

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМ

А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов (Ульяновск, Россия)

ankil@ulstu.ru

Изучается устойчивость элементов при различных способах их закрепления при дозвуковом или сверхзвуковом режимах обтекания. Исследуется устойчивость движения в задачах о динамике летательных аппаратов, трубопроводных систем, датчиков измерения параметров газожидкостных сред.

Введение. При проектировании различных конструкций, устройств, установок, приборов, аппаратов, систем и т. д., находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа), необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости упругих элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

С одной стороны воздействие потока может приводить к отрицательным эффектам, являющимся причиной нарушения необходимых функциональных свойств элементов, вплоть до их разрушения (например, приводить к состоянию неустойчивости вследствие увеличения амплитуды или частоты колебаний до критически допустимых значений). Такая проблема, когда неустойчивость является негативным явлением, возникает, например, при проектировании составных частей летательных и подводных аппаратов: элерона – составной части крыла, руля высоты – составной части стабилизатора, руля направления – составной части киля, панели – составной части фюзеляжа, крыла или какой-либо другой части летательного аппарата.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике, используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий (например, гидродинамические излучатели), в частности, устройства для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки.

На деформации упругих элементов основано также действие некоторых приборов, например, датчиков для измерения давления рабочей среды.

В настоящее время аэрогидроупругость представляет собой хорошо

развитый раздел механики сплошной среды. Например, отметим работы [1–5]. Однако, хотелось бы заметить, что при решении задач аэрогидроупругости недостаточно развиты методы исследования устойчивости элементов конструкций, основанные на построении функционалов для интегро-дифференциальных уравнений с частными производными при дозвуковом, трансзвуковом, сверхзвуковом режимах обтекания этих конструкций потоком жидкости или газа. Этот факт и определяет направление проведенных исследований.

В работе принято определение устойчивости упругого тела, соответствующее концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Некоторые результаты отражены в работах [6–15].

Исследование устойчивости основано:

- на построении смешанных функционалов для связанных систем дифференциальных уравнений с частными производными для двух неизвестных функций – деформации элемента и потенциала скорости потока жидкости (газа);

- на построении функционалов для дифференциальных уравнений с частными производными только для функции деформации элемента после исключения потенциала скорости жидкости (газа);

- на проведении численного эксперимента с применением метода Бубнова–Галеркина.

Поведение упругого материала в работе описывается несколькими линейными и нелинейными моделями. В некоторых моделях учитываются тепловое воздействие на элементы и (или) эффекты запаздывания внешних воздействий на элементы.

В работе приведены примеры постановок некоторых задач аэрогидроупругости и примеры исследования динамической устойчивости движения упругих элементов конструкций в этих задачах.

Исследование устойчивости упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании. Рассмотрим модельное уравнение, описывающее поперечные колебания упругой пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком газа (рис. 1):

$$L(w) \equiv M\ddot{w}(x, t) + Dw''''(x, t) + Nw''(x, t) + \alpha(\dot{w}(x, t) + Vw'(x, t)) = 0, \quad x \in (0, l). \quad (1)$$

Здесь $w(x, t)$ – функция деформации упругой пластины; штрих и точка обозначают частные производные по x и t соответственно; $\alpha = \alpha_0\rho_0a_0 = \text{const} > 0$, где ρ_0, a_0 – плотность газа и скорость звука в однородном невозмущенном потоке ($\alpha_0 = 1$ при одностороннем

обтекании, $\alpha_0 = 2$ при двустороннем обтекании); N – сжимающая (растягивающая) пластину сила; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $M = \rho_{pl}h$ – изгибная жесткость и погонная масса пластины (элемента); h, l – толщина и длина пластины; E – модуль упругости пластины; ρ_{pl} – плотность материала пластины; ν – коэффициент Пуассона.

