Вестник БГУ. Сер. 1. 2016. № 1. С. 90–95

УДК 336:51

УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ АРБИТРАЖА В МОДЕЛЯХ ДОХОДНОСТИ НЕЛЬСОНА, СИГЕЛЯ И СВЕНССОНА

Г. А. МЕДВЕДЕВ [1]

[1] *Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь*

Показано, что требование выполнения условий отсутствия арбитража уточняет модель Нельсона – Сигеля – Свенссона, что придает ее коэффициентам явный экономический смысл: свободный коэффициент должен быть функцией срока до погашения, а остальные коэффициенты должны зависеть от переменных состояния рынка, которые, в свою очередь, являются выборочными значениями случайных процессов в момент времени, для которого конструируется временная структура. Показано, что сама модель – представитель семейства аффинных моделей доходности и порождается двумерной моделью краткосрочной процентной ставки для модели Нельсона – Сигеля или четырехмерной моделью краткосрочной процентной ставки для модели Нельсона – Сигеля – Свенссона. Получены условия отсутствия арбитража для этих моделей, которые для трехфакторной модели Нельсона – Сигеля – Свенссона неосуществимы.

Ключевые слова: временная структура; кривая доходности; факторная модель; аффинные безарбитражные модели; модели доходности Нельсона – Сигеля.

THE NO-ARBITRAGE CONDITIONS IN YIELD MODELS NELSON, SIEGEL, AND SVENSSON

G. A. MEDVEDEV [a]

[a] *Belarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus*

It is shown that the performance requirement of the no-arbitrage conditions specifies the Nelson – Siegel – Svensson model in the sense that it gives the coefficients of this model obvious economic sense: free coefficient should be a function of time to maturity, and the other factors have to depend on the market state variables, which, in turn, are sampled value of stochastic processes at the time, for which constructed the term structure. It is shown that the model is representative of the family of affine yield models and generated two-dimensional model of short-term interest rates for the model of Nelson – Siegel or four-dimensional model of short-term interest rates for the Nelson – Siegel – Svensson model. The no arbitrage conditions for these models are found and shown that these conditions for three-factor of NSS-model are unrealizable.

Key words: term structure; yield curve; factor model; affine no-arbitrage models; Nelson – Siegel yield model.

Временная структура процентных ставок доходности – одна из наиболее востребованных характеристик финансовых активов. При математическом моделировании временной структуры чаще всего используются безарбитражные аффинные модели, поскольку они подразумевают возможность получения решений в аналитическом виде. Для получения модели временной структуры обычно исходят из описания того, как эволюционирует состояние финансового рынка. Чаще всего принимается, что состояние рынка – это случайный процесс диффузионного типа.

Образец цитирования:

Медведев Г. А. Условия отсутствия арбитража в моделях доходности Нельсона, Сигеля и Свенссона // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2016. № 1. С. 90–95.

For citation:

Medvedev G. A. The no-arbitrage conditions in yield models Nelson, Siegel, and Svensson. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 1. P. 90–95 (in Russ.).

Автор:

Геннадий Алексеевич Медведев – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Gennadij Medvedev, doctor habilitatus of physics and mathematics; professor at the department of probability theory and mathematical statistics, school of applied mathematics and computer science.
medvedevga@cosmostv.by

Традиционно считается, что для n-факторной модели аффинной доходности существует вектор состояния финансового рынка $X(t)=(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)^T,$ который следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t)=\mu(X(t))dt+\sigma(X(t))dW(t) \tag{1}$$

с n-вектором дрейфа $\mu(x)$, $(n\times m)$-матрицей волатильности $\sigma(x)$ и m-вектором $W(t)$ независимых стандартных винеровских процессов.

Временная структура процентных ставок доходности определяется как зависимость процентной ставки доходности (или цены) бескупонной облигации в некоторый текущий момент времени t от срока до погашения этой облигации.

