и γ, при которых $\Delta_B(\alpha_1,\alpha_2,\gamma)$ имеет противоположные знаки, из чего делается вывод о существовании множества значений $\{(\alpha_1,\alpha_2,\gamma)\}$, для которых $\Delta_B(\alpha_1,\alpha_2,\gamma)=0$ ($\Delta_B(\alpha_1,\alpha_2,\gamma)>0$ при $\alpha_1=2,79$, $\alpha_2=0,15$, $\gamma=1,47$ и $\Delta_B(\alpha_1,\alpha_2,\gamma)<0$ при $\alpha_1=2,78$, $\alpha_2=0,15$, $\gamma=1,465$). Таким образом доказана возможность существования дивергенции в рассматриваемом случаи кратных корней характеристического уравнения. При исследовании этого случая целесообразнее перейти к двум переменным, используя замену $\alpha_2=2\gamma-\alpha_1$.

Случай $1-3^\circ$**.**

Корни характеристического уравнения: $-\alpha$ кратности 2 и α кратности 2. Из теоремы Виета следуют соотношения между корнем α

и коэффициентами характеристического уравнения: $a = 2\alpha^2$, $b = 0$, $c = \alpha^4$, т. е. исходное уравнение является биквадратным уравнением вида $(\lambda - \alpha^2)^2 = 0$, что возможно лишь при $\sigma = 0 (M = 0)$ в противоречие условию задачи. Таким образом доказана невозможность данного вырожденного случая.

Трудности, возникающие при исследовании соответствующих линеаризованных задач, преодолеваются с помощью представления бифуркационных многообразий через корни характеристического уравнения. Применяя метод Ляпунова–Шмидта [16] при определении значений базисных элементов $\varphi \in N(B)$, $\psi \in N^*(B)$ для различных граничных условий закрепления пластины, построена асимптотика решений, ответвляющихся от точек бифуркационного множества.

Сопряженная задача. Сопряженная задача к (1) с граничными условиями (B) строится стандартными методами и записывается в виде:

$$\chi^2 w^{(4)} - Tw'' - \sigma w' + \beta_0 w = 0$$

$$\chi^2 w''(0) - Tw(0) = 0, \chi^2 w^{(3)} - Tw(0) - \sigma w(0) = 0,$$

$$w(1) = 0, w'(1) = 0$$

(граничные условия (B^*)).

Приведем для примера базисный элемент подпространства нулей прямой и сопряженной задачи для вырожденных случаев:

• случай $1 - 2^\circ$:

$$\begin{gathered}\varphi = \tfrac{1}{\Delta_{B_{(3)}}}\Big[\alpha\delta e^{\alpha(1-x)}\cos\delta(-12\alpha^2 + 2\delta^2 - 5\alpha^3 x + \alpha\delta^2 x) + \\ +\alpha^2 e^{\alpha(1-x)}\sin\delta(5\alpha^2 - 9\delta^2 + 2\alpha^3 x - 4\alpha\delta^2 x) - \alpha^4 e^{\alpha(1+x)}\sin\delta(1-x) + \\ +\alpha\delta(12\alpha^2 - 2\delta^2 + 5\alpha^3 - \alpha\delta^2)e^{-\alpha(1-x)}\cos\delta x - \\ -\alpha^2(2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 4\alpha\delta^2 - 9\delta^2)e^{-\alpha(1-x)}\sin\delta x + \delta(\alpha^2+\delta^2)^2 e^{-\alpha(1+x)}\Big], \\ \Delta_{B_{(3)}} = \alpha^2(\alpha^2 e^{\alpha}\cos\delta - (2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 4\alpha\delta^2 - 9\delta^2)e^{-\alpha}),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\psi = \tfrac{1}{\Delta_{B*_{(3)}}}\Big[e^{-\alpha x}\big[-(\alpha^2+\delta^2)^2 e^{-\alpha}\sin\delta(1-x) + \\ +\alpha e^{-\alpha}\big(-\delta\cos\delta x(2\delta^2 + \alpha\delta^2 + 4\alpha^2 + 3\alpha^3) + \alpha\sin\delta x(2\alpha^3 + 3\alpha^2 + \delta^2)\big)\big] - \\ -\alpha e^{\alpha x}\big[-e^{-\alpha}\big(\cos\delta(3\delta x\alpha^3 + 4\alpha^2\delta - \alpha x\delta^3 - 2\delta^3) + \\ +\alpha e^{-\alpha}\sin\delta(2x\alpha^3 + 3\alpha^2 + \delta^2)\big) + \alpha^3\delta e^{\alpha}(1-x)\big]\Big] \\ \Delta_{B*_{(3)}} = (\alpha^2+\delta^2)^2\cos\delta e^{-\alpha} + \alpha^2(2\alpha^3 + 3\alpha^2 + \delta^2)e^{\alpha}.\end{gathered}$$