Аэродинамическая нагрузка определяется выражением

$$F = \alpha (\dot{w} + Vw'),$$

справедливым при достаточно больших скоростях сверхзвукового потока V . Выражение для F получено с помощью решения соответствующей линейной нестационарной аэродинамической задачи на основе преобразования Лапласа при больших числах Маха $M = V/a_0$ (что согласуется с гипотезой плоских сечений Ильюшина А.А.).

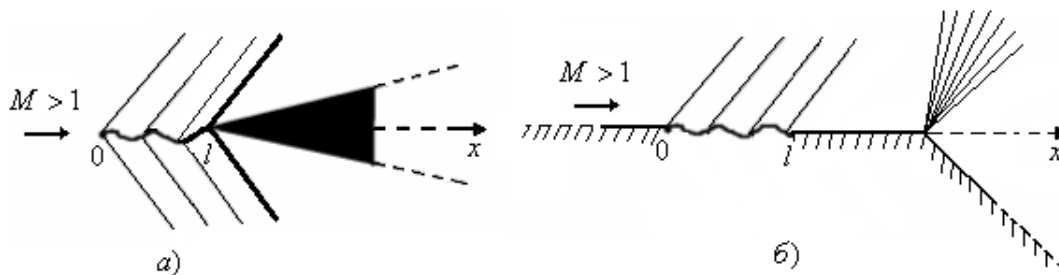


Рисунок 1 – Примеры обтекания конструкций с упругим элементом сверхзвуковым потоком газа: а) двустороннее обтекание рассекателя с образованием ударной волны; б) одностороннее обтекание защитного экрана с образованием волны разрежения

Предположим, что концы упругой пластины закреплены либо жестко, либо шарнирно, тогда при $x = b$ и $x = c$ выполняется одно из условий

$$1) w = w' = 0, \quad 2) w = w'' = 0. \quad (2)$$

На основе исследования функционала

$$J(t) = \frac{1}{2} e^{2\gamma t} \int_0^l \{ M\dot{w}^2 + 2M\theta w\dot{w} + \alpha\theta w^2 + Dw''^2 - Nw'^2 \} dx, \quad (3)$$

где γ, θ – некоторые постоянные положительные параметры, при выполнении условий

$$\lambda_1 D - N > 0; \quad \theta - \gamma > 0; \quad (4)$$

$$\alpha \geq M\theta \quad \text{или} \quad \alpha < M\theta, \quad \frac{M\theta^2 - \alpha\theta}{\eta_1(\lambda_1 D - N)} \in (0, 1); \quad (5)$$

$$\alpha - M(\theta + \gamma) > 0; (\alpha - M(\theta + \gamma))(\lambda_1 D - N)(\theta - \gamma) > \frac{\alpha^2 V^2}{4} + M^2 \theta^2 \gamma^2; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & (\alpha - M(\theta + \gamma))^2 (\lambda_1 D - N)^2 (\theta - \gamma)^2 + \frac{\alpha^4 V^4}{16} + M^4 \theta^4 \gamma^4 > \\ & > \frac{\alpha^2 V^2}{2} M^2 \theta^2 \gamma^2 + (\alpha - M(\theta + \gamma))(\lambda_1 D - N)(\theta - \gamma) \frac{\alpha^2 V^2}{2} + \\ & \quad + 2(\alpha - M(\theta + \gamma))(\lambda_1 D - N)(\theta - \gamma) M^2 \theta^2 \gamma^2 \end{aligned} \quad (7)$$

получено неравенство

$$\begin{aligned} w^2(x, t) \leq & \frac{l}{\lambda_1 D - N} e^{-2\gamma t} \int_0^l \{ M(1 + \theta) \dot{w}_0^2 + \\ & (\eta_1^{-1} \lambda_1^{-1} (\alpha + M)\theta + D + \lambda_1^{-1} |N|) w_0''^2 \} dx, \end{aligned}$$

где λ_1, η_1 – наименьшие собственные значения краевых задач

$$\varphi'''' = -\lambda \varphi'', \quad \varphi'' = -\eta \varphi$$

с краевыми условиями (2) [15];

$$\dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0), \quad w_0'' = w''(x, 0).$$

Из этого неравенства следует

Теорема 1. Пусть выполнены условия (4)–(7). Тогда решения уравнения (1) будут асимптотически устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных \dot{w}_0, w_0'' , если $w(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (2).

