УДК 517.925.41

Д.Н. ЧЕРГИНЕЦ

ПРОБЛЕМА РАЗЛИЧЕНИЯ ЦЕНТРА И ФОКУСА ДЛЯ A_3-СИСТЕМ В СЛУЧАЕ ПРОСТОГО СЕДЛА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

This paper is devoted to the center-focus problem for systems with a complicated singular point. Using the method of A.P. Sadovskii, necessary center conditions for holomorphic system $dx/dt = -x^2y - y^5c(y)$, $dy/dt=y^4a(y)+xy^3b(y) + Bx^2y + x^2y^3g(y^2) + Cx^3$ have been found.

Будем рассматривать вещественную аналитическую в окрестности нуля систему дифференциальных уравнений, полученную в [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x^2y - y^4\sum_{k=1}^{\infty} c_k y^k, \\ \dfrac{dy}{dt} = y^4\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k + xy^3\sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k + x^2 y\left(B + \sum_{k=1}^{\infty} g_k y^{2k}\right) + Cx^3. \end{cases} \tag{1}$$

Особую точку типа «фокуса» или «центра» будем называть *монодромной*. Условиями монодромности особой точки $O(0,0)$ системы (1) являются $c_1 - a_0^2 > 0$, $4C-B^2>0$. Цель нашего исследования - найти необходимые условия центра при помощи метода, разработанного в [2]. Анализируемая система принадлежит классу A_3 систем (правая часть которых имеет аналитическое разложение начиная с третьего порядка) с одной исключительной прямой $x = 0$. В полярных координатах система имеет вид

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{rH(\varphi)\cos^2\varphi + r^2 g(r,\varphi)}{\Phi(\varphi)\cos^2\varphi + rf(r,\varphi)}, \tag{2}$$

где $\Phi(\varphi)=C\cos^2\varphi+B\cos\varphi\sin\varphi+\sin^2\varphi$, $H(\varphi)=\sin\varphi((C-1)\cos\varphi+B\sin\varphi)$. Докажем, что функция последования уравнения (2) имеет асимптотическое представление

$$r(2\pi)=\sum_{n=1}^{4} c^n \sum_{m=0}^{n-1} k_{n,m} \ln^m c + o(c^4) \text{ при } c\to 0.$$

Сделаем замену

$$r = r_1\cos^2\varphi \quad (0\le\varphi\le\varphi_0<\pi/2).$$

Преобразованное ура

$$\frac{dr_1}{d\varphi} = (2\ \operatorname{tg}\varphi + f_0(\varphi))r_1 + \frac{1}{\cos\varphi}\sum_{k=2}^{\infty} R_{1,k}(\varphi) r_1^k, \tag{3}$$

где $f_0(\varphi)=H(\varphi)/\Phi(\varphi)$, функции $R_{1,k}(\varphi)$ непрерывны на $\mathbb{R}$, и первые две имеют вид:

$$R_{1,2}(\varphi)=\cos\varphi\sin^4\varphi(b_0\cos\varphi+a_0\sin\varphi)/(C\cos^2\varphi+B\cos\varphi\sin\varphi+\sin^2\varphi)^2,$$

$$\begin{gathered} R_{1,3}(\varphi)=\cos^2\varphi\sin^4\varphi[Cg_1\cos^5\varphi+(Cb_1-C^2c_1+Bg_1)\cos^4\varphi\sin\varphi + \\ +(Bb_1+C(a_1-2Bc_1)+g_1)\cos^3\varphi\sin^2\varphi-(b_0^2-Ba_1-b_1+c_1(B^2+C))\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \\ +(a_1-2a_0b_0-Bc_1)\cos\varphi\sin^4\varphi-a_0^2\sin^5\varphi]/(C\cos^2\varphi+B\cos\varphi\sin\varphi+\sin^2\varphi)^3. \end{gathered}$$

