Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Международный государственный экологический
университет им. А.Д. Сахарова»

Факультет экологического мониторинга

Кафедра физики и высшей математики

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КУРСА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Минск
МГЭУ им. А.Д. Сахарова
2005

ББК 22.11я73
УДК 51(076.1)
С 71

Авторы-составители:
старший преподаватель кафедры физики и высшей математики МГЭУ им. А.Д. Сахарова Е.П. Борботко;
доцент кафедры физики и высшей математики МГЭУ им. А.Д. Сахарова, кандидат педагогических наук Т.Е. Кузьменкова;
доцент кафедры математики и МПМ УО МГПУ, кандидат педагогических наук В.В. Пакштайте;
преподаватель кафедры физики и высшей математики МГЭУ им. А.Д. Сахарова А.В.Шевцова.

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой математического анализа УО МГПУ В.В. Шкут;
кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой экологических информационных систем В.А. Иванюкович.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом МГЭУ им. А.Д. Сахарова (протокол № 9 от 31 мая 2005 г.)

Справочное пособие по решению задач курса аналитической геометрии и линейной алгебры / Сост.: Е.П. Борботко, Т.Е. Кузьменкова, В.В. Пакштайте, А.В. Шевцова.– Мн.: МГЭУ им. А.Д. Сахарова. – 2005. – 72 с.

Предлагаемое учебное пособие содержит определения основных понятий аналитической геометрии и линейной алгебры, соответствующие формулы и примеры решения задач.

ББК 22.11я73
УДК 51(076.1)

Предисловие

Данное пособие посвящено решению задач аналитической геометрии и линейной алгебры и включает в себя следующие темы: векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости, аналитическая геометрия в пространстве, матрицы и действия над ними, системы линейных уравнений.

В начале каждого параграфа приводятся соответствующие теоретические сведения (определения основных понятий, уравнения, формулы, правила, методы решения). Затем следуют примеры решения несложных типовых задач с подробными пояснениями. В конце пособия предлагается список задач различной степени трудности для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для самостоятельного изучения аналитической геометрии и линейной алгебры студентами 1-го курса.

1. Элементы векторной алгебры в пространстве

1.1. Векторы в пространстве

Любой вектор $\vec{a}$ раскладывается по базисным векторам прямоугольной системы координат: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Координаты вектора

Если в пространстве заданы две точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}(x;\ y;\ z)$ равны разности соответствующих координат конца и начала вектора: $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$,

т.е. $\overrightarrow{AB}(x_2\text{-}x_1;\ y_2\text{-}y_1;\ z_2\text{-}z_1)$

Пример 1. $A(4;\ -1;\ 0)$, $B(2;\ 3;\ -2)$. Пусть $\overrightarrow{AB}$ (x; y; z). Тогда имеем: x=2-4=-2; y=3-(-1)=4; z=(-2)-0=-2. Следовательно, $\overrightarrow{AB}$ (-2; 4; -2).

Сложение и вычитание векторов

Пусть даны два вектора $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\vec{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$. Тогда вектор, равный сумме этих векторов, будет иметь координаты

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3).$$

вектор, равный разности этих векторов, имеет координаты:

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;\ a_2-b_2;\ a_3-b_3).$$

Пример 2. Вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, если $\vec{a}$ (1; 0; 1), $\vec{b}$ (2; 0; 3), $\vec{c}$ (0; -1; 1), будет иметь следующие координаты: x=1+2-0=3; y=0+0-(-1)=1; z=1+3-1=3, т.е. $\vec{d}$ (3; 1; 3).

Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ на число α, на это число умножается каждая координата данного вектора,

т.е. вектор $\alpha\vec{a}=(\alpha a_1;\ \alpha a_2;\ \alpha a_3)$.

Пример 3. $\vec{a}$ (3; 6; -1). Вектор $\frac{1}{2}\vec{a}=(\frac{3}{2};\ 3;\ -\frac{1}{2})$.

Условие коллинеарности векторов

Два вектора $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Пример 4. Векторы $\vec{a}$ (2; -1; 3) и $\vec{b}$ (-6; 3; -9) коллинеарны, так как

$\frac{a_1}{b_1} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$; $\frac{a_2}{b_2} = -\frac{1}{3}$; $\frac{a_3}{b_3} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$, т.е. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = -\frac{1}{3}$.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi .$$

Скалярное произведение вектора $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ на вектор $\vec{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$, заданных относительно прямоугольной системы координат, равно сумме произведений соответствующих координат сомножителей:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 .$$

Пример 5. Скалярное произведение векторов $\vec{a}\,(3;\ -1;\ 5)$ и $\vec{b}\,(1;\ 2;\ -3)$ вычисляется так: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot1 + (-1)\cdot2 + 5\cdot(-3) = -14$.

Длина вектора

Из свойств скалярного произведения векторов следует, что длина вектора $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$. Если вектор $\vec{a}$ задан относительно прямоугольной системы координат $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$, то длина его вычисляется с помощью формулы

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} .$$

Пример 6. Длина вектора $\vec{a}\,(4;\ -2;\ -4)$ равна $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6$.

Угол между векторами

Косинус угла φ между двумя векторами $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$, заданными в прямоугольной системе координат, находится так:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} .$$

Пример 7. Даны векторы $\vec{a}\,(2;\ -4;\ 4)$, $\vec{b}\,(-3;\ 2;\ 6)$.

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot(-3) + (-4)\cdot2 + 4\cdot6}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}\cdot\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{5}{21} .$$

Условие перпендикулярности двух векторов

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Если эти векторы даны в прямоугольной системе координат: $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$, то условие перпендикулярности выражается через координаты векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 .$$

Пример 8. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}\,(2;\ 3;\ -1)$ и $\vec{b}\,(1;\ -2;\ 3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot\vec{c} = -6$, где $\vec{c}\,(2;\ -1;\ 1)$.

Решение. Пусть вектор $\vec{x}$ имеет координаты $(x;\ y;\ z)$. Так как $\vec{x}$ перпендикулярен и вектору $\vec{a}$, и вектору $\vec{b}$, то можно записать, что $\vec{a}\cdot\vec{x} = 0$ и $\vec{b}\cdot\vec{x} = 0$ или $2x+3y-z=0$ и $x-2y+3z=0$. Кроме того, по условию задачи $\vec{x}\cdot\vec{c} = -6$. Получим равенство $2x-y+z=-6$.

