ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ПОРОГА ПЕРКОЛЯЦИИ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ

Е. С. Антонова, Ю. П. Вирченко (Белгород, Россия)
virch@bsu.edu.ru

На основе кластерного разложения доказана более точная, по сравнению с известной ранее, верхняя оценка порога перколяции случайного множества, порождаемого однородным бернуллиевским случайным полем на квадратной решетке $\mathbb{Z}^2$.

Введение. Теория перколяции, в самом общем понимании, занимается изучением отношения связности случайных множеств в некомпактных пространствах погружения, индуцированного структурой связности этих пространств. Одной из основных задач этой теории является проблема существования у случайных реализаций с ненулевой вероятностью некомпактной связной компоненты [1, 2, 3]. Однако, в такой общей постановке, сколько-нибудь существенные результаты относительно этой проблемы в настоящее время отсутствуют из-за чрезвычайной сложности задачи. В связи с этим, основным объектом математической теории перколяции являются случайные множества в $\mathbb{Z}^d$ при $d = 2, 3$, порождаемые стационарными дихотомическими случайными полями.[1)] Более того, можно сказать, что почти все значимые результаты теории получены в том случае, когда случайное поле является бенуллиевским [1, 2, 3]. Заметим, что, несмотря на кажущуюся тривиальность постановки перколяционной задачи для бернуллиеского поля на $\mathbb{Z}^d$ при $d = 2, 3$, она, с одной стороны, оказывается, как это будет видно из дальнейшего рассмотрения, все же очень сложной, а, с другой стороны, именно она оказывается востребованной в физических приложениях. Математические результаты, связанные с этим наиболее продвинутым разделом теории перколяции суммированы в монографии [4].

Физическая литература, посвященная различного рода нестрогим эвристическим подходам к изучению явления перколяции, компьютерным экспериментам и конкретным приложениям результатов теории в теоретической физике, необозрима и мы на ней не будем останавливаться в этом кратком введении в проблему. Несмотря на имеющийся необозримый поток публикаций в физических изданиях и математиче-

---

[1]Следует упомянуть, что точно такие же, но несколько более простые, с точки зрения математического исследования, перколяционные задачи уже давно являются объектом глубокой математической теории т.н. случайных ветвящихся процессов, где пространством погружения являются бесконечные древесные графы.

ских работ, содержащих строгие результаты качественного характера, серьезного продвижения в задачах теории перколяции, как объекта математической физики, к настоящему времени, не произошло. Это касается даже самой простой ситуации, изучаемой этой теорией, когда случайное множество порождается бернуллиевским случайным полем на $\mathbb{Z}^2$. Даже в этом случае не найден алгоритм вычисления последовательных приближений т.н. *порога перколяции* и, более общó, – вероятности перколяции для простейших *периодических графов*. Настоящая публикация посвящена некоторому улучшению уже полученных ранее (см.[4 - 8]) верхних оценок порога перколяции в том случае, когда случайные множества порождаются однородным бернуллиевским полем на бесконечном графе, порождаемым $\mathbb{Z}^2$ со структурой связности в виде квадратной решётки.

1. Задача теории перколяции на квадратной решетке. Пусть $\langle \mathbb{Z}^2, \Phi \rangle$ – бесконечный граф (ненаправленный и не содержащий петель) с множеством вершин $\mathbb{Z}^2$, которые, для простоты дальнейших формулировок, будем считать погруженными в $\mathbb{R}^2$. Отношение смежности Φ на графе определяется множеством пар $\{\{x, y\} \subset \mathbb{Z}^2 : x\varphi y\}$, где $x\varphi y$ в тех и только тех случаях когда $y = x \pm \mathbf{e}_1$, либо $y = x \pm \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 = \langle 1, 0 \rangle, \mathbf{e}_2 = \langle 0, 1 \rangle$. Такой граф называется *квадратной решеткой*. Мы будем его обозначать кратко символом $\mathbb{Z}^2$, если это не вызывает недоразумений.