Решение уравнения (3), удовлетворяющее условию $r_1(0)=r(0)=c$, найдем из интеграла

$$\cos^2\varphi\sum_{k=1}^{\infty} v_{1,k}(\varphi)F_{1,0}^{-k}(\varphi)r_1^k = c. \tag{4}$$

Здесь $F_{1,0}(\varphi)=\exp\left(\int_0^{\varphi}\frac{\sin\tau((C-1)\cos\tau+B\sin\tau)}{C\cos^2\tau+B\cos\tau\sin\tau+\sin^2\tau}d\tau\right)$, $v_{1,1}(\varphi)=1$,

$$v_{1,k}(\varphi)=\cos^{2(k-1)}\varphi\int\limits_1^{\cos\varphi}S_k(u)\,du,\quad k=\overline{2,+\infty},$$

$$S_k(u)=\frac{1}{u^{2k-1}\sqrt{1-u^2}}\sum_{i=2}^{k}(k-i+1)R_{1,i}(\arccos u)F_{1,0}^{i-1}(\arccos u)v_{1,k-i+1}(\arccos u).$$

$$v_{1,2}(\varphi)=\cos^2\varphi\int\limits_1^{\cos\varphi}\frac{R_{1,2}(\arccos u)F_{1,0}(\arccos u)}{u^3\sqrt{1-u^2}}du=\cos^2\varphi(V_{1,2}(\cos\varphi)-V_{1,2}(1)),$$

где $V_{1,2}(u)=F_{1,0}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)(-a_0u^{-1}-(3Ba_0-b_0)\ln u)+\int\limits_0^u S_{2,0}(\tau)d\tau,$

$$S_{2,0}(u)=S_2(u)-F_{1,0}\left(\frac{\pi}{2}\right)(a_0u^{-2}-(3Ba_0-b_0)u^{-1})=O(1)\text{ при }u\to 0.$$

$$v_{1,3}(\varphi)=\cos^4\varphi(V_{1,3}(\cos\varphi)-V_{1,3}(1)),$$

$$V_{1,3}(u)=\frac{-1}{2}S_{3,-3,0}u^{-2}-S_{3,-2,1}u^{-1}(\ln u+1)-S_{3,-2,0}u^{-1}+$$

$$+\frac{1}{2}S_{3,-1,1}\ln^2u+S_{3,-1,0}\ln u+\int\limits_0^u S_{3,0}(\tau)d\tau,$$

$$S_3(u)=\frac{1}{u^5\sqrt{1-u^2}}[2R_{1,2}(\arccos u)F_{1,0}(\arccos u)v_{1,2}(\arccos u)+R_{1,3}(\arccos u)F_{1,0}^2(\arccos)]=$$

$$=S_{3,-3,0}u^{-3}+S_{3,-2,1}u^{-2}\ln u+S_{3,-2,0}u^{-2}+S_{3,-1,1}u^{-1}\ln u+S_{3,-1,0}u^{-1}+S_{3,0}(u),$$

$$S_{3,0}(u)=O(\ln u)\text{ при }u\to 0.$$

$$v_{1,4}(\varphi)=\cos^6\varphi(V_{1,4}(\cos\varphi)-V_{1,4}(1)),$$

$$V_{1,4}(u)=\sum_{n=-4}^{-2}\frac{S_{4,n,0}}{n+1}u^{n+1}+\sum_{n=-3}^{-2}\frac{S_{4,n,1}}{(n+1)^2}u^{n+1}((n+1)\ln u-1)-$$

$$-S_{4,-2,2}u^{-1}(2+2\ln u+\ln^2u)+\sum_{m=0}^{2}\frac{S_{4,-1,m}}{m+1}\ln^{m+1}u+\int\limits_0^u S_{4,0}(\tau)d\tau,$$

$$S_4(u)=\sum_{n=-4}^{-1}S_{4,n,0}u^n+\sum_{n=-3}^{-1}S_{4,n,1}u^n\ln u+\sum_{n=-2}^{-1}S_{4,n,2}u^n\ln^2u+S_{4,0}(u),$$