Итак,

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0, \\ x-2y+3z=0, \\ 2x-y+z=-6. \end{cases}$$

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными – координатами вектора $\vec{x}$. Решая ее, находим x=-3, y=3; z=3.

Ответ. $\vec{x}$(-3; 3; 3).

Координаты единичного вектора

Если длина вектора $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ равна единице, $|\vec{a}|=1$, то координатами этого вектора являются косинусы углов, которые этот вектор образует с базисными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ прямоугольной системы координат, т.е.

$$a_1=\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}}),\ a_2=\cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}}),\ a_3=\cos(\widehat{\vec{a},\vec{k}}).$$

Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый символом $\vec{a}\times\vec{b}$ и удовлетворяющий следующим условиям:

1) длина этого вектора равна произведению длин данных векторов на синус угла между ними: $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;

2) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен как вектору $\vec{a}$, так и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$, взятые в указанном порядке, составляют правую тройку векторов.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей:

$$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a}).$$

Если $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$, то векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ равно нулевому вектору тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Пример 9. Найдем векторное произведение $(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$. По свойствам векторного произведения находим: $(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$ = $3\vec{a}\times\vec{a}$ + $3\vec{a}\times 2\vec{b}$ + $(-\vec{b}\times\vec{a})$ + $(-\vec{b}\times 2\vec{b})$ = $\vec{0}$ + $6(\vec{a}\times\vec{b})$ – $\vec{b}\times\vec{a}$ + $\vec{0}$=$7(\vec{a}\times\vec{b})$.

Вычисление векторного произведения

Если векторы $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ даны в прямоугольной системе координат, то векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ определяется формулой

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k},$$

т.е. вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ имеет координаты

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}a_2a_3\\b_2b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3a_1\\b_3b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1a_2\\b_1b_2\end{vmatrix}).$$

Пример 10. Вычислим координаты векторного произведения $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$, если $\vec{a}(3;-1;-2)$, $\vec{b}(1;2;-1)$. По свойствам векторного произведения находим $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$ = $(2\vec{a}\times\vec{b})+\vec{b}\times\vec{b}$ = $2\vec{a}\times\vec{b}$. Вычислим $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=5\vec{i}-\vec{j}+7\vec{k}.$$

Итак, $\vec{a}\times\vec{b}$=(5;-1;7). Следовательно, $2\vec{a}\times\vec{b}$=(10;-2;14).

Вычисление площади треугольника

Если три точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$ даны относительно прямоугольной системы координат, то площадь треугольника ABC можно найти с помощью векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

Пример 11. Пусть даны точки A(1; 2; 0), B(3; 0; -3), C(5; 2; 6). Тогда для нахождения площади треугольника ABC найдем сначала координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}$(2; -2; -3) и $\overrightarrow{AC}$(4; 0; 6). Вычисляем векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}.$$

Итак, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$=(-12; -24; 8). Отсюда $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=14$ (кв. ед.)

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a}\times\vec{b}$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$, то есть $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Смешанное произведение не меняется при круговой перестановке сомножителей: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$

Смешанное произведение меняет знак на противоположный при всякой перестановке, изменяющей последовательность сомножителей:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c};\ (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}.$$

Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

Вычисление смешанного произведения векторов

Если векторы $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\vec{b}\,(b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c}\,(c_1; c_2; c_3)$ заданы относительно прямоугольной системы координат, то смешанное произведение векторов вычисляется:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 12. Смешанное произведение векторов $\vec{a}\,(1;\,1;\,3)$, $\vec{b}\,(-2;\,2;\,1)$, $\vec{c}\,(3;\,-2;\,5)$ равно

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7.$$

Условие компланарности трех векторов

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, т.е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$. В координатах векторов условие компланарности записывается так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 13. Докажем, четыре точки $A(1;\,2;\,-1)$, $B(0;\,1;\,5)$, $C(-1;\,2;\,1)$, $D(2;\,1;\,3)$ лежат в одной плоскости. Для этого найдем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Если заданные четыре точки лежат в одной плоскости, то эти векторы должны быть компланарны. Следовательно, решение сводится к проверке условия компланарности.

Координаты векторов равны: $\overrightarrow{AB}(-1;-1;6)$, $\overrightarrow{AC}(-2;0;2)$, $\overrightarrow{AD}(1;-1;4)$. Составим определитель, вычислим его:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0+12-2-0-2-8 = 0.$$

Отсюда следует, что три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны, т.е. четыре данные точки лежат в одной плоскости.

Вычисление объема тетраэдра

Объем тетраэдра равен одной шестой объема параллелепипеда, т.е. для вычисления объема тетраэдра можно использовать смешанное произведение векторов.

Так, если даны координаты четырех вершин тетраэдра относительно прямоугольной системы координат $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$, то объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ модуля смешанного произведения векторов:

$$V_{тетр} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AD}\right|.$$

Пример 14 . Вершины тетраэдра находятся в точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$. Находим координаты векторов: $\overrightarrow{AB}(3; 6; 3)$, $\overrightarrow{AC}(1; 3; -2)$, $\overrightarrow{AD}(2; 2; 2)$. Далее

$$V_{тетр} = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|-18| = 3 \text{ (куб. ед.)}.$$

1.2. Примеры решения задач

Задача 1. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}(2; -1; 6), \vec{b}(-1; 3; 8)$, $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 2\vec{a} - 5\vec{b}$?

Решение. Находим координаты векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, получаем $\vec{c}_1(12; -11; 14), \vec{c}_2(9; -17; -28)$. Если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны. Составим пропорцию: $\frac{12}{9} \neq \frac{-11}{-17} \neq \frac{14}{-28}$.

Она не выполняется, тогда векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ не будут коллинеарными.

Ответ. Векторы не коллинеарны.

Задача 2. Найти косинус угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, если $A(3; 3; -1)$, $B(5; 1; -2)$, $C(4; 1; -3)$.

Решение. Находим координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, получаем $\vec{AB}(2; -2; -1)$, $\vec{AC}(1; -2; -2)$.

Тогда $\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{AC}\right|} = \frac{2+4+2}{\sqrt{4+4+1} \cdot \sqrt{1+4+4}} = \frac{8}{9}$.

Ответ. $\frac{8}{9}$.