Пусть $\{\tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^2\}$ – однородное бернуллиевское случайное поле (в дальнейшем символ тильда указывает на случайность используемых объектов). Такое поле полностью определяется значением одного параметра

$$c \;=\; \Pr\{\tilde{c}(x) = 1\}\,,$$

который будем называть концентрацией. Поле $\{\tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^2\}$ индуцирует случайное множество с реализациями $\{\tilde{M} : \tilde{M} \subset \mathbb{Z}^2\}$, где $\tilde{M} = \{x : \tilde{c}(x) = 1\}$, которые мы будем называть далее *конфигурациями заполненных вершин* или, просто, *конфигурациями.* Ясно, что распределение вероятностей для возможных реализаций $\tilde{M}$ полностью определяется набором вероятностей

$$\Pr\{\tilde{M} : A \subset \tilde{M}\} \;=\; c^{|A|}\,, \qquad A \subset \mathbb{Z}^2\,,$$

где здесь и далее $|\cdot| = \mathrm{Card}\{\cdot\}$.

Отношение смежности φ индуцирует естественным образом отношение связности для вершин, входящих в конфигурацию $\tilde{M}$, а именно, две вершины x и y из $\tilde{M}$ связаны, если существует путь – последовательность $\langle x_i; i = 0, 1, 2, ..., n\rangle$, $x_i \in \tilde{M}$, $x_0 = x, x_n = y$ и $x_i \varphi x_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$. Связность вершин из $\tilde{M}$ является этим отношением. Поэтому, каждая конфигурация $\tilde{M}$ однозначно разлагается на непересекающиеся классы эквивалентности $\tilde{W}_j$, $\tilde{M} = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} \tilde{W}_j$, порождаемых отношением связности вершин. Эти классы называются в теории перколяции *кластерами*. Семейство кластеров, связанное с фиксированной конфигурацией $\tilde{M}$, будем обозначать $\mathcal{W}[\tilde{M}] = \{\tilde{W}_j; j \in \mathbb{N}\}$. Если $x \in \tilde{W}_j$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$ в конфигурации $\tilde{M}$, то этот кластер $\tilde{W}_j$ будем обозначать $\tilde{W}(x)$.

С целью большей наглядности формулировки понятия перколяции, введем случайное поле $\{\tilde{a}(x); x \in \mathbb{Z}^2\}$, индуцированное случайным множеством $\{\tilde{M}; \tilde{M} \subset \mathbb{Z}^2\}$ и, следовательно, – исходным случайным полем $\{\tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^2\}$,

$$\tilde{a}(x) \;=\; \begin{cases} 1\,; & \tilde{W}(x) \in \mathcal{W}[\tilde{M}],\ |\tilde{W}(x)| = \infty\,, \\ 0\,; & \text{в противном случае}\,. \end{cases}$$

Ввиду однородности поля $\{\tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^2\}$, то есть инвариантности вероятностной меры относительно трансляций на векторы $(n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2)$; $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$), случайное поле $\{\tilde{a}(x); x \in \mathbb{Z}^2\}$ также является однородным. Поэтому вероятность

$$Q(c) \;=\; \Pr\{\tilde{a}(x) \;=\; 1\}$$

не зависит от $x \in \mathbb{Z}^2$. Естественно, что эта вероятность является неубывающей функцией от c (точное доказательство этого факта дано в [9]). Если $Q(c) > 0$, то говорят что такое поле $\{\tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^2\}$ обладает перколяцией. В связи с этим вводится характеристика

$$c_* \;=\; \inf\{c : Q(c) \;=\; 0\}\,,$$

которая называется *порогом перколяции*. Вследствие неубывающего характера зависимости $Q(c)$, эта функция строго положительна при $c > c_*$.

2. Конечные кластеры на $\mathbb{Z}^2$. При построении оценок для вероятности $Q(c)$ возникает необходимость перечисления всех конечных кластеров $W(x)$, содержащих фиксированную вершину x. Это перечисление осуществляется на основе понятия *внешней границы* кластера [4]. Введем на $\mathbb{Z}^2$, следуя [4], новое понятие смежности $\bar{\varphi}$, т.е. наряду с графом $\mathbb{Z}^2$ будем рассматривать граф $\bar{\mathbb{Z}}^2$ с тем же множеством вершин $\mathbb{Z}^2$, но с отношением смежности $\bar{\varphi}$.