$$S_{4,0}(u)=O(\ln^2u)\text{ при }u\to 0.$$

Из интеграла (4) методом неопределенных коэффициентов с точностью до c находим

$$r_1(\varphi_0)=F_{1,0}(\varphi_0)/\cos^2\varphi_0[c-c^2v_{1,2}(\varphi_0)/\cos^2\varphi_0+c^3\{2v_{1,2}^2(\varphi_0)-v_{1,3}(\varphi_0)\}/\cos^4\varphi_0+$$

$$+c^4\{-5v_{1,2}^3(\varphi_0)+5v_{1,2}(\varphi_0)v_{1,3}(\varphi_0)-v_{1,4}(\varphi_0)\}/\cos^6\varphi_0]+o(c^4).$$

Преобразуем далее уравнение (3) для $\varphi\in[\varphi_0,\pi/2)$ при помощи замены

$$r_1=zF_{1,1}(\varphi),\ u=\cos\varphi,\quad F_{1,1}(\varphi)=\exp\left(\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}f_0(\tau)d\tau\right).$$

В результате получим уравнение

$$u\frac{dz}{du}=-2z-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\sum_{k=2}^{\infty}R_{1,k}(\arccos u)F_{1,1}^{k-1}(\arccos u)z^k.\qquad(5)$$

Следуя Дюлаку [3], подберем такую аналитическую замену

$$v=f(u,z)+g(u,z),\quad f(u,z)=z+\sum_{k=2}^{4}f_k(u)z^k,\quad g(u,z)=\sum_{k=0}^{6}g_k(z)u^k,$$

что уравнение (5) сведется к

$$u\frac{dv}{du}=v\left(-2+\sum_{k=1}^{3}C_k u^{2k}v^k+u^7v^4\xi(u,v)\right), \qquad (6)$$

где

$$C_1=F_{1,1}\left(\frac{\pi}{2}\right)(3Ba_0-b_0),$$

$$C_2=F_{1,1}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)(b_0^2+2B(2a_1-5a_0b_0)-b_1+B^2(15a_0^2-4c_1)+C(-4a_0^2+c_1)),$$

$$C_3=\frac{1}{4}F_{1,1}^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\{-6a_0^2b_0-4b_0^3+8b_0b_1-4b_2+4B^3(120a_0^3-73a_0c_1)+B((18-211C)a_0^3+$$
$$+20(a_2-3a_1b_0)+8a_0(14b_0^2-4b_1+19Cc_1))+C(-34a_0a_1+79a_0^2b_0-22b_0c_1+4c_2)-$$
$$-4B^2(-38a_0a_1+114a_0^2b_0-30b_0c_1+5c_2)+4a_0g_1\},$$

$\xi(u, v)$ - аналитическая в нуле функция. Решение уравнения (6) будем искать в виде интеграла

$$u^2v\left(1+\sum_{k=1}^{3}u^{2k}v^kP_k\left(\ln\frac{u}{u_0}\right)+u^7v^4\eta(u,v)\right)=u_0^2v(u_0). \qquad (7)$$

Здесь $u_0=\cos\varphi_0$, $\eta(u, v)$ - аналитическая в нуле функция, причем $\eta(u_0, v)=0$,

$$P_1\left(\ln\frac{u}{u_0}\right)=-C_1\ln\frac{u}{u_0},\qquad P_2\left(\ln\frac{u}{u_0}\right)=C_1^2\ln^2\frac{u}{u_0}-C_2\ln\frac{u}{u_0},$$

$$P_3\left(\ln\frac{u}{u_0}\right)=-C_1^3\ln^3\frac{u}{u_0}+\frac{5}{2}C_1C_2\ln^2\frac{u}{u_0}-C_3\ln\frac{u}{u_0};$$