• случай $2-3^\circ$:

$$\varphi=\frac{1}{\Delta_{B_{(3)}}}\Big[\gamma^4e^{-\alpha_1(1-x)-2\gamma x}+\gamma\alpha_1^2\big(\gamma^3+(\alpha_1-3)\gamma-2\alpha_1\big)e^{\alpha_1 x-2\gamma x+\gamma}-$$

$$-\gamma^4e^{\alpha_1(1-x)-2\gamma}-(\gamma^2x+\alpha_1\gamma x-3\gamma-2\alpha_1)e^{\gamma x+\alpha_1-2\gamma}-$$

$$-\gamma(2\gamma-\alpha_1)^2\big(3\gamma^2-(7+\alpha_1)\gamma+2\alpha_1\big)e^{-\alpha_1x+\gamma}+\gamma(2\gamma-\alpha_1)^2\big(3x\gamma^2-(7+\alpha_1x)\gamma+$$

$$+2\alpha_1\big)e^{-\alpha_1+\gamma x}-2\alpha_1^2(2\gamma-\alpha_1)^2(\alpha_1-\gamma)(1-x)e^{\gamma(1+x)}\Big],$$

$$\Delta_{B_{(3)}}=-\gamma^2\alpha_1^2(\gamma+\alpha_1)e^{\alpha_1-2\gamma}+(2\gamma-\alpha_1)^2\big((3\gamma-\alpha_1)\gamma^2e^{-\alpha_1}+2\alpha_1^2(\alpha_1-\gamma)e^{\gamma}\big)$$

$$\psi=\frac{1}{\Delta_{B*_{(3)}}}\Big[-(2\gamma-\alpha_1)^2\big(\gamma(\gamma^2+(\alpha_1-1)\gamma-2\alpha_1)e^{-\gamma}-\alpha_1^2e^{-\alpha_1}\big)e^{(2\gamma-\alpha_1)x}+$$

$$+(2\gamma-\alpha_1)^2\big([x\gamma^2+(x\alpha_1-1)\gamma-2\alpha_1]\gamma e^{-\gamma x}-\alpha_1^2e^{-\alpha_1x}\big)e^{2\gamma-\alpha_1}+$$

$$+\gamma e^{-\gamma x}\big(2\gamma^3(\gamma-\alpha_1)(x-1)e^{-\gamma}-\alpha_1^2e^{\alpha_1}[3x\gamma^2-(\alpha_1x+5)\gamma+2\alpha_1]\big)+$$

$$+\alpha_1^2\gamma e^{\alpha_1x-\gamma}\big(3\gamma^2-(5+\alpha_1)\gamma+2\alpha_1\big)\Big]$$

$$\Delta_{B*_{(3)}}=\gamma^2(\gamma+\alpha_1)(2\gamma-\alpha_1)^2e^{2\gamma-\alpha_1}+2\gamma^4(\gamma-\alpha_1)e^{-\gamma}-\alpha_1^2\gamma^2(3\gamma-\alpha_1)e^{\alpha_1}$$

Построение уравнения разветвления. Для ОДУ 4-го порядка, которым описывается задача об обтекании удлиненной пластины в сверхзвуковом потоке газа операторов B имеет следующий вид:

$$B_0w=\chi^2w^{(4)}-T_0w''+\sigma w'+\beta_0w+\varepsilon_0q(x)=$$

$$=\chi^2(\frac{3}{2}w'^2w^{(4)}+3w''^3+9w'w''w''')+$$

$$+\varepsilon_1w''+\varepsilon_0q(x)+1(2)k\kappa\varepsilon_2w'+\frac{\theta}{2}w''\int\limits_0^1 w'^2dx+\xi z^{(1)}+$$

$$+\begin{cases}-\frac{k\kappa(\kappa+1)}{4}M_0^2w'^2-\frac{k\kappa(\kappa+1)}{2}M_0\varepsilon_2w'^2-\frac{k\kappa(\kappa+1)}{12}M_0^3w'^3,\\ -\frac{k\kappa(\kappa+1)}{6}M_0^3w'^3,\end{cases}$$