Вершины x и y назовем *$\bar{\varphi}$-смежными*, если $x\varphi y$, либо $y = x+\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2$, или $y = x - \mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2$.

Отношение $\bar{\varphi}$ порождает новое отношение связности вершин на $\mathbb{Z}^2 \setminus \tilde{M}$ для каждой случайной конфигурации $\tilde{M}$, которое также является отношением эквивалентности и приводит к разложению $\mathbb{Z}^2 \setminus \tilde{M}$ на связные, по отношению к $\bar{\varphi}$, множества вершин.

Введем теперь понятие внешней границы кластера на $\mathbb{Z}^2$.

Определение 1. Множество ∂W, состоящее из вершин y, φ-смежных к вершинам x кластера W, но не принадлежащих ему, называется *границей кластера* W.

Определение 2. *Внешней границей* $\partial_+ W$ *кластера* W называется множество вершин $u \in \partial W$, обладающих тем свойством, что существует бесконечный φ-путь $\alpha(u)$ по вершинам решетки, расположенный в $\complement W$, причем u – единственная вершина в $\alpha(u)$, принадлежащая объединению $W \cup \partial W$.

Неспрямляемым циклом γ на графе $\bar{\mathbb{Z}}^2$ называется путь $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$, где $x_i \neq x_j, i \neq j$, $n = |\gamma|, x_i \bar{\varphi} x_{i+1}$, $i = 0, 1, ..., n$, $x_{n+1} = x_0$ и каждая его вершина имеет в γ только две $\bar{\varphi}$-смежные вершины. На каждом неспрямляемом цикле введем определенную ориентацию, например, против часовой стрелки, которая будет использоваться в дальнейшем.

Классификацию конечных кластеров $W(x)$ осуществляется далее перечислением всех возможных внешних границ $\partial_+ W(x)$. Ключом к такому перечислению являются следующие утверждения, которые основаны на аналогичных утверждениях в гл.1 монографии [43] с учетом их уточнения в работе [10].

Теорема 1. *Для того чтобы цикл множество* $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ *было внешней границей какого-либо конечного кластера, необходимо и достаточно, чтобы оно представляло собой неспрямляемый цикл на* $\bar{\mathbb{Z}}^2$.

В связи с этой теоремой, в дальнейшем, при построении перечисления всех неспрямляемых циклов, которые являются внешними границами кластеров определенного класса, мы будем их кратко называть *циклами.*

Теорема 2. *Пусть* $W(x)$ *– конечный кластер, содержащий некоторую фиксированную вершину* x, $|W(x)| < \infty$ *так, что* $W(x)$ *имеет* *непустую, конечную внешнюю границу $\partial_+ W(x)$, которая представляет собой неспрямляемый цикл на $\bar{\mathbb{Z}}^2$. Тогда вершина x содержится в конечном множестве* $\mathrm{Int}[\partial_+ W(x)]$ *определяемом формулой*

$$\mathrm{Int}[\partial_+ W(x)] \;\equiv\; \{u \notin \partial_+ W(x) \,:\, \forall\,(\alpha(u); |\alpha(u)| = \infty \,:$$

$$\alpha(u) \cap \partial_+ W(x) \neq \varnothing)\}\,.$$

Следствием неспрямляемости внешней границы $\partial_+ w(x)$ является следующее свойство ее вершин.