так как функция $g(u, z)$ имеет множитель z_5, то $v(u_0)=f(u_0, z(u_0))$ с точностью до $c4$, $z(u_0)=(\varphi_0)$,

$$f_2(u)=u^2(C_1\ln u+F_{1,1}(0)V_{1,2}(u)),$$

$$f_3(u)=u^4[C_2\ln u+C_1^2\ln^2u+2C_1F_{1,1}(0)\ln u\, V_{1,2}(u)+F_{1,1}^2(0)(V_{1,3}(u)+2V_{1,2}(1)V_{1,2}(u))],$$

$$f_4(u)=u^6[C_3\ln u+\frac{5}{2}C_1C_2\ln^2u+C_1^3\ln^3u+3F_{1,1}(0)(C_1^2\ln^2u+C_2\ln u)V_{1,2}(u)+$$
$$+F_{1,1}^2(0)\{C_1\ln u(2V_{1,3}(u)+V_{1,2}^2(u)+4V_{1,2}(1)V_{1,2}(u))\}+F_{1,1}^3(u)\{V_{1,4}(u)+$$
$$+2V_{1,2}(1)V_{1,3}(u)+V_{1,2}(u)(4V_{1,2}^2(1)+3V_{1,3}(1))+V_{1,2}(1)(V_{1,2}^2(u)-$$
$$-a_0F_{1,0}\left(\frac{\pi}{2}\right)(6Bb_0-a_0(1+12B^2-5C)))\}].$$

При помощи метода последовательных приближений из интеграла (7) с точностью до $c^{4-2\beta}$ найдем

$$v(c^\beta)=F_{1,0}(\varphi_0)(c^{1-2\beta}+(\beta F_{1,0}\left(\frac{\pi}{2}\right)(3Ba_0-b_0)\ln c+V_{1,2}(1))\,c^{2-2\beta}+\ldots+o(c^{4-2\beta}))$$
$$\left(\frac{3}{10}\le\beta\le\frac{4}{10}\right).$$

Выполнив обратные преобразования, найдем

$$r(\arccos c^\beta)=F_{1,0}\left(\frac{\pi}{2}\right)[c-Bc^{1+\beta}+\frac{1}{2}(1+2B^2-C)c^{1+2\beta}-B(1+B^2-\frac{7}{6}C)c^{1+3\beta}+$$
$$+a_0F_{1,0}\left(\frac{\pi}{2}\right)c^{2-\beta}+(\beta F_{1,0}\left(\frac{\pi}{2}\right)(3Ba_0-b_0)\ln c-Ba_0F_{1,0}\left(\frac{\pi}{2}\right)+V_{1,2}(1))c^2+\ldots+o(c^4)].$$

Перейдем к рассмотрению решения в окрестности исключительной прямой. Произведем замену в уравнении (2)

$$r=\rho\sin\theta,\quad \cos\varphi=\rho\cos\theta,\quad \varphi\in\left[\arccos c^{\beta},\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$\frac{d\rho}{d\theta}=(-\cot\theta+\psi(\theta))\rho+\frac{1}{\sin\theta}\sum_{k=2}^{\infty}G_{1,k}(\theta)\rho^{k}.$$