В рамках аффинных моделей цена бескупонной облигации $P(t,x;T)$ с датой погашения T при условии, что в момент t вектор состояния финансового рынка $X(t)$ оказался равным x, т. е. $X(t)=x$, вычисляется по формуле

$$P(t,x;T)\equiv P(t,x;\ t+\tau)=P(T,x;T)\exp\{A(\tau)-xB(\tau)\},$$

где $\tau=T-t$ – срок до погашения облигации. Обычно предполагается, что $P(T,x;T)=1,$ что не ограничивает общности анализа. Функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ называются функциями временной структуры. Для такой функции цены доходность до погашения (или просто доходность) $y(\tau,\ x)$ является аффинной функцией x и вычисляется по формуле [1]

$$y(\tau,\ x)=\frac{-\ln P(t,x;T)}{T-t}=\frac{xB(\tau)-A(\tau)}{\tau}.$$

Доходность до погашения $y(\tau,\ x)$ – это *средняя* характеристика за временной период длительностью τ. В то же время практиков интересует вопрос, какой будет *краткосрочная* ставка доходности в конце этого периода. Такую ставку называют мгновенной форвардной ставкой $f(\tau,\ x),$ и она функционально связана с доходностью до погашения $y(\tau,\ x)$ соотношениями:

$$y(\tau,\ x)=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(s,x)ds,\quad f(\tau,\ x)=y(\tau,\ x)+\tau\frac{\partial y(\tau,\ x)}{\partial\tau}. \tag{2}$$

В рамках аффинных моделей форвардная ставка $f(\tau,\ x)$ вычисляется по формуле

$$f(\tau,\ x)=\frac{-\partial\ln P(t,x;T)}{\partial T}=x\frac{\partial B(\tau)}{\partial\tau}-\frac{\partial A(\tau)}{\partial\tau}.$$

Обычно аналитические свойства функции $f(\tau,\ x)$ оказываются более простыми, чем свойства $y(\tau,\ x).$ Обе эти функции – кривая доходности $y(\tau,\ x)$ и форвардная кривая $f(\tau,\ x)$ – одинаково интересны для финансовых аналитиков.

В традиционной схеме анализа принимается, что вектор состояний $X(t)$ порождается уравнением (1), а функции временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ определяются из условия отсутствия арбитража с помощью так называемого уравнения временной структуры [1].

Нельсон и Сигель [2] предложили другую схему: задать функции временной структуры, а факторы, описывающие состояние рынка, определять эмпирически. К сожалению, никакого мнения относительно выполнения условий отсутствия арбитража авторы такого подхода не сформулировали. При выборе функций временной структуры они основывались на следующих позициях. Оказывается, что в зависимости от состояния рынка функция $y(\tau,x)$ чаще всего принадлежит к одному из четырех типов кривых: монотонно возрастающая до некоторого конечного предельного значения («нормальная» (*normal*) кривая доходности), монотонно убывающая до некоторого конечного предельного значения («перевернутая» (*inverted*) кривая доходности), кривая доходности с максимумом («сгорбленная» (*humped*) кривая), плоская кривая доходности (*flat yield curve*).

Поскольку их всего четыре, появилась идея ввести несколько эталонных функциональных зависимостей и из них строить комбинации, аппроксимирующие кривые доходности. Нельсон и Сигель [2] предложили в качестве таких эталонных функций для конструирования форвардной кривой три простые функции: $\alpha_1(\tau)=1,\ \alpha_2(\tau)=\exp(-\gamma\tau),\ \alpha_3(\tau)=\gamma\tau\exp(-\gamma\tau).$ Функция $\alpha_1(\tau)$ предназначалась для аппроксимации долгосрочного участка кривой, функция $\alpha_2(\tau)$ – для аппроксимации краткосрочного участка и функция $\alpha_3(\tau)$ должна была аппроксимировать среднесрочные доходности. Использование такого подхода приводит к следующему результату:

$$f(\tau)=\beta_1+\beta_2\exp(-\gamma\tau)+\beta_3\gamma\tau\exp(-\gamma\tau). \tag{3}$$

Как видно, функция $f(\tau)$ определяется очень просто, но для ее окончательной идентификации необходимо найти четыре параметра: $\gamma>0$, $\beta_1>0$, β_2 и β_3. С помощью соотношений (2) легко получить и функцию $y(\tau)$ в виде

$$y(\tau)=\beta_1+\beta_2\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau}+\beta_3\left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau}-e^{-\gamma\tau}\right). \tag{4}$$