Теорема 3. *Пусть $u, v, w \in \partial_+ W(x)$ тройка $\bar{\varphi}$-смежных вершин, следующих друг за другом, согласно введенной на цикле ориентации. Тогда, при $u\bar{\varphi}v$, вершина w обязательно принадлежит одному из следующих наборов:*

a) *трехэлементному множеству $\{2v - u,\, v \pm \mathbf{e}\}$, где* $\mathbf{e}$ – *единичный вектор, ортогональный вектору $(v - u)$, если $u\varphi v$;*

b) *пятиэлементным множествам*

$$\{2v - u,\, v + \varepsilon\mathbf{e}_1,\, v + \varepsilon\mathbf{e}_2,\, v \pm \mathbf{e}'/2\}\,,$$

если $v = u + \varepsilon(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ и

$$\{2v - u,\, v + \varepsilon\mathbf{e}_1,\, v - \varepsilon\mathbf{e}_2,\, v \pm \mathbf{e}'/2\}\,,$$

если $v = u + \varepsilon(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$, где $\mathbf{e}'$ – *вектор, ортогональный $(v - u)$, $|\mathbf{e}'| = \sqrt{2}$ и $\varepsilon = \pm 1$.*

3. Кластерное разложение на $\mathbb{Z}^2$. Рассмотрим вероятность $1 - Q(c) = \Pr\{\tilde{a}(0) = 0\}$. Пусть $\mathcal{A} = \{W \,:\, W = W(0)\,, |W| < \infty\}$ – семейство конечных кластеров W, содержащих вершину 0. Определим для любого кластера $W \in \mathcal{A}$ событие

$$A(W) \;=\; \{\tilde{M} :,\, 0 \in \tilde{M},\, \tilde{W}(0) \in \mathcal{W}[\tilde{M}]\,, \tilde{W}(0) = W\}\,.$$

Такое событие имеет определенную вероятность

$$\Pr\{A(W)\} \;=\; c^{|W|}(1 - c)^{|\partial W|}\,. \tag{1}$$

Согласно утверждению предыдущего раздела, каждому кластеру из семейства $\mathcal{A}$ взаимно однозначным образом отвечает неспрямляемый цикл γ, вершины которого являются $\bar{\varphi}$-смежными, и такой, что $0 \in \mathrm{Int}[\gamma]$. В связи с этим, введем в рассмотрение семейство $\mathcal{B}$ всех простых $\bar{\varphi}$-циклов, обладающих последним свойством. Для каждого $\bar{\varphi}$-цикла $\gamma \in \mathcal{B}$ введем событие

$$B(\gamma) \ = \ \{\tilde{M} \, : \, 0 \in \tilde{M}, \tilde{W}(0) \in \mathcal{W}[\tilde{M}], \partial_+ \tilde{W}(0) = \gamma\} \,, \qquad (2)$$

которое представимо в виде конечного объединения попарно непересекающихся событий

$$B(\gamma) \ = \ \bigcup_{W \in \mathcal{A} \, : \, \partial_+ W = \gamma} A(W) \, . \qquad (3)$$

Следовательно, это событие обладает определенной вероятностью

$$P(\gamma) \ = \ \Pr\{B(\gamma)\} \,,$$

которая согласно (1), (3), равна

$$P(\gamma) \ = \sum_{W \in \mathcal{A} \, : \, \partial_+ W = \gamma} \Pr\{A(W)\} \ = \sum_{W \in \mathcal{A} \, : \, \partial_+ W = \gamma} c^{|W|} (1 - c)^{|\partial W|} \, .$$

Заметим, что

$$\{\tilde{a}(0) \ = \ 0\} \ = \ \{\tilde{c}(0) = 0\} \cup \left(\bigcup_{W \in \mathcal{A}} A(W) \right) \, . \qquad (4)$$

Семейство $\mathcal{A}$ разлагается на непересекающиеся классы, состоящие из кластеров объединяемых следующим признаком. К одному классу отнесём такие и только такие кластеры $W \in \mathcal{A}$, которые имеют одну и ту же внешнюю границу $\partial_+ W = \gamma$. Поэтому справедливо преобразование

$$\bigcup_{W \in \mathcal{A}} \ldots \ = \ \bigcup_{\gamma \in \mathcal{B}} \ \bigcup_{W \in \mathcal{A} \, : \, \partial_+ W = \gamma} \ldots \, .$$