Здесь $\psi(\theta)=\dfrac{a_0}{\cos^2\theta+a_0\sin 2\theta+c_1\sin^2\theta}$,

$$G_{1,2}(\theta)=\{B\cos^4\theta+b_0\cos^3\theta\sin\theta+(a_1+Bc_1)\cos^2\theta\sin^2\theta+$$
$$+b_0c_1\cos\theta\sin^3\theta+(a_1c_1-a_0c_2)\sin^4\theta\}/(\cos^2\theta+a_0\sin 2\theta+c_1\sin^2\theta)^2,$$
$$G_{1,3}(\theta)=-[(1+2B^2-C)\cos^7\theta+(4a_0-2Ca_0+4Bb_0)\cos^6\theta\sin\theta+$$
$$+(4a_0^2+4Ba_1+2b_0^2-b_1+3c_1+2B^2c_1-2Cc_1)\cos^5\theta\sin^2\theta-$$
$$-(a_2-4a_1b_0+2a_0b_1-6a_0c_1+2Ca_0c_1-4Bb_0c_1-Bc_2)\cos^4\theta\sin^3\theta+$$
$$+(2a_1^2-2a_0a_2+4Ba_1c_1+2b_0^2c_1-2b_1c_1+3c_1^2-Cc_1^2-2Ba_0c_2+b_0c_2)\cos^3\theta\sin^4\theta-$$
$$-(2a_2c_1-4a_1b_0c_1+2a_0b_1c_1-2a_0c_1^2-a_1c_2+2a_0b_0c_2-Bc_1c_2-a_0c_3)\cos^2\theta\sin^5\theta+$$
$$+(2a_1^2c_1-2a_0a_2c_1-b_1c_1^2+c_1^3-2a_0a_1c_2+b_0c_1c_2+2a_0^2c_3)\cos\theta\sin^6\theta+$$
$$+(-a_2c_1^2+a_1c_1c_2-a_0c_2^2+a_0c_1c_3)\sin^7\theta]/(\cos^2\theta+a_0\sin 2\theta+c_1\sin^2\theta)^3.$$

Функция $G_{1,4}(\theta)$ в связи с громоздкостью не приводится.

Имеем уравнение, аналогичное (3). Производя преобразования, получим интеграл

$$u_1v_1\left(1+\sum_{k=1}^{3}u_1^kv_1^kP_{1,k}\left(\ln\frac{u_1}{u_{1,0}}\right)+u_1^4v_1^4\eta_1(u_1,v_1)\right)=u_{1,0}v_1(u_{1,0}),\qquad(8)$$

где $z_1=\rho F_{1,3}(\theta)$, $u_1=\sin\theta$, $v_1=f_1(u_1,z_1)+g_1(u_1,z_1)$, $F_{1,3}(\theta)=\exp\left(\int_{\theta_0}^{\theta}\psi(\tau)d\tau\right)$.

Для $\varphi=\arccos c^{\beta}$ последовательно найдем ρ, θ, z_1, u_1, v_1, значения u_1 и v_1 подставим в левую часть интеграла (8), которая, таким образом, вычислена с точностью до c. Правая часть (8) зависит от $r\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Методом последовательных приближений с точностью до c находим

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{4}c^n\sum_{m=0}^{n-1}k_{1,n,m}\ln^m c+o(c^4)=\frac{F_{1,0}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F_{1,2}(0)}(c+c^2[V_{1,2}(1)+$$
$$+F_{1,0}\left(\frac{\pi}{2}\right)\{(3Ba_0-b_0)\ln\left(cF_{1,0}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-F_{1,2}^{-1}(0)W_{1,2}(1)\}]+\ldots+o(c^4)).\qquad(9)$$

Здесь $F_{1,2}(\theta)=\exp\left(\int_{\pi/2}^{\theta}\frac{a_0}{\cos^2\tau+a_0\sin 2\tau+c_1\sin^2\tau}d\tau\right)$,

$$W_{1,2}(u)=F_{1,2}(0)[Bu^{-1}+(3Ba_0-b_0)\ln u]+\int_0^u L_{2,0}(\tau)d\tau,\qquad(10)$$
$$L_{2,0}(u)=L_2(u)-F_{1,2}(0)[-Bu^{-2}+(3Ba_0-b_0)u^{-1}]=O(1)\text{ при }u\to 0,$$
$$L_2(u)=\frac{-1}{u^2\sqrt{1-u^2}}F_{1,2}(\arcsin u)G_{1,2}(\arcsin u).$$