Задача 3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, если $\alpha = (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Известно, что $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3\vec{p} - 4\vec{q}) \times (\vec{p} + 3\vec{q}) = 3(\vec{p} \times \vec{p}) + 9(\vec{p} \times \vec{q}) - 4(\vec{q} \times \vec{p}) - 12(\vec{q} \times \vec{q}) =$$
$$= 9(\vec{p} \times \vec{q}) + 4(\vec{p} \times \vec{q}) = 13(\vec{p} \times \vec{q}).$$
$$S = 13|\vec{p} \times \vec{q}| = 13|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \sin\alpha = 13 \cdot 2 \cdot 3 \sin\frac{\pi}{4} = 39 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 39\sqrt{2} \text{ кв. ед.}$$

Ответ. $39\sqrt{2}$ кв. ед.

Задача 4. Компланарны ли векторы $\vec{a}(6; 3; 4)$, $\vec{b}(-1; -2; -1)$, $\vec{c}(2; 1; 2)$?

Решение. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ будут компланарны, если их смешанное произведение равно нулю. Проводим вычисления:

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -24 - 6 - 4 + 16 + 6 + 6 = -6 \neq 0,$$

т.е. данные векторы компланарными не будут.

Ответ. Нет.

Задача 5. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1(0; -3; 1)$, $A_2(-4; 1; 2)$, $A_3(2; -1; 5)$, $A_4(3; 1; -4)$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение. Известно, что $V_m = \dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4})\right|$. Находим координаты векторов, получаем $\overrightarrow{A_1A_2}(-4; 4; 1)$, $\overrightarrow{A_1A_3}(2; 2; 4)$, $\overrightarrow{A_1A_4}(3; 4; -5)$.

$$(\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 194.$$

$$\mathrm{V} = \frac{1}{6} \cdot 194 = \frac{97}{3} \ \textbf{куб. ед.}$$

Находим площадь грани $A_1A_2A_3$:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{196 + 324 + 256} = \frac{1}{2}\sqrt{194 \cdot 4} = \sqrt{194} \text{ кв. ед.}$$

Тогда $V = \dfrac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, отсюда $H = \dfrac{3V}{S_{осн}} = \dfrac{3 \cdot \frac{97}{3}}{\sqrt{194}} = \dfrac{97}{\sqrt{194}} = \sqrt{\dfrac{97}{2}}$.

Ответ. $V = \dfrac{97}{3}$ куб. ед., $H = \sqrt{\dfrac{97}{2}}$.

2. Аналитическая геометрия на плоскости

2.1. Метод координат на плоскости

Деление отрезка в данном отношении

Пусть заданы две точки своими координатами: $M_1\,(x_1;\,y_1)$ – начало отрезка, $M_2\,(x_2;\,y_2)$ – конец отрезка, и некоторое число $\lambda \neq -1$. Разделить отрезок M_1M_2 в отношении λ – это значит найти координаты (x, y) такой точки C, что $\vec{M}_1C = \lambda CM_2$.

Формулы для вычисления координат точки деления C следующие:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

(При пользовании этими формулами нельзя путать координаты начала и конца отрезка)

Если требуется разделить отрезок пополам, то $\lambda=1$ и координаты x,y точки C – середины отрезка M_1M_2 равны

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Пример 1. Отрезок AB разделен на три равные части. Найти координаты точек деления, если A (-2; 6), B (1; 3).

Решение. Пусть A – начало отрезка, B – конец отрезка, C – первая точка деления, D – вторая. Находим координаты точки C.

Отношение λ, в котором точка C делит отрезок AB, согласно определению, равно $\lambda = \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|} = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $x_C = \dfrac{(-2) + \frac{1}{2}\cdot 1}{1+\frac{1}{2}} = -1, \quad y_C = \dfrac{6 + \frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}} = 5$. Итак, C (-1; 5).

Для точки D второй точки деления, отношение $\lambda = \frac{|\vec{AD}|}{|\vec{DB}|} = \frac{2}{1} = 2$.

Отсюда $x_D = \dfrac{(-2) + 2\cdot 1}{1+2} = 0, \quad y_D = \dfrac{6 + 2\cdot 3}{1+2} = 4$. Таким образом, D (0; 4).

Ответ. C (-1; 5), D (0; 4).

Расстояние между двумя точками

Расстояние между двумя точками A (x_1; y_1), B (x_2; y_2), заданными относительно прямоугольной системы координат, вычисляется как длина вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, т.е. $d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Пример 2. Расстояние от A (12; -1) до B (0; 4) равно

$$d = \sqrt{(0-12)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Ответ. d = 13.

Центр тяжести треугольника

Координаты центра тяжести треугольника (точки M(x;y)), вершины которого находятся в точках A (x_1; y_1), B (x_2; y_2), C (x_3; y_3), находятся с помощью формул

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Пример 3. Координаты центра тяжести треугольника с вершинами в точках A (4; 2), B (7; -2) и C (4; 3) равны $x = \frac{4+7+4}{3} = 5, \quad y = \frac{2+(-2)+3}{3} = 1.$

Итак, центр тяжести находится в точке M (5;1).

Ответ. M (5;1).

2.2. Примеры решения задач

Задача 1. Три последовательные вершины параллелограмма имеют координаты A (3; -3), B (-1; 1), C (1; 6). Найти координаты четвертой вершины D.

Решение. Диагонали параллелограмма в точке пересечения O делятся пополам. Поэтому найдем точку O как середину отрезка AC по формулам $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Получаем $x = \frac{3+1}{2} = 2; \quad y = \frac{-3+6}{2} = \frac{3}{2}$, т. е. O (2; $\frac{3}{2}$).

Пусть x_2 и y_2 – координаты точки D, тогда по формулам координат середины отрезка имеем $2 = \frac{-1+x_2}{2}$, $\frac{3}{2} = \frac{1+y_2}{2}$. Откуда x_2=5, y_2=2 , т.е. D(5;2).

Ответ. (5; 2).

Задача 2. Доказать, что треугольник с вершинами A (1; 1), B (2; 3), C(5; -1) прямоугольный.

Решение. Зная стороны a, b, c треугольника, с помощью теоремы, обратной теореме Пифагора, можно установить, является ли данный треугольник прямоугольным ($a^2 + b^2 = c^2$), остроугольным ($a^2 + b^2 > c^2$) или тупоугольным ($a^2 + b^2 < c^2$).