Далее, на основании (3), получаем

$$\{\tilde{a}(x) \ = \ 0\} \ = \ \{\tilde{c}(0) = 0\} \cup \left(\bigcup_{\gamma \in \mathcal{B}} B(\gamma) \right)$$

и, таким образом, приходим к утверждению

Теорема 4. *Вероятность $1 - Q(c)$ представляется разложением*

$$1 - Q(c) \ = \ 1 - c + \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} P(\gamma) \, . \qquad (5)$$

Это разложение будем далее называть *кластерным.*

4. Основная теорема. Кластерное разложение, вследствие того, что оно представляет собой сумму вероятностей непересекающихся событий, является наверняка сходящимся. При этом функция $Q(c)$ отлична от от нуля только при $c > c_* > 0$ и, поэтому, она не является аналитической функцией в какой-либо области комплексных значений c, содержащей весть интервал $[0, 1]$. При этом $c = c_*$ – существенно особая точка этой функции. В приводимом ниже утверждении мы даем уточнение верхней оценки для числа c_*.

Теорема 5. *Для однородного бернуллиевского случайного поля* $\{\tilde{c}(x)\ x \in \mathbb{Z}^2\}$ *на квадратной решетке* $\mathbb{Z}^2$ *справедливо неравенство* $c_* \leqslant c_0 = \lambda^3$, *где* λ *– наибольший на* $[0, 1]$ *корень уравнения* $\lambda^4 - \lambda + \sqrt{5} - 2 = 0$ *(*$c_0 \approx 0.738876$ *с избытком).*

□ 1. Зафиксируем кластер $W \equiv W(0)$. Для него введем множество $\partial_- W = \{x \in W : \exists (y \in \partial W : x\varphi y)\}$, которое будем называть внутренней границей кластера. Для каждой вершины $x \in \partial_- W$ введем множество $B_x = \partial\{x\} \cap \partial_+ W$. Очевидно, что $|B_x| \leqslant 3$ для любого кластера W, не состоящего только из одной вершины x, так как среди 4-х смежных с x вершин должна существовать, по крайней мере, одна вершина z из W, то есть $z \notin \partial_+ W$. С другой стороны, каждая из вершин внешней границы $\partial_+ W$ попадет, по крайней мере, в одно из множеств B_x, $x \in \partial_- W$. Поэтому справедливо разложение

$$\partial_+ W = \bigcup_{x \in \partial_- W} B_x\,.$$

Тогда

$$|\partial_+ W| \leqslant \sum_{x \in \partial_- W} |B_x| \leqslant 3|\partial_- W|\,,$$

то есть имеет место неравенство $|\partial_- W| \geqslant |\partial_+ W|/3$.

2. Пусть $\partial_+ W \equiv \gamma$. Воспользуемся элементарной оценкой

$$P(\gamma) \leqslant (1\ -\ c)^{|\gamma|} c^{|\gamma|/3}\,,$$

которая следует из Определения 2, формулы (2) и неравенства, полученного в п.1. Используя эту оценку и (5), приходим к ограничению сверху суммы

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{B}} P(\gamma)\ \leqslant\ \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} (1\ -\ c)^{|\gamma|} c^{|\gamma|/3}\ =\ \sum_{k=4}^{\infty} (1\ -\ c)^k r_k, \qquad (6)$$

где $r_k = |\{\gamma \in \mathcal{B} : |\gamma| = k\}|$, $k \geqslant 4$.

3. Найдем верхнюю оценку для комбинаторной функции r_k. Проведем из вершины 0 путь $\alpha(0) = \langle j\mathbf{e}_1; \, j \in \mathbb{N}_+\rangle$ бесконечной длины. Тогда, согласно теореме 3, каждый цикл $\gamma \in \mathcal{B}$ обязательно пересечет этот путь в некоторой вершине. Среди множества всех таких вершин пересечения выберем ближайшую к вершине 0. Пусть таковой является вершина $l\mathbf{e}_1$, $l \in \mathbb{N}$.