$$W_{1,3}(u)=\frac{-1}{2}L_{3,-3,0}u^{-2}-L_{3,-2,0}u^{-1}+L_{3,-1,0}\ln u+\frac{1}{2}L_{3,-1,1}\ln^2u+\int_0^u L_{3,0}(\tau)d\tau,$$

$$L_3(u)=\frac{-1}{u^3\sqrt{1-u^2}}[2F_{1,2}(\arcsin u)G_{1,2}(\arcsin u)u(W_{1,2}(u)-W_{1,2}(1))+$$
$$+F_{1,2}^2(\arcsin u)\,G_{1,3}(\arcsin u)]=L_{3,-3,0}u^{-3}+L_{3,-2,0}u^{-2}+L_{3,-1,0}u^{-1}+$$
$$+L_{3,-1,1}u^{-1}\ln u+L_{3,0}(u),\quad L_{3,0}(u)=O(\ln u)\text{ при } u\to 0.$$

$$W_{1,4}(u)=\sum_{n=-4}^{-2}\frac{L_{4,n,0}}{n+1}u^{n+1}-L_{4,-2,1}u^{-1}(\ln u+1)+\frac{1}{2}L_{4,-1,1}\ln^2u+L_{4,-1,0}\ln u+\int_0^u L_{4,0}(\tau)d\tau,$$

$$L_4(u)=\frac{-1}{u^4\sqrt{1-u^2}}[3F_{1,2}(\arcsin u)G_{1,2}(\arcsin u)u^2(W_{1,3}(u)-W_{1,3}(1))+$$
$$+2F_{1,2}^2(\arcsin u)\,G_{1,3}(\arcsin u)u(W_{1,2}(u)-W_{1,2}(1))+$$
$$+F_{1,2}^3(\arcsin u)\,G_{1,4}(\arcsin u)]=\sum_{n=-4}^{-1}L_{4,n,0}u^n+L_{4,-2,1}u^{-2}\ln u+$$
$$+L_{4,-1,1}u^{-1}\ln u+L_{4,0}(u),\quad L_{4,0}(u)=O(\ln^2u)\text{ при } u\to 0.$$

Найдем зависимость $r(\pi)$ от $r(0)$. Для этого в системе (1) сделаем замену $x=-x,\ t=-t$. Преобразованное уравнение будет отличаться от исходного тем, что коэффициенты

$$a_{k-1},\ B,\ g_k,\qquad k\in\mathbb{N}, \tag{11}$$

изменятся на противоположные. Поэтому, заменив в (9) коэффициенты (11) на противоположные, получим зависимость $r\left(\frac{\pi}{2}\right)$ от $r(\pi)$. Обращая ряд и учитывая (9), получим зависимость $r(\pi)$ от $r(0)$ в виде асимптотического представления

$$r(\pi)=\sum_{n=1}^{4}c^n\sum_{m=0}^{n-1}k_{2,n,m}\ln^m c+o(c^4)=\frac{F_{1,0}\left(\frac{\pi}{2}\right)F_{2,2}(0)}{F_{2,0}\left(\frac{\pi}{2}\right)F_{1,2}(0)}c+\ldots+o(c^4), \tag{12}$$

где функции $F_{2,0}(\varphi)$, $F_{2,2}(\theta)$, $V_{2,k}(u)$, $W_{2,k}(u)$ $(k=2,3,4)$ получаются из соответствующих функций $F_{1,0}(\varphi)$, $F_{1,2}(\theta)$, $V_{1,k}(u)$, $W_{1,k}(u)$ $(k=2,3,4)$ путем замены коэффициентов (11) на противоположные.