Применение теоремы 1 состоит в отыскании постоянных величин $\theta > 0, \gamma > 0$, чтобы удовлетворялась система неравенств (4)–(7).

Для примера рассмотрим двустороннее обтекание ($\alpha_0 = 2$) алюминиевой пластины ($E = 7 \cdot 10^{10}, \rho_{pl} = 8480, \nu = 0,31$) толщиной $h = 0,01$ и длиной $l = 1$ потоком идеального газа ($\rho_0 = 1, a_0 = 331$) со скоростью $V = 400$. Тогда коэффициенты уравнения (1) принимают

$$\text{значения: } M = \rho_{pl} h = 84,8; \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} = 6453,5; \quad \alpha = \alpha_0 \rho_0 a_0 =$$

$= 662$. Рассмотрим случай шарнирно закрепленных концов пластины, тогда $\eta_1 = \lambda_1 = \pi^2/l^2 \approx 9,87$. Все значения приведены в системе СИ.

Найдем значения усилия N , при которых выполняются условия теоремы 1. Подставим найденные коэффициенты в систему неравенств (4) – (7).

$$N < 63696; \quad \theta \leq 7,8; \quad \theta - \gamma > 0; \quad \theta + \gamma < 7,8; \quad (8)$$

$$(662 - 84,8(\theta + \gamma))(63696 - N)(\theta - \gamma) > 1,753 \cdot 10^{10} + 7191 \cdot \theta^2 \gamma^2; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (662 - 84,8(\theta + \gamma))^2 (63696 - N)^2 (\theta - \gamma)^2 + 3,073 \cdot 10^{20} + \\ + 5,171 \cdot 10^7 \theta^4 \gamma^4 > 2,521 \cdot 10^{14} \theta^2 \gamma^2 + \\ + 3,506 \cdot 10^{10} (662 - 84,8(\theta + \gamma))(63696 - N)(\theta - \gamma) + \\ + 14382 (662 - 84,8(\theta + \gamma))(63696 - N)(\theta - \gamma) \theta^2 \gamma^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Неравенства (8) задают ограничения на значения параметров N, θ, γ , а неравенства (9)–(10) служат для определения усилия N при конкретных значениях θ, γ . Например, для точки $(7,7; 0,05)$ из треугольника решений на плоскости (θ, γ) неравенство (9) примет вид $N < -4,773 \cdot 10^8$, а неравенство (10) выполняется при любых N .

Замечание 1. В данном параграфе представлен пример построения функционала соответствующего экспоненциальному затуханию колебаний. Параметр γ отвечает за скорость затухания. Чем N меньше, тем γ можно взять больше, и тем самым решение $w(x, t)$ быстрее стремится к нулю при увеличении t . Например, для точки $(4; 3,7)$ из треугольника решений на плоскости (θ, γ) неравенство (9) примет вид $N < -6,464 \cdot 10^9$, а неравенство (10) выполняется при любых N .

Исследование устойчивости упругих элементов составных частей летательных аппаратов при дозвуковом обтекании. Рассмотрим в качестве примера плоскую задачу аэрогидроупругости о малых колебаниях, возникающих при бесциркуляционном обтекании тонкостенной конструкции – крыла с упругим закрылком (элероном).

Пусть на плоскости xOy , в которой происходят совместные колебания упругого закрылка, крылу соответствует на оси Ox отрезок $[a, b]$, а закрылку – отрезок $[b, c]$ (рисунок 2). Функции $f_{\pm}(x)$ определяют форму верхней (+) и нижней (–) недеформируемых частей профиля крыла.

В бесконечно удаленной точке скорость газа равна V и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox .

Введем обозначения: $w(x, t)$ – функция прогиба упругого закрылка; $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости возмущенного потока газа.

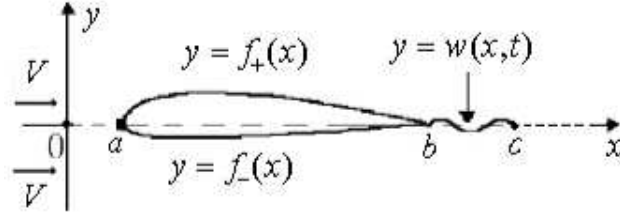


Рисунок 2 – Крыловой профиль

Предлагаемая математическая модель определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = \mathbb{R}^2 \setminus [a, c], \quad (11)$$

$$\varphi_y^\pm(x, 0, t) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \varphi_y(x, y, t) = \begin{cases} V f'_\pm(x), & x \in (a, b), \\ w_t(x, t) + V w_x(x, t), & x \in (b, c), \end{cases} \quad (12)$$

$$|\nabla\varphi|_\infty^2 \equiv (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2)_\infty = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} M(x) \ddot{w}(x, t) + (D(x) w''(x, t))'' + \beta_0(x) w(x, t) + \\ \beta_1(x) \dot{w}(x, t) + (\beta_2(x) \dot{w}''(x, t))'' = \rho(\varphi_t^+(x, 0, t) - \varphi_t^-(x, 0, t)) + \\ + \rho V(\varphi_x^+(x, 0, t) - \varphi_x^-(x, 0, t)), \quad x \in (b, c). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t ; штрих и точка – частные производные по x и t соответственно; ρ – плотность жидкости в однородном невозмущенном потоке; D, M – изгибная жесткость и погонная масса элемента (пластины); N – сжимающая (растягивающая) пластину сила; β_1, β_2 – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования; β_0 – коэффициент жесткости основания.

Используя методы теории функций комплексного переменного [16], решение задачи можно свести к исследованию интегро-дифференциального уравнения для неизвестной функции прогиба w закрылка:

$$\begin{aligned} M(x) \ddot{w}(x, t) + (D(x) w''(x, t))'' + \beta_0(x) w(x, t) + \beta_1(x) \dot{w}(x, t) + \\ + (\beta_2(x) \dot{w}''(x, t))'' = -\frac{\rho}{\pi} \int_b^c [\ddot{w}(\tau, t) + V \dot{w}'(\tau, t)] K(\tau, x) d\tau - \\ - \frac{V\rho}{\pi} \int_b^c [\dot{w}(\tau, t) + V w'(\tau, t)] \frac{\partial K(\tau, x)}{\partial x} d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \frac{V^2 \rho}{\pi} \int_a^b [f'_+(\tau) + f'_-(\tau)] G(\tau, x) d\tau, \quad x \in (b, c), \quad (15)$$

где

$$K(\tau, x) = 2 \ln \left| \frac{\sqrt{(x-a)(c-\tau)} + \sqrt{(\tau-a)(c-x)}}{\sqrt{(x-a)(c-\tau)} - \sqrt{(\tau-a)(c-x)}} \right|,$$

$$G(\tau, x) = \frac{\sqrt{(x-a)(c-x)} + \sqrt{(\tau-a)(c-\tau)}}{\sqrt{(x-a)(c-x)}(x-\tau)}, \quad \tau \neq x.$$

Если профиль крыла симметричный, т. е. $f_+(x) = -f_-(x)$, то получим однородную систему уравнений:

$$M(x) \ddot{w}(x, t) + (D(x) w''(x, t))'' + \beta_0(x) w(x, t) + \beta_1(x) \dot{w}(x, t) +$$

$$+ (\beta_2(x) \dot{w}''(x, t))'' = -\frac{\rho}{\pi} \int_b^c [\ddot{w}(\tau, t) + V \dot{w}'(\tau, t)] K(\tau, x) d\tau -$$

$$-\frac{V\rho}{\pi} \int_b^c [\dot{w}(\tau, t) + V w'(\tau, t)] \frac{\partial K(\tau, x)}{\partial x} d\tau. \quad (16)$$