Все циклы из $\mathcal{B}$ распадаются на непересекающиеся классы $\mathcal{C}_l$, где к одному классу отнесем циклы с одной и той же вершиной $l\mathbf{e}_1$. Это разбиение индуцирует разбиение на соответствующие попарно непересекающиеся классы $\mathcal{C}_l^{(k)} = \{\gamma \in \mathcal{B} : |\gamma| = k\} \cap \mathcal{C}_l$ множество циклов $\{\gamma \in \mathcal{B} : |\gamma| = k\}$, $k \geqslant 4$. При этом, очевидно, $l < k$, и поэтому

$$\{\gamma \in \mathcal{B} : |\gamma| = k\} = \bigcup_{l=1}^{k-1} \mathcal{C}_l^{(k)}, \qquad r_k = \sum_{l=1}^{k-1} |\, \mathcal{C}_l^{(k)}| .$$

Пусть $\gamma = \langle l\mathbf{e}_1 = x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_k = l\mathbf{e}_1\rangle$. Согласно введенной ориентации, вершиной x_1, следующей за x_0 в цикле γ, может быть только одна вершина из списка

$$\{(l+1)\mathbf{e}_1, (l+1)\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, l\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, (l-1)\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\} . \tag{7}$$

Циклы, относящиеся к одному классу $\mathcal{C}_l^{(k)}$, распределим на попарно непересекающиеся классы $\mathcal{C}_l^{(k,i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, в зависимости от выбора первой после $l\mathbf{e}_1$ вершины x_1 из списка (7) при прохождении внешней границы цикла $\gamma \in \mathcal{C}_l^{(k)}$. При этом номер i выбирается в соответствии с порядком в этом списке. Таким образом,

$$\mathcal{C}_l^{(k)} = \bigcup_{i=1,2,3,4} \mathcal{C}_l^{(k,i)}, \qquad \left|\mathcal{C}_l^{(k)}\right| = \sum_{i=1,2,3,4} \left|\mathcal{C}_l^{(k,i)}\right| .$$

В результате, получаем

$$r_k = \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1,2,3,4} \left|\mathcal{C}_l^{(k,i)}\right| .$$

4. Зафиксируем числа k, l, i. Нам необходимо оценить сверху числа $\left|\mathcal{C}_l^{(k,i)}\right|$. Обозначим $\mathcal{P}_l^{(k,i)}$ – множество путей $\gamma = \langle x_0 = l\mathbf{e}_1, x_1, ..., x_{k-1}\rangle$, у которых соседние рёбра обладают свойством, описанном в Теореме 3. Кроме того, их вершина x_1 находится на i-м месте в списке (7). Очевидно, что число элементов в подмножестве тех путей из $\mathcal{P}_l^{(k,i)}$,

которые допускают продление посредством добавления одного ребра $\langle x_{k-1}, l\mathbf{e}_1\rangle$, в результате которого каждый из них превращается в замкнутый путь, наверняка, превосходит число $\left|\mathcal{C}_l^{(k,i)}\right|$. Поэтому имеет место неравенство

$$\left|\mathcal{C}_l^{(k,i)}\right| \ \leqslant \ \left|\mathcal{P}_l^{(k,i)}\right| \ \equiv \ s_{k-1}\,.$$

Заметим, что число s_n по построению не зависит от l и i. Отсюда и из оценки п.3 следует, что $r_k < 4(k-1)s_{k-1}$. Представим теперь

$$s_n \ = \ s_n^{+} \ + \ s_n^{\times}\,, \tag{8}$$

где $s_n^{+} = |\{\gamma \in \mathcal{P}_l^{(n,i)} : x_{n-1}\varphi x_n\}|$, $s_n^{\times} \ = \|\{\gamma \in \mathcal{P}_l^{(n,i)} : \{x_{n-1}, x_n\} \notin \Phi$, $x_{n-1}\bar{\varphi}x_n\}|$.