Предположение о том, что $\alpha_1(\tau)=1,$ как будет показано ниже, не согласуется с требованием отсутствия арбитражных возможностей, и правильнее писать первые слагаемые в правых частях (3) и (4) как $\beta_1\alpha_1 f(\tau)$ и $\beta_1\alpha_1 y(\tau),$ где между $\alpha_1 f(\tau)$ и $\alpha_1 y(\tau)$ должно существовать взаимоотношение, определяемое равенством (2):

$$\alpha_1 y(\tau)=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \alpha_1 f(s)\,ds.$$

Для увеличения гибкости и улучшения приспособляемости модели к эмпирическим данным Свенссон [3] добавил к трем эталонным функциям Нельсона – Сигеля четвертую: $\alpha_5(\tau)=\delta\tau\exp(-\delta\tau),\ \delta>0,$ такую же, как и $\alpha_3(\tau),$ но с другим параметром $\delta\neq\gamma.$ Так что

$$f(\tau)=\beta_1+\beta_2\exp(-\gamma\tau)+\beta_3\gamma\tau\exp(-\gamma\tau)+\beta_4\exp(-\delta\tau)+\beta_5\delta\tau\exp(-\delta\tau) \tag{5}$$

и число параметров модели увеличилось на два и достигло шести. В равенстве (5) для общности введена еще одна функция $\alpha_4(\tau)=\exp(-\delta\tau),$ но если положить $\beta_4=0$, получится представление Свенссона.

В июне 1996 г. в Банке международных расчетов (БМР, г. Базель, Швейцария) было принято соглашение о том, чтобы центральные банки Европы представляли свои данные в БМР для расчетов бескупонных кривых доходности и оценки параметров моделей. Выяснилось, что большинство банков Европы для моделирования кривых доходности используют подход Нельсона – Сигеля (Италия и Финляндия) или его модификацию Свенссона (Бельгия, Германия, Испания, Норвегия, Франция, Швейцария и Швеция) [4]. Это, в частности, подчеркивает важность анализа данных моделей.

Рассмотрим сначала модель Нельсона – Сигеля (Nelson – Siegel, NS). Поскольку предположение о том, что коэффициенты β_1, β_2 и β_3 – константы, является малоправдоподобным, так как реальные кривые доходности со временем изменяются случайным образом, в работе [5] предложено вместо них использовать переменные величины L_t, S_t и C_t и называть их скрытыми (*latent*) факторами: L_t – фактор уровня (*level*), S_t – фактор наклона (*slope*), C_t – фактор кривизны (*curvature*) соответственно. Позже выяснится, что при условии отсутствия арбитража обусловленность фактора L_t временем такова, что он зависит не от текущего времени t, а только от разности $T-t=\tau$, поэтому «скрытыми переменными» являются детерминированная функция $L(\tau)$ и пара случайных процессов S_t и C_t, свойства которых должны быть связаны с условиями отсутствия арбитражных возможностей. Выражения (3) и (4) преобразовываются к виду

$$f(\tau|S_t,\ C_t)=\left[\tau L_t(\tau)\right]'+S_t\exp(-\gamma\tau)+C_t\gamma\tau\exp(-\gamma\tau); \tag{6}$$

$$y(\tau|S_t,\ C_t)=L_t(\tau)+S_t\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau}+C_t\left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau}-e^{-\gamma\tau}\right). \tag{7}$$

В равенстве (6) штрих обозначает производную по τ.

Доходности $f\left(\tau \middle| S_t,\ C_t\right)$ и $y\left(\tau \middle| S_t,\ C_t\right)$ обладают следующими общими свойствами:

$$\lim_{\tau\to 0} y\left(\tau \middle| S_t,\ C_t\right) = \lim_{\tau\to 0} f\left(\tau \middle| S_t,\ C_t\right) = S_t = r(t)$$

при естественном предположении [5], что $L_t(0) = 0$.