Найдем длины сторон данного треугольника по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Находим длину стороны AB: $AB=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}.$

Находим длину стороны AC: $AC=\sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}.$

Находим длину стороны BC: $BC=\sqrt{(5-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.

Квадраты длин сторон будут соответственно равны: $AB^2=5$, $AC^2=20$, $BC^2=25$, откуда $BC^2=AB^2+AC^2$.

Последнее равенство означает, что треугольник прямоугольный.

Задача 3. В треугольнике с вершинами A (2;3), B (6;3) и C (6;-5) найти длину биссектрисы BN.

Решение. Из элементарной геометрии известно, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Найдем длины этих сторон.

По формуле $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ имеем

$$AB=\sqrt{(6-2)^2+(3-3)^2}=4,\quad BC=\sqrt{(6-6)^2+(-5-3)^2}=8.$$

Следовательно, $AB:BC==4:8=1:2$ и $AN:NC=1:2$, где $N\,(x;\,y)$ – точка пересечения биссектрисы угла B со стороной AC.

Координаты точки N определим по формулам $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

В данном случае $x_1=2$, $y_1=3$, $x_2=6$, $y_2=-5$, $\lambda=\dfrac{1}{2}$, поэтому

$$x=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 6}{1+\frac{1}{2}}=\frac{10}{3};\quad y=\frac{3+\frac{1}{2}\cdot(-5)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$ Итак, $N\,\left(\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Вычислим длину BN: $BN=\sqrt{\left(6-\frac{10}{3}\right)^2+\left(3-\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$.

Ответ $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$.

Задача 4. На осях координат найти точки, каждая из которых равноудалена от точек A (1;1) и B (3;7).

Решение. Пусть M_1 и M_2 – искомые точки, и точка M_1 лежит на оси Ox, ее координаты $(x;0)$. Точка M_2 лежит на оси Oy, ее координаты $(0;y)$.

Так как точки M_1 и M_2 одинаково удалены от точек A и B, то $M_1A=M_1B$, $M_2A=M_2B$.

Воспользуемся формулой $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Получаем

$\sqrt{(1-x)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(3-x)^2+(7-0)^2}$ и $\sqrt{(1-0)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(7-y)^2}$.

Решаем полученные уравнения:

$(1-x)^2+1=(3-x)^2+49,$
$1-2x+x^2+1=9-6x+x^2+49,$
$4x=56,$
$x=14$

$1+(1-y)^2=9+(7-y)^2,$
$1+1-2y+y^2=9+49-14y+y^2,$
$12y=56,$
$y=\frac{14}{3}.$

Тогда $M_1(14;0)$, $M_2(0;\frac{14}{3})$.

Ответ. (14; 0), (0; $\frac{14}{3}$).

2.3. Уравнение линии на плоскости

Под линией на плоскости понимается некоторое множество точек, обладающих определенным, только им присущим геометрическим свойством, координаты которых относительно некоторой системы координат удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$.

Чтобы составить уравнение линии, необходимо:

1) взять произвольную точку данного множества с текущими координатами (x,y);

2) записать общее свойство точек данного множества в виде равенства;

3) выразить входящие в это равенство величины с помощью координат.

(Порядок линии не зависит от выбора системы координат).

Для проверки принадлежности данной точки $M_1(x_1;y_1)$ какой-то определенной линии необходимо подставить координаты $(x_1;y_1)$ этой точки в уравнение данной линии. Если при этом получается тождество, то точка лежит на соответствующей линии; если тождества не получается, то точка M_1 не лежит на данной линии.

Координаты точек пересечения двух линий, уравнения которых $F_1(x;y)=0$ и $F_2(x;y)=0$, находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x;y)=0, \\ F_2(x;y)=0. \end{cases}$$

Если система имеет действительные решения, то линии пересекаются, причем число точек пересечения равно числу решений системы. Если действительных решений нет, то линии общих точек не имеют.

2.4. Примеры решения задач

Задача 1. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек A (-1; 2), B (7; 5). Принадлежат ли этому множеству точки C (2; 1), D (3; 3,5) ?

Решение. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка искомого множества. В условии дано, что все точки множества обладают геометрическим свойством одинаковой удаленности от точки A и точки B. Т.е. $\rho(A;M)=\rho(B;M)$. Запишем это равенство через координаты точек A, B, M. По формуле расстояния между двумя точками получаем: $\rho(A;M)=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$, $\rho(B;M)=\sqrt{(x-7)^2+(y-5)^2}$.

Так как эти расстояния должны быть равны, то

$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-7)^2+(y-5)^2}$.

Возведем обе части в квадрат и раскроем скобки:

$x^2+2x+1+y^2-4y+4=x^2-14x+49+y^2-10y+25.$

Отсюда получаем уравнение искомого множества точек:

$16x+16y-69=0$ – уравнение прямой.

Проверяем, принадлежит ли этому множеству точка C. Для этого подставляем координаты точки C в левую часть полученного уравнения:

$16\cdot2+6\cdot1-69=-31\neq0.$

Следовательно, точка C не принадлежит этому множеству.

Для точки D имеем: $16\cdot3+6\cdot3{,}5-69=0$.

Итак, точка D лежит на данной прямой.

Ответ. Уравнение множества точек $16x+6y-69=0$, точка C не принадлежит линии, точка D принадлежит линии.

Задача 2. Найти точку пересечения двух окружностей, заданных уравнениями $(x-5)^2+(y-6)^2=25$, $(x+2)^2+(y-6)^2=32$.

Решение. Чтобы найти координаты точек пересечения данных линий, необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-6)^2=25,\\(x+2)^2+(y-6)^2=32.\end{cases}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем систему

$$\begin{cases}x^2+y^2-10x-12y+36=0,\\x^2+y^2+4x-12y+8=0.\end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем $-14x+28=0$, откуда $x=2$. Второе уравнение при $x=2$ сводится к квадратному уравнению относительно y: $y^2-12y+20=0$.

Решая его, находим $y_1=2$, $y_2=10$.

Следовательно, данные окружности пересекаются в двух точках: $M_1(2;2)$, $M_2(2;10)$.

Ответ. $M_1\,(2;2)$, $M_2\,(2;10)$.

Задача 3. Точка M движется так, что в любой момент времени ее расстояние до точки A (6;0) втрое больше расстояния до точки B ($\frac{2}{3}$;0). Найти уравнение траектории движения точки M.