Введем двухкомпонентный вектор $(s_n^{+}, s_n^{\times})$. Тогда имеет место соотношение $(s_n^{+}, s_n^{\times}) \ = \ \mathsf{T}\,(s_{n-1}^{+}, s_{n-1}^{\times})$, с матрицей T перехода, имеющей согласно теореме 3 вид

$$\mathsf{T} \ = \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$(s_n^{+}, s_n^{\times}) \ = \ \mathsf{T}^{\mathsf{n-1}}\,(s_1^{+}, s_1^{\times})\,. \tag{9}$$

Собственные числа матрицы T равны $\lambda_+ = 2 + \sqrt{5}$, $\lambda_- = 2 - \sqrt{5}$, а соответствующие им собственные векторы (ортогональные, но не нормированные) имеют вид $\mathsf{t}_+ = \big(1, (1+\sqrt{5})/2\big)$, $\mathsf{t}_- = \big(1, (1-\sqrt{5})/2\big)$.

Раскладывая вектор $(s_1^{+}, s_1^{\times}) \ = \ (2,2)$ по собственным векторам $\mathsf{t}_+, \mathsf{t}_-$,

$$(s_1^{+}, s_1^{\times}) \ = \ g_+\mathsf{t}_+ \ + \ g_-\mathsf{t}_-$$

с коэффициентами $g_+ = 1 + \sqrt{5}/5$, $g_- = 1 - \sqrt{5}/5$, получаем $(s_n^{+}, s_n^{\times}) = = g_+\lambda_+^{n-1}\mathsf{t}_+ + g_-\lambda_-\mathsf{t}_-$ и, на основании (8), (9), находим

$$\begin{aligned} s_n = \big(g_+\lambda_+^{n-1} + g_-\lambda_-^{n-1}\big) + \frac{1}{2}\big(g_+\lambda_+^{n-1}(1+\sqrt{5}) + g_-\lambda_-^{n-1}(1-\sqrt{5})\big) = \\ = \big(2 + 4\sqrt{5}/5\big)\big(2+\sqrt{5}\big)^{n-1} + \big(2 - 4\sqrt{5}/5\big)\big(2-\sqrt{5}\big)^{n-1} \leqslant \\ \leqslant 4\big(2+\sqrt{5}\big)^{n-1}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Так как $r_k < 4(k-1)s_{k-1}$, то, полагая $n = k-1$ в найденной оценке (10), получаем суммируемость при $(1-c)c^{1/3}\lambda_+ < 1$ мажорантного ряда (6) в п. 3. В этом случае имеем

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{B}} P(\gamma) \ \leqslant \ \infty. \tag{11}$$

5. Завершение доказательства осуществляется на основе стандартных в теории перколяции рассуждений (см., например, [11]). Неравенство (11) позволяет применить к семейству событий $\{B(\gamma); \gamma \in \mathcal{B}\}$ лемму Бореля–Кантелли (см., например, [12]), согласно которой вероятность события, состоящего в одновременной реализации бесконечной совокупности событий из данного семейства, равна нулю. Тогда с вероятностью 1 существует некоторый максимальный цикл $\gamma \in \mathcal{B}$ такой, что за его пределами найдется вершина z и вместе с ней бесконечный путь $\alpha(z)$ без самопересечений, начинающийся в этой вершине. Это означает, что для бернуллиевского поля $\{\tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^2\}$ событие $\{\tilde{M} : \exists \big(\tilde{W} \in \mathcal{W}[\tilde{M}] : |\tilde{W}| = \infty\big)\}$ имеет вероятность 1. С другой стороны, имеет место счетное разложение

$$\{\tilde{M} : \exists \big(\tilde{W} \in \mathcal{W}[\tilde{M}] : |\tilde{W}| = \infty\big)\} =$$

$$= \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^2} \{\tilde{M} : \tilde{W}(v) \in \mathcal{W}[\tilde{M}], |\tilde{W}(v)| = \infty\}. \qquad (12)$$

Ввиду однородности поля $\{\tilde{a}(x); x \in \mathbb{Z}^2\}$, вероятность

$$\Pr\{\tilde{M} : \tilde{W}(v) \in \mathcal{W}[\tilde{M}], |\tilde{W}(v)| = \infty\} = Q(c)$$

не зависит от v. Поэтому, она не может быть равна нулю из-за неравенства

$$1 \leqslant \sum_{v \in \mathbb{Z}^2} \Pr\{\tilde{M} : \tilde{W}(v) \in \mathcal{W}[\tilde{M}], |\tilde{W}(v)| = \infty\},$$

вытекающего из (12).