Обычно принимается, что процессы S_t и C_t составляют двумерный процесс диффузионного типа, т. е. удовлетворяют уравнению (1) с соответствующим образом заданными функциями $\mu(x)$ и $\sigma(x)$. Для получения аффинной временной структуры доходности Нельсона – Сигеля необходимо, чтобы матрица $\sigma(x)$ не зависела от x, а $\mu(x)$ была аффинной относительно x, $x = \{S_t,\ C_t\}$, т. е.

$$\mu(x) = K(\theta - x) \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_S - S_t \\ \theta_C - C_t \end{pmatrix},$$

где γ – параметр NS-модели; θ_S, θ_C – параметры модели, имеющие смысл стационарных математических ожиданий процессов S_t и C_t соответственно.

Действительно, для того чтобы получить аффинную временную структуру доходности, вектор дрейфа $\mu(x)$ и матрица диффузии $\sigma(x)\sigma(x)^T$ состояний финансового рынка должны описываться аффинными функциями, а рыночные цены риска быть таковы, что $\sigma(x)\lambda(x)$ – n-вектор с аффинными компонентами [6]:

$$\mu(x) = K(\theta - x),\ \sigma(x)\sigma(x)^T = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i,\ \sigma(x)\lambda(x) = \xi + \sum_{i=1}^{n} \eta_i x_i,$$

где K, α и β_i – $(n \times n)$-матрицы; θ, ξ и η_i – n-векторы; x_i – компоненты вектора x.

При этом компоненты вектора функций временной структуры $B(\tau) = \left(B_1(\tau),\ B_2(\tau),\ \ldots,\ B_n(\tau)\right)$ будут удовлетворять системе уравнений

$$B_i'(\tau) = \varphi_i - B(\tau)^T (\eta_i + K_i) - \frac{B(\tau)^T \beta_i B(\tau)}{2},\ B_i(0) = 0,$$

где в уравнении для $B_i(\tau)$ символ K_i обозначает i-й столбец матрицы K, $1 \le i \le n$. Следовательно, для того чтобы $B(\tau)$ имел вид

$$B(\tau) = \begin{pmatrix} \dfrac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma} \\ \dfrac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \end{pmatrix},$$

$(n \times n)$-матрицы β_i и n-векторы η_i должны быть нулевыми, так что зависимость $\sigma(x)$ и $\lambda(x)$ от x исчезает. Таким образом, уравнение (1) для процессов S_t и C_t NS-модели приобретает вид

$$\begin{pmatrix} dS_t \\ dC_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \theta_S \\ \theta_C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_t \\ C_t \end{pmatrix} \right] dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} dW(t). \tag{8}$$

Поскольку матрица волатильности в уравнении (8) постоянная, рыночные цены риска λ_S и λ_C будут тоже константами, составляя вектор λ.

Для отсутствия на рынке арбитражных возможностей необходимо, чтобы цена бескупонной облигации $P(t,\ x;T)$ удовлетворяла *уравнению временной структуры* [1]

$$-\frac{\partial P(t,\ x;T)}{\partial \tau} + \mu(x)^T \frac{\partial P(t,\ x;T)}{\partial x} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x)^T \frac{\partial^2 P(t,\ x;T)}{\partial x^2}\sigma(x)\right) - r(t)P(t,\ x;T) =$$

$$= \lambda(t,\ x)^T \sigma(x)^T \frac{\partial P(t,\ x;T)}{\partial x}.$$

В рассматриваемом случае $P(t, x; t+\tau) = \exp\left\{-\tau y\left(\tau \middle| S_t, C_t\right)\right\}$, $x = \left\{S_t, C_t\right\}$. Поэтому данное уравнение удобнее записать относительно доходности $y(\tau)$ в виде

$$\frac{\partial\left[\tau y(\tau|x)\right]}{\partial\tau} - \frac{\partial\left[\tau y(\tau|x)\right]}{\partial x}\left[\mu(x) - \sigma\lambda\right] + \frac{e^{\tau y(\tau|x)}}{2}\operatorname{tr}\left(\sigma^T \frac{\partial^2 e^{-\tau y(\tau|x)}}{\partial x^2}\sigma\right) = r(t). \tag{9}$$

Теперь остается подставить выражение (7) в уравнение (9) и выяснить, при каких условиях для функции $L_t(\tau)$ и случайных процессов S_t и C_t уравнение (9) удовлетворяется для всяких фиксированных t, S_t и C_t.