Решение. Пусть (x, y) – текущие координаты точки M. По условию задачи $MA = 3MB$. Выразим расстояния MA и MB через координаты точек, используя формулу: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$$MA = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2};\ MB = \sqrt{(x - \frac{2}{3})^2 + (y-0)^2}.$$

Подставляя эти выражения в равенство $MA = 3MB$, получим уравнение траектории движения точки M: $\sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2} = 3\sqrt{(x - \frac{2}{3})^2 + y^2}$.

Откуда

$$(x\text{-}6)^2 + y^2 = 9((x - \frac{2}{3})^2 + y^2),\ x^2 - 12x + 36 + y^2 = 9(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}) + 9y^2,$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 9x^2 - 12x + 4 + 9y^2,\ 8x^2 + 8y^2 = 32,\ x^2 + y^2 = 4.$$

Получили уравнение окружности радиуса R=2 с центром в начале координат.

Ответ. $x^2+y^2=4$.

2.5. Прямая на плоскости

Всякая прямая относительно прямоугольной системы координат на плоскости определяется уравнением первой степени. И обратно, всякое уравнение первой степени относительно координат x, y описывает некоторую прямую на плоскости.

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется ее **направляющим** вектором.

Различные способы задания прямой

Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором

Пусть дана некоторая прямая, которая проходит через точку M_0 с известными координатами x_0, y_0 параллельно направляющему вектору $\vec{a}$, координаты которого также известны и равны (a_1, a_2).

Уравнение этой прямой можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Это равенство называется каноническим уравнением прямой.

Пример 1. Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M_0(-2;1) и имеющей направляющий вектор $\vec{a}$ (3;-1) запишется так:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1}.$$

Параметрические уравнения прямой

Существует еще один вид уравнения прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей данный направляющий вектор $\vec{a}\ \ (a_{1,}a_2)$: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \end{cases}$

где t – параметр, принимающий все действительные значения.

Этот вид называется параметрическими уравнениями прямой.

Пример 2. Составим параметрические уравнения прямой, проходящей через точку P (-2;3) параллельно вектору $\vec{p}\,(5;-1)$. Подставляя данные задачи в параметрические уравнения прямой, получим $\begin{cases} x = -2 + 5t, \\ y = 3 - t. \end{cases}$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть некоторая прямая проходит через две точки с известными координатами: $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$.. Уравнение этой прямой имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Пример 3. Составить уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника с вершинами в точках A (3;4), B (6;2), C (3;$\frac{1}{2}$).

Решение. Находим уравнение прямой, на которой лежит сторона AB. Пользуясь уравнением прямой по двум точкам и полагая x_1=3, y_1=4, x_2=6, y_2=2, имеем

$$\frac{x-3}{6-3} = \frac{y-4}{2-4}, \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-2}, \quad 2x+3y-18=0.$$

Составляя уравнение прямой, на которой лежит сторона BC, считаем x_1=6, y_1=2, x_2=3, y_2=$\frac{1}{2}$:

$$\frac{x-6}{3-6} = \frac{y-2}{\frac{1}{2}-2}, \quad \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{-\frac{3}{2}}, \quad x-2y-2=0.$$

При нахождении уравнения прямой AC считаем x_1=3, y_1=4, x_2=3, y_2=$\frac{1}{2}$:

$$\frac{x-3}{3-3} = \frac{y-4}{\frac{1}{2}-4}, \quad x=3.$$

Ответ. AB: $2x+3y-18=0$; BC: $x-2y-2=0$; AC: $x-3=0$.

Уравнение прямой “в отрезках по осям”

Пусть прямая отсекает на оси Ox отрезок величины a, на оси Oy – отрезок b. В этом случае уравнение прямой будет иметь вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Пример 4. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат прямой $4x$-$3y$-12=0.

Решение. Чтобы найти величины a и b, необходимо данное уравнение записать в виде $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Для этого перенесем свободный член в правую часть равенства и затем разделим обе части на 12:

$$4x\text{-}3y=12,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1.$$

Ответ. a=3; b=-4.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Угловым коэффициентом k некоторой прямой называется число, равное отношению координат направляющего вектора $\vec{a}\ (a_1,a_2)$ этой прямой, т.е. $k=\frac{a_2}{a_1}$. Если прямая задана относительно прямоугольной системы координат, то угловой коэффициент k есть тангенс угла α наклона данной прямой к положительному направлению оси Ox: $k=tg\alpha,\ (0\le\alpha\prec\pi)$.

Уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0,y_0)$ и угловым коэффициентом k имеет вид: $y-y_0=k(x-x_0)$.

Пример 5. Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k=-5 и проходящей через точку M_0(2;-3), запишется так:

$$y+3=-5(x-2),\ y+3=-5x+10,\ \ 5x+y-7=0.$$

Если в качестве точки $M_0(x_0,y_0)$ взять точку $B(0;b)$ пересечения прямой с осью ординат, то получим уравнение $y=kx+b$.

Пример 6. В прямоугольной системе координат уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок b=–7, и образующей с осью Ox угол 45˚, будет иметь вид $y=1\cdot x-7$ или $x-y-7=0$, так как $k=tg\,45^\circ=1$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Если прямая проходит через данную точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{n}(A;B)$ (вектор $\vec{n}$ называется нормальным вектором данной прямой), то ее уравнение имеет вид

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$

Пример 7. Уравнение прямой, проходящей через точку M_0(-3;1) и имеющей нормальный вектор $\vec{n}$(1;-2), будет следующим:

$(x_0= -3,\ y_0=1,\ A=1,\ B=-2)$:
$(x+3)-2(y-1)=0,\ x+3-2y+2=0,\ x-2y+5=0.$

Общее уравнение прямой

Каким бы способом ни была задана прямая, ее уравнение всегда можно привести к уравнению вида $Ax+By+C=0$, которое называется общим уравнением прямой.

Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения прямой

Коэффициенты $(-B;A)$ общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$ являются координатами направляющего вектора $\vec{a}$ данной прямой, т.е. $\vec{a}\,(-B\,;\,A)$. Коэффициенты $(A;B)$ есть координаты нормального вектора данной прямой, т.е. $\vec{n}\,(A;B)$. Угловой коэффициент прямой равен $k=-\dfrac{A}{B}$, а отношение $-\dfrac{C}{B}=b$ – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

Пример 8. Если прямая дана общим уравнением $x-2y+7=0$ относительно прямоугольной системы координат, то ее нормальный вектор имеет координаты $\vec{n}$ (1;-2), направляющий вектор $\vec{a}$ (2;1). Чтобы найти угловой коэффициент, решаем уравнение относительно y:

$$2y=x+7,\ y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением прямой с угловым коэффициентом, находим, что $k=\dfrac{1}{2}$, а отрезок b, отсекаемый прямой на оси Oy, есть $b=\dfrac{7}{2}$.