Граничные условия на концах пластин при $x = b$ и $x = c$ имеют вид:

$$w(b, t) = 0, \quad w''(b, t) = \alpha w'(b, t), \quad w''(c, t) = 0, \quad w'''(c, t) = 0, \quad (17)$$

что соответствует упругому закреплению левого конца $x = b$ и свободному правому концу $x = c$. Число α – коэффициент жесткости упругой связи между крылом и элероном.

Получены достаточные условия устойчивости по Ляпунову нулевого решения интегро-дифференциального уравнения (16) по отношению к возмущениям начальных условий на основе исследования функционала

$$\Phi = \int_b^c \{M(x) \dot{w}^2 + D(x) w''^2 + \beta_0(x) w^2\} dx + \alpha D(b) w'^2(b, t) +$$

$$+ \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}(\tau, t) K(\tau, x) d\tau -$$

$$- \frac{\rho V^2}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c w'(x, t) w'(\tau, t) K(\tau, x) d\tau.$$

Пусть выполняются условия

$$\alpha \geq 0, \inf_x (\mu_1 \beta_2(x) + \beta_1(x)) \geq 0, V^2 < \frac{2\pi \alpha \inf_x D(x)}{(c-b) \rho K_0 (2 + \alpha(c-b))}, \quad (18)$$

где $K_0 = \sup_{x \in (b,c)} \int_b^c K(\tau, x) d\tau$. Тогда получим неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2\pi \inf_x D(x) - \rho K_0 V^2 (c-b)^2}{\pi (c-b)^2} - \frac{4 \inf_x D(x)}{(c-b)^2 (2 + \alpha(c-b))} \right) \frac{w^2(x, t)}{c-b} \leq \\ & \leq \int_b^c \left\{ \left(\sup_x M(x) + \frac{\rho K_0}{\pi} \right) \dot{w}^2(x, 0) + \right. \\ & \left. + \sup_x \left(D(x) + \frac{\beta_0(x)}{\mu_1} \right) w''^2(x, 0) \right\} dx + \alpha \sup_x \left(D(x) + \frac{\beta_0(x)}{\mu_1} \right) w'^2(b, 0), \end{aligned}$$

из которого следует

Теорема 2. Пусть выполнены условия (18). Тогда решение $w(x, t)$ уравнения (16) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $\dot{w}(x, 0)$, $w''(x, 0)$, $w'(b, 0)$, если $w(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (17).

Исследование устойчивости упругих элементов проточных каналов. Рассмотрим плоское течение идеальной сжимаемой жидкости в прямолинейном канале $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$ (рисунок 3).

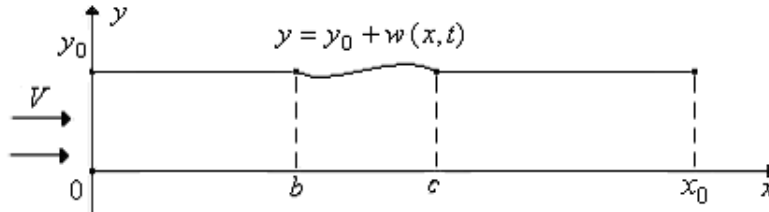


Рисунок 3 – Канал, стенка которого содержит деформируемый элемент

Скорость невозмущенного однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox . Упругой является часть стенки $y = y_0$ при $x \in [b, c]$.