Найдем функцию последования. Для этого в системе (1) сделаем замену $y=-y,\ t=-t$. Преобразованное уравнение будет отличаться от исходного тем, что коэффициенты

$$a_{2k-1},\ B,\ g_k,\ b_{2(k-1)},\ c_{2k},\qquad k\in\mathbb{N}, \tag{13}$$

изменятся на противоположные. Поэтому, заменив в (12) коэффициенты (13) на противоположные, получим зависимость $r(\pi)$ от $r(2\pi)$. Обращая ряд и учитывая (12), получим зависимость $r(2\pi)$ от $r(0)$ в виде асимптотического представления

$$r(2\pi)=\sum_{n=1}^{4}c^n\sum_{m=0}^{n-1}k_{n,m}\ln^m c+o(c^4)=\frac{F_{1,0}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F_{2,0}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}c+\ldots+o(c^4)\ \text{при } c\to 0.$$

Коэффициент $k_{1,0}$ равен единице лишь в случае

$$\int_0^{\pi/2}\frac{2B\sin^2\varphi}{(C\cos^2\varphi-\frac{B}{2}\sin 2\varphi+\sin^2\varphi)(C\cos^2\varphi+\frac{B}{2}\sin 2\varphi+\sin^2\varphi)}d\varphi=0,$$

что может быть тогда и только тогда, когда $B = 0$. Таким образом, получено первое необходимое условие центра особой точки $O(0, 0)$ системы (1). Следующий коэффициент при функции $c_2 \ln c$ с учетом $B = 0$ имеет вид

$$k_{2,1} = 2b_0C^{1/2}(F_{2,2}(0) - F_{1,2}(0))/F_{1,2}(0).$$

Далее возможны два варианта.

а) $F_{2,2}(0) = F_{1,2}(0)$, что возможно лишь при $a_0 = 0$. В дальнейшем значения коэффициентов будем приводить с учетом выполнения уже полученных условий центра.

$$k_{2,0} = 2C^{1/2}(W_{2,2}(1) - W_{1,2}(1)) = 2\pi a_1(C/c_1)^{1/2}.$$

Коэффициент $k_{2,0}$ равен нулю тогда и только тогда, когда $a_1 = 0$.

$$k_{3,2} = 0, \quad k_{3,1} = 0, \quad k_{3,0} = 2(V_{1,3}(1) - V_{2,3}(1)) = \frac{3}{4}\pi g_1C^{1/2}.$$

Необходимым и достаточным условием равенства нулю коэффициента $k_{3,0}$ является условие $g_1 = 0$.

$$k_{4,3} = 0, k_{4,2} = 0, \quad k_{4,1} = 2C^{3/2}(W_{1,3}(1) - W_{2,3}(1)) = -2\pi a_2C^{3/2}/c_1^{1/2}.$$

Имеем очередное необходимое условие центра $a_2 = 0$.

$$k_{4,0} = 2C^{3/2}(W_{2,4}(1) - W_{1,4}(1)) = 2\pi a_3C^{3/2}/c_1^{1/2}.$$

Последнее условие для этого случая $a_2 = 0$.

б) $b_0 = 0$, $a_0 \neq 0$.

$$k_{2,0} = 2C^{1/2}(W_{2,2}(1) - W_{1,2}(1))/F_{1,2}(0).$$

Коэффициент $k_{2,0}$ равен нулю тогда и только тогда, когда $W_{2,2}(1) = W_{1,2}(1)$.

$$k_{3,2} = 0, k_{3,1} = 0,$$

$$k_{3,0} = \left(1 + \frac{F_{2,2}^2(0)}{F_{1,2}^2(0)}\right)(V_{1,3}(1) - V_{2,3}(1)) = -\frac{3}{8}\pi C^{1/2}\left(1 + \frac{F_{2,2}^2(0)}{F_{1,2}^2(0)}\right)(5Ca_1 - g_1).$$

Вычи $k_{4,3} = 0, \quad k_{4,2} = 0, \quad k_{4,1} = C^{3/2}(7Ca_0a_1 + 2b_2 - 2Cc_2)\left(\frac{F_{2,2}^3(0)}{F_{1,2}^3(0)} - 1\right).$

$$k_{4,0} = C^{3/2}[a_0a_1(5 - \frac{21}{2}C)\left(1 - \frac{F_{2,2}^3(0)}{F_{1,2}^3(0)}\right) +$$