Пример 9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (7;4) перпендикулярно к прямой $3x-2y+4=0$.

Решение. Направляющий вектор заданной прямой $3x-2y+4=0$ есть вектор $\vec{a}$ (2;3). Этот вектор, согласно условию, должен быть перпендикулярен искомой прямой. Следовательно, мы должны использовать уравнение прямой по точке и нормальному вектору, чтобы найти уравнение искомой прямой:

$$2(x-7)+3(y-4)=0,\ 2x+3y-26=0.$$

Ответ. $2x+3y-26=0$.

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ вычисляется по формуле

$$\rho\ (M_0,d)=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Пример 10. Найти расстояние от точки C (-1;2) до прямой $3x-y+4=0$.

Решение. Воспользуемся формулой $\rho(M_0, d)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Так как в данном случае x_0=-1, y_0=2, A=3, B=-1, то

$$d=\frac{|3\cdot(-1)-1\cdot 2+4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Тангенс угла между прямыми, уравнения которых относительно прямоугольной системы координат заданы в виде $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, вычисляется по формуле

$$tg\ \varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2},$$

причем угол принято отсчитывать против часовой стрелки от первой прямой ко второй.

Необходимое и достаточное условие параллельности заданных прямых выражается равенством $k_1=k_2$, а условие перпендикулярности – $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$.

Если прямые относительно прямоугольной системы координат заданы общими уравнениями $d_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ и $d_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, то тангенс угла между ними определяется формулой

$$tg\ \varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2},$$

а косинус угла между ними $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Необходимое и достаточное условие параллельности прямых есть $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$, условие перпендикулярности – $A_1A_2+B_1B_2=0$, условие совпадения – $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

Пример 11. Угол между прямыми, заданными уравнениями $y=\dfrac{3}{2}x-4$, $5x+y-9=0$, вычисляется по формуле $tg\ \varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, принимая во внимание, что $k_1=\dfrac{3}{2}$, а k_2 находится из второго уравнения: $y=-5x+9$, $k_2=-5$.

$$tg\ \varphi = \frac{-5-\frac{3}{2}}{1+(-5)\cdot\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{13}{2}}{-\frac{13}{2}} = 1, \quad \varphi = 45^\circ.$$

Пример 12. Указать, какие из следующих прямых

1) $2x$-$7y$+3=0; 3) $7x$+$2y$-5=0;

2) $4x$-$14y$+1=0; 4) $3x$+$6y$-2=0;

параллельны и перпендикулярны.

Решение. Так как прямые заданы общими уравнениями, проверим условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Для первых двух прямых отношения $\frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{B_1}{B_2} = \frac{-7}{-14} = \frac{1}{2}$, т.е. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, следовательно, прямые (1) и (2) параллельны.

Для первой и третьей прямых проверяем условие перпендикулярности: $A_1A_2 + B_1B_2 = 2\cdot 7 + (-7)\cdot 2 = 14 - 14 = 0$, т.е. условие $A_1A_2+B_1B_2=0$ выполняется. Следовательно, прямые (1) и (3) взаимно перпендикулярны.

Легко видеть, что условие перпендикулярности выполняется и для прямых (2) и (3): $A_1A_2+B_1B_2=4\cdot 7 + (-14)\cdot 2 = 0$.

Ответ. Прямые (1) и (2) параллельны, (1) и (3) перпендикулярны, (2) и (3) перпендикулярны.

2.6. Примеры решения задач

Задача 1. Для прямой $4x$-$3y$+1=0 найти координаты направляющего и нормального векторов, угловой коэффициент, величины отрезков, отсекаемых на осях координат.

Решение. Координаты направляющего вектора $\vec{a}$ равны ($-B;A$), т.е. $\vec{a}$(3,4). Координаты нормального вектора $\vec{n}$ равны ($A;B$), т.е. $\vec{n}$(4,-3). Угловой коэффициент $k = -\frac{A}{B} = \frac{4}{3}$. Если x=0, то $-3y$+1=0, $y=\frac{1}{3}$; если y=0, то $4x$+1=0, $x=-\frac{1}{4}$. Величины отрезков, отсекаемых на осях координат, равны $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{3}$.

Ответ. $\vec{a}(3,4), \vec{n}(4,-3), k = \frac{4}{3}, a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{3}$.

Задача 2. Задан треугольник ABC координатами своих вершин: A (-1, 2), B (3, 3), C (1, -1).

Найти: а) периметр треугольника;

б) точку пересечения медиан;

в) уравнение стороны AB;

г) уравнение высоты, опущенной из C;

д) длину этой высоты.

Решение. а) Находим длины сторон треугольника по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}:$$

$$AB = \sqrt{(3+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17};$$

$$BC = \sqrt{(1-3)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20};$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13};$$

$$p = \sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{13}.$$

б) Точку пересечения медиан треугольника находим по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Тогда $x = \frac{-1+3+1}{3} = 1, \quad y = \frac{2+3-1}{3} = \frac{4}{3}$, т.е. $M(1; \frac{4}{3})$.

в) Составляем уравнение прямой AB по двум точкам: $\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-2}{3-2}$, x+1=4(y-2), x-4y+9=0.

г) Находим угловой коэффициент прямой AB, $k_{AB} = \frac{1}{4}$, тогда $k_{CD} = -4$, где CD – высота, опущенная из вершины C. Составим уравнение CD по точке C и угловому коэффициенту: y+1=-4(x-1); 4x+y-3=0.

д) Длину высоты CD найдем как расстояние от точки C до прямой AB:

$$CD = \rho(C, AB) = \frac{|1 - 4(-1) + 9|}{\sqrt{1+16}} = \frac{14}{\sqrt{17}} = \frac{14\sqrt{17}}{17}.$$

Ответ. а) $p = \sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{13}$, б) $M(1; \frac{4}{3})$, в) x-4y+9=0,

г) 4x+y-3=0, д) $\frac{14\sqrt{17}}{17}$.