Введем обозначения: $w(x, t)$ – функция деформации упругого элемента стенки канала; $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости возмущенного потока.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0, \quad (19)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (20)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (21)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (22)$$

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0, \quad (23)$$

$$L(w) = -\rho(\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0. \quad (24)$$

Дифференциальный оператор $L(w)$ задается выражением

$$\begin{aligned} L(w) \equiv & Dw''''(x, t) + \beta_2 \dot{w}''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + \\ & + Nw''(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t ; штрих и точка – частные производные по x и t соответственно; ρ – плотность жидкости в однородном невозмущенном потоке; D, M – изгибная жесткость и погонная масса элемента (пластины); N – сжимающая (растягивающая) пластину сила; β_1, β_2 – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования; β_0 – коэффициент жесткости основания; a – скорость звука в невозмущенном потоке жидкости ($a > V$).

Пусть граничные условия имеют вид (2). Таким образом, получили связанную задачу (19)–(25), (2) для двух неизвестных функций – прогиба упругого элемента стенки канала $w(x, t)$ и потенциала скорости жидкости (газа) $\varphi(x, y, t)$.

Исследование устойчивости нулевого решения $\varphi(x, y, t) \equiv 0, w(x, t) \equiv 0$ системы (19)–(25), (2) по Ляпунову проведено на основе исследования смешанного функционала

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_J (\varphi_t^2 + (a^2 - V^2)\varphi_x^2 + a^2\varphi_y^2) dx dy - \\ & - 2a^2V \int_b^c \varphi(x, y_0, t)w'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (M\dot{w}^2 + Dw''^2 - Nw'^2 + \beta_0w^2) dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть выполняются условия

$$\beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \lambda_1 D - N > 0, \quad V^2 < \frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{2a^2x_0^2}{y_0^2\pi^2} + \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{\left(a^2 + \frac{2a^2 x_0^2}{y_0^2 \pi^2} + \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} \right)^2 - \frac{8(\lambda_1 D - N) a^2}{\rho y_0}}, \quad (27)$$

где λ_1 – наименьшее собственное значение краевой задачи $\psi'''' = -\lambda \psi''$, $x \in (b, c)$ с краевыми условиями (2). Тогда справедливы неравенства

$$w^2(x, t) \leq \frac{\Delta_1 (c - b)}{\Delta_2 y_0} \Omega, \quad \iint_J \varphi^2(x, y, t) dx dy \leq \frac{d_{22} d_{33} - d_{23}^2}{\Delta_2} \Omega,$$

где

$$\Delta_1 = d_{11} d_{22} - d_{12}^2 = \frac{2(a^2 - V^2) \pi^2 a^2}{x_0^2 y_0^2} > 0, \quad \Delta_2 = d_{33} \Delta_2 - d_{23}^2 d_{11} > 0,$$

$$d_{11} = \frac{(a^2 - V^2) \pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2}, \quad d_{22} = d_{12} = \frac{2a^2}{y_0^2},$$

$$d_{23} = \frac{V}{y_0^2}, \quad d_{33} = \frac{a^2 (\lambda_1 D - N)}{\rho y_0},$$

$$\Omega = \iint_J (\varphi_{t0}^2 + (a^2 - V^2) \varphi_{x0}^2 + a^2 \varphi_{y0}^2) dx dy + a^2 \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \\ + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left(M \dot{w}_0^2 + \left(D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w_0''^2 \right) dx, \quad \varphi_{t0} = \varphi_t(x, y, 0),$$

$$\varphi_{x0} = \varphi_x(x, y, 0), \quad \varphi_{y0} = \varphi_y(x, y, 0), \quad \dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0), \quad w_0'' = w''(x, 0),$$

μ_1 – наименьшее собственное значение краевой задачи $\psi'''' = \mu \psi$, $x \in (b, c)$ с краевыми условиями (2).

Из полученных неравенств следует

Теорема 3. Пусть выполняются условия (27). Тогда решение $w(x, t)$ задачи (19)–(25), (2) устойчиво, а решение $\varphi(x, y, t)$ устойчиво в среднем, по отношению к возмущениям начальных данных φ_{t0} , φ_{x0} , φ_{y0} , $\varphi(x, y_0, 0)$, \dot{w}_0 , w_0'' .