Обозначим

$$\tau y(\tau|x) = \tau L(\tau) + B(\tau)^T x,$$

и уравнение (9) можно записать в виде

$$\frac{d\left[\tau L(\tau)\right]}{d\tau} + \frac{dB(\tau)^T x}{d\tau} - B(\tau)^T\left[K(\theta - x) - \sigma\lambda\right] + \frac{1}{2}B(\tau)^T\sigma\sigma^T B(\tau) = r(t). \tag{10}$$

Результатом подстановки выражения (7) в уравнение (10) при любых фиксированных S_t и C_t является соотношение, определяющее фактор $L(\tau)$:

$$\frac{\partial\left[\tau L(\tau)\right]}{\partial\tau} = B^T(\tau)\left[K\theta - \sigma\lambda\right] - \frac{1}{2}B^T(\tau)\sigma\sigma^T B(\tau),\ \ L(0) = 0. \tag{11}$$

Таким образом, если в NS-модели фактор $L(\tau)$ удовлетворяет равенству (11), то выражения (6) и (7) удовлетворяют условиям отсутствия арбитража, т. е. соотношение (11) является условием отсутствия арбитража в NS-модели.

Чтобы увеличить гибкость и улучшить приспособляемость модели к эмпирическим данным, в работе [3] к факторам L_t, S_t и C_t добавлен еще один – H_t. Для общности можно ввести еще фактор G_t, который, как ниже будет показано, позволит обеспечить для расширенной модели Нельсона – Сигеля – Свенссона (Nelson – Siegel – Svensson, NSS) выполнение условия отсутствия арбитража. Здесь G_t и H_t – дополнительные скрытые факторы наклона и кривизны соответственно, так что в расширенной NSS-модели равенства (6) и (7) соответственно заменяются на

$$f(\tau|x) = \left[\tau L_t(\tau)\right]' + S_t\exp(-\gamma\tau) + C_t\gamma\tau\exp(-\gamma\tau) + G_t\exp(-\delta\tau) + H_t\exp(-\delta\tau); \tag{12}$$

$$y(\tau|x) = L(\tau) + S_t\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + C_t\left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau}\right) + G_t\frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} + H_t\left(\frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} - e^{-\delta\tau}\right). \tag{13}$$

Заметим, что в оригинальной NSS-модели [3] в выражениях (12) и (13) слагаемые с фактором G_t отсутствуют.

Доходности $f\left(\tau\middle|\left(S_t, C_t, G_t, H_t\right)\right)$ и $y\left(\tau\middle|\left(S_t, C_t, G_t, H_t\right)\right)$ обладают предельными свойствами:

$$\lim_{\tau\to 0} y\left(\tau\middle|\left(S_t, C_t, G_t, H_t\right)\right) = \lim_{\tau\to 0} f\left(\tau\middle|\left(S_t, C_t, G_t, H_t\right)\right) = S_t + G_t = r(t).$$

В этом случае вместо двумерного процесса $X(t) = \left\{S_t, C_t\right\}$, как в NS-модели, нужно рассматривать четырехмерный процесс $X(t) = \left\{S_t, C_t, G_t, H_t\right\}$. Функция дрейфа такого процесса, приводящего к временной структуре доходности (13), имеет вид

$$\mu(x) = K(\theta - x) \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\delta \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_S - S_t \\ \theta_C - C_t \\ \theta_G - G_t \\ \theta_H - H_t \end{pmatrix}.$$

Матрица волатильности σ, как и ранее, не должна зависеть от x и состоит из констант, поэтому рыночные цены риска λ тоже постоянные. Вектор $B(\tau)$ определяется выражением

$$B(\tau)^T = \left(B_S(\tau)\ B_C(\tau)\ B_G(\tau)\ B_H(\tau)\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma},\ \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau},\ \frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta},\ \frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta} - \tau e^{-\delta\tau}\right).$$

Уравнение временной структуры будет иметь тот же вид (9) (или (10)), в котором векторы и матрицы должны быть заменены соответствующим образом. Определим вектор $x^T = (S_t, C_t, G_t, H_t)$. Подставляя в уравнение (10) явные значения векторов и матриц x, $B(\tau)$, $\mu(x)$, σ, при любых фиксированных значениях факторов S_t, C_t, G_t, H_t получаем соотношение, определяющее фактор $L(\tau)$, которое в векторно-матричной форме не отличается от (11).