Следствие 1. *При $c > c_0$ вероятность $Q(c)$ может быть представлена с любой наперед заданной точностью конечным отрезком ряда (5), определяемом слагаемыми, которые соответствуют циклам γ с длиной, не превосходящей m. При этом имеет место следующая оценка погрешности*

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{B}: |\gamma| > m} P(\gamma) \leqslant \sum_{\gamma \in \mathcal{B}: |\gamma| > m} [(1-c)c^{1/3}]^{|\gamma|} \leqslant 4 \sum_{k > m} (k-1)[(1-c)c^{1/3}]^k s_{k-1} =$$

$$= 16(1-c)c^{1/3} \sum_{k=m+1}^{\infty} (k-1) \left[\left(2+\sqrt{5}\right)(1-c)c^{1/3}\right]^{k-1} =$$

$$= 16(1-c)c^{1/3} \left[\xi \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi^m}{1-\xi}\right)\right]_{\xi = \left[\left(2+\sqrt{5}\right)(1-c)c^{1/3}\right]}.$$

Таким образом, разложение (5) служит инструментом для вычисления вероятности перколяции $Q(c)$ с любой гарантированной точностью на том отрезке изменения концентрации c, на котором имеется гарантированная оценка сверху для порога перколяции c_*.

Список литературы

[1] Вирченко Ю.П. *Перколяция* // Математическая физика / Москва: Большая Российская Энциклопедия, 1998. С. 346–347.

[2] Вирченко Ю.П. *Просачивание случайного поля* // Математическая физика / Москва: Большая Российская Энциклопедия, 1998. С. 363–364.

[3] Меньшиков М.В., Молчанов С.А., Сидоренко А.Ф. *Теория перколяции и некоторые приложения* // Итоги науки и техники. Сер. теор. вер., мат. стат. и теор. кибер. Москва: ВИНИТИ, 1986. Т. 24. С. 53–110.

[4] Kesten H. *Percolation Theory for Mathematicians.* Boston: Birkhäuser, 1982. 420 p.

[5] Кестен Х. *Теория просачивания для математиков.* М.: Мир, 1986. 390 с.

[6] Virchenko Yu.P., Tolmacheva Yu.A. *Revision of upper estimate of percolation threshold on square lattice* // ArXiv math-phys/0204033, 2002.

[7] Virchenko Yu.P., Tolmacheva Yu.A. *Revision of the upper estimate of percolation threshold in square lattice* // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. 2003. 10;1. P. 29–39.

[8] Virchenko Yu.P., Tolmacheva Yu.A. *Method of Sequential Approximative Estimates in Discrete Percolation Theory* // Studies in Mathematical Physics Research. ed. Charles V. Benton. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2004. P. 155–175.

[9] Вирченко Ю.П., Толмачева Ю.А. *Мажорантные оценки порога перколяции бернуллиевского поля на квадратной решетке* // Украинский математический журнал. 2005. Т. 57, №10. С .1315–1326.

[10] Antonova E.S., Virchenko Yu.P. *Monotonicity of the probability of percolation for Bernoulli random fields on periodic graphs* //Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 175, no 1. P. 86–90.

[11] Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. *Конечные кластеры на плоских мозаиках. Часть 3.* // Belgorod State University Scientific Bulletin. 2011. Vol. 23(118), no 25. P. 112–126.

[12] Малышев В.А., Меньшиков М.В., Петрова Е.В. *Введение в теорию вероятностей.* Москва: МГУ, 1997. 120 с.

[13] Ламперти Дж. *Вероятность.* М.: Наука, 1973. 184 с.