где $\omega=\omega_{1000}\xi+\omega_{0100}\varepsilon_1+\omega_{0010}\varepsilon_2+\omega_{0001}\varepsilon_0+\omega_{1100}\xi\varepsilon_1+\omega_{1010}\xi\varepsilon_2+\omega_{1001}\xi\varepsilon_0+\omega_{0110}\varepsilon_1\varepsilon_2+\omega_{0101}\varepsilon_1\varepsilon_0+\omega_{0011}\varepsilon_2\varepsilon_0+\omega_{2000}\xi^2++\omega_{0200}\varepsilon_1^2+\omega_{0020}\varepsilon_2^2+\omega_{0002}\varepsilon_0^2+\ldots$

1) Для одностороннего обтекания

$$L(\xi,\varepsilon)=L_{0001}\varepsilon_0+L_{2000}\xi^2+L_{0002}\varepsilon_0^2+L_{1001}\xi\varepsilon_0+L_{1100}\xi\varepsilon_1+L_{1010}\xi\varepsilon_2+$$

$$+L_{0101}\varepsilon_1\varepsilon_0+L_{0011}\varepsilon_2\varepsilon_0=0,$$

где

$$
\begin{array}{ll}
L_{0001} = - < q, \psi > & L_{2000} = \frac{k\kappa(\kappa+1)}{4} M_0^2 < \varphi'^2, \psi > \\
L_{0002} = \frac{k\kappa(\kappa+1)}{4} M_0^2 < \Gamma q'^2, \psi > & L_{1001} = \frac{k\kappa(\kappa+1)}{2} M_0^2 < \varphi(\Gamma q)', \psi > \\
L_{1100} = - < \varphi'', \psi > & L_{1010} = -k\kappa < \varphi', \psi > \\
L_{0101} = - < (\Gamma q)'', \psi > & L_{0011} = -k\kappa < (\Gamma q)', \psi >
\end{array}
$$

Здесь $q = q(x) > 0$, φ – нуль оператора B, ψ – нуль оператора B^*, построенного для сопряженной задачи. Если $\varepsilon_0 = 0$, то УР полностью совпадают с полученными ранее.

2) Для двустороннего обтекания

$$L(\xi, \varepsilon) = L_{0001}\varepsilon_0 + L_{1100}\xi\varepsilon_1 + L_{1010}\xi\varepsilon_2 + L_{0101}\varepsilon_1\varepsilon_0 + L_{0011}\varepsilon_2\varepsilon_0 + L_{3000}\xi^3 = 0,$$

где

$$
\begin{array}{ll}
L_{0001} = - < q, \psi > & L_{1100} = - < \varphi'', \psi > \\
L_{1010} = -k\kappa < \varphi', \psi > & L_{0101} = - < (\Gamma q)'', \psi > \\
L_{0011} = -k\kappa < (\Gamma q)', \psi > & L_{3000} \neq 0.
\end{array}
$$

При отсутствии малой нормальной нагрузки для одностороннего обтекания пластины УР имеет вид $L_{11}\xi\varepsilon + L_{20}\xi^2 + \cdots = 0$, где

$$L_{11} = k\kappa(1(2)) \int_0^1 \varphi'\psi dx, L_{20} = -\frac{k\kappa(\kappa+1)}{4} M_0 \int_0^1 \varphi_x'^2 \psi dx$$

а для двустороннего обтекания : $L_{30}\xi^3 + L_{11}\xi\varepsilon + \ldots = 0$, где

$$L_{30} = -\frac{k\kappa(\kappa+1)}{6} M_0 \int_0^1 \varphi'^3 \psi dx + \chi^2 \int_0^1 \psi(\frac{3}{2}\varphi_x'^2 \varphi_{x^4}^{(4)} +$$

$$+3\varphi_{x^3}'''^3 + 9\varphi_x'\varphi_{x^2}''\varphi_{x^3}''')dx + \frac{\theta}{2}\int_0^1 \varphi_x'^2 \int \varphi_{x^2}''\psi dx.$$

Соответственно асимптотика разветвляющихся решений определяется формулами : $w(x) = -\frac{L_{11}}{L_{20}}\varepsilon\varphi(x) + o(|\varepsilon|)$ – для одностороннего обтекания и $w(x) = \pm\sqrt{\frac{L_{11}\varepsilon}{L_{30}}}\varphi(x) + O(|\varepsilon|)$ – при двустороннем, где $\operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign} L_{11}L_{30}$ определятся неотрицательностью выражения под корнем. Значения коэффициентов УР здесь не выписывается в силу их громоздкости. Случай ненулевой малой нормальной нагрузки описан в [23].