Таким образом, для NSS-модели доходностей, определяемой формулами (12) и (13), условием отсутствия арбитража снова является требование, чтобы фактор $L(\tau)$ определялся соотношением (11).

Что касается оригинальной NSS-модели, когда $x^T = (S_t, C_t, H_t)$ и

$$B(\tau)^T = \left(B_S(\tau)\ B_C(\tau)\ B_H(\tau)\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma},\ \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau},\ \frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta} - \tau e^{-\delta\tau}\right), \qquad (14)$$

то возникает следующая трудность в получении условий отсутствия арбитража. Для удовлетворения уравнения (10) необходимо, чтобы вектор (14) был решением уравнения

$$\frac{dB(\tau)^T x}{d\tau} + B(\tau)^T K x = r(t),\ r(t) = S_t,$$

где матрица K используется при определении функции дрейфа в стохастическом дифференциальном уравнении (1), порождающем трехмерный процесс $X(t) = \{S_t, C_t, H_t\}$. К сожалению, такой матрицы с постоянными коэффициентами не существует. Следовательно, оригинальная NSS-модель не обеспечивает отсутствия арбитражных возможностей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК (*REFERENCES*)

1. *Vasiček O. A.* An equilibrium characterization of the term structure // J. of Financial Economics. 1977. Vol. 5. P. 177–188 [Vasiček O. A. An equilibrium characterization of the term structure. *J. of Financial Economics.* 1977. Vol. 5. P. 177–188 (in Engl.)].
2. *Nelson C. R.*, *Siegel A. F.* Parsimonious modeling of yield curves // J. Bus. 1987. Vol. 60. P. 473–489 [Nelson C. R., Siegel A. F. Parsimonious modeling of yield curves. *J. Bus*. 1987. Vol. 60. P. 473–489 (in Engl.)].
3. *Svensson L. E. O.* Estimating forward interest rates with the extended Nelson – Siegel method // Quarterly Rev. Sveriges Riksbank. 1995. № 3. P. 13–26 [Svensson L. E. O. Estimating forward interest rates with the extended Nelson – Siegel method. *Quarterly Rev. Sveriges Riksbank*. 1995. No. 3. P. 13–26 (in Engl.)].
4. Bank for International Settlements. Zero-Coupon Yield Curves: Technical Documentation // Bank for Int. Settl. Papers. 2005. № 25. P. 1–55 [Bank for International Settlements. Zero-Coupon Yield Curves: Technical Documentation. *Bank for Int. Settl. Papers*. 2005. No. 25. P. 1–55 (in Engl.)].
5. *Diebold F. X.*, *Piazzesi M., Rudebusch G. D.* Modeling Bond Yields in Finance and Macroeconomics // Am. Econ. Assoc.: Papers and Proc. 2005. Vol. 95, № 2. P. 415–420 [Diebold F. X., Piazzesi M., Rudebusch G. D. Modeling Bond Yields in Finance and Macroeconomics. *Am. Econ. Assoc.: Papers and Proc.* 2005. Vol. 95, No. 2. P. 415–420 (in Engl.)].
6. *Медведев Г. А.* О временной структуре доходности. 1. Модель Васичека // Вестн. Том. гос. ун-та. 2012. № 1 (18). С. 102–111 [Medvedev G. A. On term structure of yield. 1. Vasiček model. *Tomsk State Univ. J.* 2012. No. 1 (18). P. 102–111 (in Russ.)].

Статья поступила в редколлегию 03.06.2015.
Received by editorial board 03.06.2015.