Задача 3. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения медиан треугольника, стороны которого лежат на прямых 2x+3y-18=0, x-2y-2=0, 6x-5y+2=0.

Решение. Пусть данные уравнения описывают соответственно прямые AB, BC, AC. Пусть AM и BN – медианы треугольника ABC.

Найдем координаты вершин данного треугольника, для этого решаем три системы уравнений:

$\begin{cases} 2x + 3y - 18 = 0, \\ x - 2y - 2 = 0, \end{cases}$ тогда B(6, 2), $\begin{cases} x - 2y - 2 = 0, \\ 6x - 5y + 2 = 0, \end{cases}$ тогда C(-2, -2),

$\begin{cases} 2x + 3y - 18 = 0, \\ 6x - 5y + 2 = 0, \end{cases}$ тогда A(3, 4).

Точка пересечения медиан треугольника имеет координаты:

$$x_0 = \frac{6-2+3}{3} = \frac{7}{3}; \; y_0 = \frac{2-2+4}{3} = \frac{4}{3}.$$

Составим уравнение искомой прямой

$$\frac{x-0}{\frac{7}{3}-0}=\frac{y-0}{\frac{4}{3}-0}, \text{ или } \frac{4}{3}x=\frac{7}{3}y; \ 4x\text{-}7y\text{=}0.$$

Ответ. $4x$-$7y$=0.

Задача 4. Найти координаты точки, симметричной точке M (-2; 9) относительно прямой $2x$-$3y$+18=0 (система координат – прямоугольная).

Решение. Обозначим точку, симметричную точке M, через M'.

Эти две точки расположены на одинаковых расстояниях от заданной прямой.

Пусть точка A – середина отрезка MM', лежащая на данной прямой $2x$-$3y$+18=0.

Кроме того, прямая MM' перпендикулярна заданной прямой. Используем эти условия: написав уравнение прямой MM', мы можем найти координаты точки A как точки пересечения двух прямых, и далее с помощью формул координат середины отрезка можно вычислить координаты M'. Составляем уравнение MM'. Находим угловой коэффициент заданной прямой k_1:

$$3y=2x+18,\ y=\frac{2}{3}x+6,\ k_1=\frac{2}{3}.$$

Угловой коэффициент k_2 прямой MM', перпендикулярной к данной прямой, равен: $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{3}{2}$. Следовательно, уравнение MM' по формуле $y-y_0=k(x-x_0)$ имеет вид

$$y-9=-\frac{3}{2}(x+2),\ 2y-18=-3x-6,\ 3x+2y-12=0.$$

Вычисляем координаты точки A, для чего составляем систему уравнений, состоящую из уравнения данной прямой и прямой MM':

$$\begin{cases}2x-3y+18=0,\\ 3x+2y-12=0,\end{cases} \quad \begin{cases}2x-3y+18=0,\\ -13y+78=0,\end{cases} \quad \begin{cases}x=0,\\ y=6.\end{cases}$$

Итак, A (0;6).

Так как точка A – середина отрезка MM', используем формулы:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

и получаем $0=\frac{-2+x_2}{2}$, x_2=2, $6=\frac{9+y_2}{2}$, y_2=3.

Ответ. M' (2;3).

2.7. Линии второго порядка, заданные каноническими уравнениями

Алгебраической линией n-го порядка называется множество точек, определяемое алгебраическим уравнением n-й степени относительно декартовой системы координат. В случае n=2 линия называется линией второго порядка.

Эллипс

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a, b – длины полуосей.

Точки пересечения эллипса с его осями симметрии, которые в данном случае совпадают с осями координат, называются вершинами. Точки $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокусы эллипса, причем $c^2=a^2-b^2$.

Эксцентриситет ε эллипса есть число, равное $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$.

Директрисы эллипса – прямые l_1 и l_2 – определяются уравнениями

$$x=-\frac{a}{\varepsilon},\ x=\frac{a}{\varepsilon}.$$

Директориальное свойство: для любой точки эллипса справедливы равенства

$$\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon,\ \frac{r_2}{d_2}=\varepsilon,$$

где d_1, d_2 – расстояния от точки до соответствующей данному фокусу директрисы.

Пример 1. Покажем, что уравнение $25x^2+36y^2=900$ есть уравнение эллипса. Найдем длины его осей, расстояние между фокусами, эксцентриситет.

Разделив обе части уравнения на 900, получим уравнение эллипса в каноническом виде: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$.

Отсюда a=6, т.е. длина большой оси $2a$=12; b=5 и длина малой оси $2b$=10. Расстояние между фокусами находим по формуле $c^2=a^2-b^2$. $2c=2\sqrt{36-25}=2\sqrt{11}$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{11}}{6}$.

Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

При $a=b$ гипербола называется равносторонней.

Точки пересечения гиперболы с действительной осью, в данном случае совпадающей с осью Ox, называются вершинами гиперболы.

Фокусы гиперболы $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где $c^2=a^2+b^2$.

Эксцентриситет гиперболы – число ε, определяемое формулой $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$.

Директрисы гиперболы – прямые l_1 и l_2, – определяются уравнениями

$$x=-\frac{a}{\varepsilon},\ x=\frac{a}{\varepsilon},$$

директриса l_1 соответствует фокусу F_1, l_2 – фокусу F_2.

Директориальное свойство: $\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon$, $\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon$, где r_1 – расстояние от левого фокуса до точки любой ветви гиперболы, r_2 – расстояние от правого фокуса до точки любой ветви гиперболы, d_1 и d_2 – расстояния этих точек от директрис l_1 и l_2.

Асимптоты гиперболы определяются уравнениями

$$y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x.$$

Уравнение $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ определяет гиперболу, симметричную относительно координатных осей; ветви ее пересекают ось Oy, фокусы лежат на оси Oy.

Пример 2. Определим координаты фокусов и уравнения директрис гиперболы, уравнение которой $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{64}=-1$.

Это уравнение можно записать так: $-\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{64}=1$, т.е. это уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой лежат на оси Oy. По формуле $c^2=a^2+b^2$: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{225+64}=17$. Отсюда $F_1(0;-17)$, $F_2(0;17)$.