Коэффици

$$+ 2F_{1,2}^{-3}(0)\,\{W_{2,4}(1) - W_{1,4}(1) + 2W_{1,2}(1)(W_{2,3}(1) - W_{1,3}(1))\}].$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Для того чтобы особая точка O(0,* 0) *системы* (1) *являлась центром, необходимо, чтобы выполнялась одна из двух серий условий:*

1) $B = 0$, $a_0 = 0$, я, = 0, g, = 0, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$;

2) $B = 0$, $b_0 = 0$,

$$W_{1,2}(1) - W_{2,2}(1) = \int_0^1\left(\frac{F_{1,2}(\arcsin u)(a_1 + u^2(a_1(c_1 - 1) - a_0c_2))}{\sqrt{1-u^2}(1 + 2a_0u\sqrt{1-u^2} + u^2(c_1 - 1))} +\right.$$

$$\left.+ \frac{F_{2,2}(\arcsin u)(a_1 + u^2(a_1(c_1 - 1) - a_0c_2))}{\sqrt{1-u^2}(1 - 2a_0u\sqrt{1-u^2} + u^2(c_1 - 1))}\right)du = 0, \; g_1 - 5Ca_1 = 0,$$

$$7Ca_0a_1 + 2b_2 - 2Cc_2 = 0, \; C^{3/2}[a_0a_1(5 - \tfrac{21}{2}C)\left(1 - \frac{F_{2,2}^3(0)}{F_{1,2}^3(0)}\right) +$$

$$+ 2F_{1,2}^{-3}(0)\,\{W_{2,4}(1) - W_{1,4}(1) + 2W_{1,2}(1)(W_{2,3}(1) - W_{1,3}(1))\}] = 0,$$

где $F_{i,2}(\theta) = \exp\left(\int\limits_{\pi/2}^{\theta} \frac{(-1)^{i+1} a_0}{\cos^2\tau + (-1)^{i+1} a_0 \sin 2\tau + c_1 \sin^2\tau} d\tau \right)$, функции $W_{1,k}(u)$ вычисляются по формулам (10), функции $W_{i,k}(u)$ получаются из соответствующих функций путем замены коэффициентов (11) на противоположные, $k = 2,3,4$, $i=1,2$.

1. Садовский А.П. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1743.
2. Там же. 1989. Т. 25. № 5. С. 790.
3. Дюлак Г. О предельных циклах. М, 1980.

Поступила в редакцию 08.06.05.

Дмитрий Николаевич Чергинец - аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений А.П. Садовский.

$$I_u = s_0\left(\mathbf{a}_u^T \cdot \mathbf{b}_u + c_u\right) + s = 3\begin{bmatrix} l & m & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + s = 3\cdot l\cdot 1 + 3\cdot m\cdot 2 + 3\cdot n\cdot 4 + s, \quad (1)$$

$$l = \overline{0,\ 1},\ m = \overline{0,\ 1},\ n = \overline{0,\ 1},\ s = \overline{1,\ 3},$$

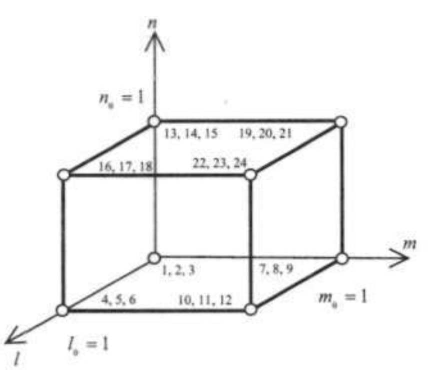

Рис. 1

$\mathbf{a}_u^T$

$\mathbf{b}_u$

$3\cdot l\cdot 1,\ 3\cdot m\cdot 2,\ 3\cdot n\cdot 4$