Список литературы

[1] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем.* М.: Наука 1967. 984 с.

[2] Болотин В.В.*Неконсервативные задачи упругой устойчивости.* М.:ГИФМЛ, 1961. 339 с.

[3] Алгазин С.Д., Кийко И.А.*Флаттер пластин и оболочек.* М.: Наука, 2006.

[4] Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.Л. Пер. с англ. Баренблатта Г.И., Смирнова А.И. Шидловского В.П. Под ред. Григолюка Э.И. *Аэроупругость.* М.: Иноиздат, 1958. 799 с.

[5] Ilgamov M.A. *Dowell Studies in Nonlinear Aeroelasticity.* New-York-London – Tokyo: Springer–Verlag, 1988. 456 p.

[6] Bolotin V.V., Petrovsky A.V., Grishko A.A.*Secondary bifurcations and global instability of an aeroelastic nonlinear system in the divergence domain* // J. Sound and Vibration. 1996. Vol. 191, № 3. P. 431–451.

[7] Bolotin V.V., Grishko A.A., Kounadis A.N., Gantes Ch.*Non-linear panel flutter in remote post-critical domain* // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1998. Vol. 33, № 5. P. 753–764.

[8] Bolotin V.V., Grishko A.A., Kounadis A.N., Gantes Ch., Roberts J.B.*Influence of initial conditions on the postcritical behavior of nonlinear aeroelastic systems* // Nonlinear Dynamics. 1998. Vol. 15. P. 63–81.

[9] Kounadis A.N., Gantes C.J., Bolotin V.V. *An improved energy criterion for dynamic bucking of imperfection sensitive non conservative systems* // International Journal of Solids and Structures. 2001. Vol. 38. P. 7487–7500.

[10] Логинов Б.В., Азизова А.А., Кузнецов А.О. *Расчет стержневых систем методом групповых преобразований Современный групповой анализ. Методы и приложения.* Баку, 1989. С. 9–14.

[11] Вельмисов П.А., Логинов Б.В. *Метод групповых преобразователей и ветвление решений в двухточечных граничных задачах аэроупругости*// Дифференциальные уравнения и их приложения. Материалы Междунар. конф. (20–22 дек. 1994 г.). Саранск, 1995. С. 120–125.

[12] Киреев С.В.*Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*// Дисс. канд. физ.-мат.наук. Ульяновск, 2005.

[13] Badokina T.E., Loginov B.V., Makeeva O.V. *Green functions for boundary value problems about divergence of elongated plate in aeroelasticity* //PAMM V.9 80-th GAMM Jahrestagung 9-13.02.2009. Gdansk,Poland. 525-526 doi: 10.1002/pamm.200910235 www.wiley-vch.de.

[14] Loginov B.V., Makeev O.V., Tsyganov A. V., Kozhevnikova O. V. *Дивергенция удлиненной пластины при двух бифуркационных параметрах* // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Математика. 2005. № 4. С. 71–82.

[15] Бадокина Т.Е.*Бифуркационная задача о дивергенции удлиненной пластины в сверхзвуковом потоке газа*// Материалы научной конференции Герценовские чтения-2011, 11–16 апреля 2011 г. С. 23–31.

[16] Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* М.: Наука, 1969. 524 с.

[17] Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.*Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications* Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publisher, 2002. 568 p.

[18] Коллективная монография.*Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения.* Под ред. В.А.Треногина, А.Ф.Филиппова. М.:Физматлит, 2003. 464 с.

[19] Наймарк М.А.*Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука, 1969. 528 с.

[20] Melnikov Yu.A. *Influence Functions and Matrices.* Ser. Text and Reference Books Mech. Engng 119, M.Dekker, 1999. 469 p.

[21] Логинов Б.В. *Задача о дивергенции крыла как пример теории ветвления решений нелинейных уравнений с двумя малыми параметрами* Дифференциальные уравнения и их приложения. Ташкент, 1979. С. 109–113.

[22] Пановко Я.Г., Губанова И.И. *Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки.* М.: Наука, 1987. 352 с.

[23] Бадокина Т.Е., Логинов Б.В., Русак Ю.Б. *Построение асимптотики решений нелинейной краевой задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя бифуркационными параметрами*// Известия Иркутского государственного университета, Серия «Математика». 2012. №1. С. 2–12.