Исследование устойчивости на основе численного эксперимента. Для всех описанных выше задач проведено исследование устойчивости на основе численного эксперимента. При этом, в отличие от условий, полученных на основе функционалов, которые являются только достаточными, можно получить параметры механических систем и области изменения этих параметров, соответствующие необходимым и достаточным условиям устойчивости.

Решения разрешающих уравнений строили на основе метода Галеркина, подчинив искомую функцию $w(x, t)$ краевым условиям. Задавались также начальные условия $w(x, 0) = f_1(x)$, $\dot{w}(x, 0) = f_2(x)$, согласованные с краевыми условиями. Согласно методу Галеркина решение уравнений отыскивалось в виде $w(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) g_k(x)$, где $g_k(x)$ – базисные функции, подобранные так, чтобы выполнялись заданные краевые условия, а уравнения для функций $a_k(t)$ определялись из условия ортогональности невязки уравнения ко всем базисным функциям.

Проведенные численные эксперименты показали удовлетворительное согласование необходимых и достаточных условий, полученных численно, с достаточными условиями, полученными аналитически на основе исследования функционалов.

Список литературы

- [1] Болотин В.В., Гришко А.А. *Устойчивость и послекритическое поведение аэроупругих систем с учетом дополнительного демпфирования* // Изв. АН. Мех. тверд. тела. РАН. 2003. №5. С. 164–174.
- [2] Веденеев В.В. *Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа* // Изв. РАН. МЖГ. 2005. №5. С. 155–169.
- [3] Денисова И.В., Индейцев Д.А., Клименко А.В. *К вопросу об устойчивости вязкоупругой пластины в потоке жидкости* // Прикл. мех. и техн. физ. 2006. 47. №4. С. 66–74.
- [4] Кийко И.А., Показеев В.В. *К постановке задачи о колебаниях и устойчивости полосы в сверхзвуковом потоке газа* // Механика жидкости и газа. 2009. №1. С. 159–166.
- [5] Могилевич Л.И., Попова А.А. *Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту* // Наука и техн. транс. 2007. №2. С. 69–72.
- [6] Анкилов А.В., Вельмисов П.А. *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*. Ульяновск: УЛГТУ, 2009. 220 с.
- [7] Анкилов А.В., Вельмисов П.А. *Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании* // Вестник Саратовского государственного технического университета. Саратов. 2011. №3(57), вып. 1. С. 59–67.
- [8] Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Семенова Е.П. *О решениях интегро-дифференциальных уравнений в задаче динамики одной аэроупругой системы типа «тандем»* // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физ.-мат. науки. Самара. 2011. №2(23). С. 266–271.
- [9] Анкилов А.В., Вельмисов П.А. *Математическое моделирование динамики и устойчивости упругих элементов крыла* // Вестник Саратовского государственного технического университета. Саратов. 2009. №1(37), вып. 1. С. 7–16.
- [10] Ankilov A.V., Velmisov P.A. *Stability of elastic elements of wing profile with time delay of bases reactions* // ROMAI Journal. 2009. Vol. 5, no. 2. P. 181–192.
- [11] Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Покладова Ю.В. *Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления»*. Ульяновск: УЛГТУ, 2008. 188 с.

- [12] Анкилов А.В., Вельмисов П.А. *Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов*. Ульяновск: УлГТУ, 2000. 115 с.
- [13] Анкилов А.В., Вельмисов П.А. *Исследование динамической устойчивости упругих элементов стенок канала* // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физ.-мат. науки. Самара. 2011. №1(22). С. 179–185.
- [14] Ankilov A.V., Velmisov P.A. *Stability of the solutions of one class of aerohydroelasticity problems* // J. "Applications of Mathematics in Engineering and Economics". American Institute of Physics, USA, 2008. P. 414–426.
- [15] Коллатц Л. *Задачи на собственные значения*. М.: Наука, 1968. 503 с.
- [16] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1973. 736 с.