Уравнения директрис в данном случае будут $y_1=-\frac{b}{\varepsilon}$, $y_2=\frac{b}{\varepsilon}$. Находим эксцентриситет: $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{17}{8}$. Следовательно, уравнения директрис

$$y_1=-\frac{8}{\frac{17}{8}}=-\frac{64}{17} \text{ и } y_2=\frac{8}{\frac{17}{8}}=\frac{64}{17}.$$

Парабола

Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox:

$$y^2=2px,$$

где p – фокальный параметр (расстояние от фокуса параболы до директрисы l).

Директриса l определяется уравнением $x=-\frac{p}{2}$.

Вершина параболы совпадает с началом координат. Фокус находится в точке $F(\frac{p}{2};0)$.

Парабола, симметричная относительно Oy и проходящая через начало координат, определяется уравнением $x^2=2qy$. Ее фокус находится в точке $F(0;\ \frac{q}{2})$, уравнение директрисы имеет вид: $y=-\frac{q}{2}$, а фокальный радиус точки $M\ (x;y)$ равен $r=y+\frac{q}{2}$.

Пример 3. Получить координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2=16x$. Вычислим расстояние от точки $M(1;4)$ параболы до фокуса.

Сравнивая уравнение $y^2=16x$ с уравнением $y^2=2px$, находим, что $2p=16$, откуда $p=8$, а $\frac{p}{2}=4$. Следовательно, фокус лежит в точке $F(4;0)$. В соответствии с формулой $x=-\frac{p}{2}$ получаем уравнение $x=-4$ директрисы параболы. Фокальный радиус точки $M\ (1;4)$ по формуле $r=\frac{p}{2}+x$ равен $r=4+1=5$.

2.8. Примеры решения задач

Задача 1. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 14, эксцентриситет $\varepsilon=\frac{7}{9}$.

Решение. Из условия задачи следует, что $2c=14$, тогда $c=7$. Так как $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{7}{9}$ и $c=7$, то $a=9$. Из равенства $b^2=a^2-c^2$ получаем $b^2=81-49=32$. Каноническое уравнение данного эллипса имеет вид $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{32}=1$.

Ответ. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{32}=1$.

Задача 2. Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная ось равна 6, эксцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{3}$.

Решение. Из условия задачи следует, что $2\ a=6$, тогда $a=3$. Так как $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$ и $a=3$, то $c=5$. Так как $b^2=c^2-a^2$, то $b^2=25-9=16$. Каноническое уравнение гиперболы примет вид $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

Ответ. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

Задача 3. Для эллипса $x^2+9y^2=9$ найти длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис.

Решение. Запишем уравнение эллипса в каноническом виде: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$. Тогда $a^2=9;\quad a=3;\quad b^2=1;\quad b=1$. Для эллипса $b^2=a^2-c^2, c^2=a^2-b^2$; $c^2=9-1=8,\quad c=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Тогда $F_1(-2\sqrt{2},0), F_2(2\sqrt{2},0)$.

Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Уравнения директрис имеют вид $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, получаем

$$x = \pm\frac{3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}, \quad x = \pm\frac{9}{2\sqrt{2}} \text{ или } x = \pm\frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ. $a=3$, $b=1$, $F_1(-2\sqrt{2}, 0), F_2(2\sqrt{2}, 0)$, $\varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $x = \pm\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Задача 4. Написать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(3;2)$, $N(3\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{2})$.

Решение. Чтобы составить каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, необходимо найти его полуоси, т.е. величины a и b. Так как эллипс проходит через точки M и N, их координаты должны удовлетворять уравнению эллипса. Подставляем в каноническое уравнение эллипса сначала координаты точки M, затем – точки N. Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными a и b:

$$\begin{cases} \frac{(3)^2}{a^2} + \frac{(2)^2}{b^2} = 1, \\ \frac{\left(3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1, \\ \frac{27}{2a^2} + \frac{2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 9b^2 + 4a^2 = a^2b^2, \\ 27b^2 + 4a^2 = 2a^2b^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9b^2 + 4a^2 = a^2b^2, \\ 18b^2 = a^2b^2, \end{cases} \quad \begin{cases} 9b^2 + 4a^2 = a^2b^2, \\ a^2 = 18, \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 = 8, \\ a^2 = 18. \end{cases}$$

Следовательно, каноническое уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Ответ. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Задача 5. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если даны уравнения асимптот $y=\pm\frac{1}{2}x$ и уравнения директрис $x = \pm\frac{24}{\sqrt{15}}$.

Решение. Каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Найдем значения a и b.

Общие уравнения асимптот y=$\pm\frac{b}{a}$. Сравнивая с данными в условии задачи уравнениями, находим, что $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$, отсюда a=2b. Сравнивая общие уравнения директрис x=$\pm\frac{a}{\varepsilon}$ с заданными уравнениями, получаем, что $\frac{a}{\varepsilon}=\frac{24}{\sqrt{15}}$, откуда $a=\frac{24}{\sqrt{15}}$ ε. Выразим эксцентриситет через полуоси гиперболы: ε=$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

Возведем обе части равенства в квадрат: ε^2=$\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}$. Подставляем в правую часть этого равенства полученное ранее равенство a=2b: ε^2=$1+\frac{b^2}{4b^2}=\frac{5}{4}$.

Чтобы найти a, возведем обе части равенства a=$\frac{24}{\sqrt{15}}\varepsilon$ в квадрат и подставим значение ε^2: a^2=$\frac{576}{15}\varepsilon^2$=$\frac{576}{15}\cdot\frac{5}{4}$=48. Итак, a^2=48, а отсюда b^2=12. При найденных значениях a^2 и b^2 каноническое уравнение гиперболы будет следующим: $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}=1$.

Ответ. $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}=1$.

Задача 6. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллисом $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1$ и проходящей через точку M (4$\sqrt{2}$;3).

Решение. Найдем фокусы эллипса. Из уравнения $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1$: a^2=35, b^2=10. По формуле c^2= a^2-b^2 находим c^2=35-10=25. Значит, фокусы эллипса имеют координаты F_1(5;0) и F_2(-5;0).

По условию задачи гипербола имеет с эллипсом общие фокусы. Значит, для искомой гиперболы в силу формулы c^2= a^2+b^2 имеет место равенство a^2-b^2=25, откуда a^2=25-b^2.

Каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ примет вид

$$\frac{x^2}{25-b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Точка M принадлежит гиперболе, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы. Получаем $\frac{(4\sqrt{2})^2}{25-b^2}-\frac{3^2}{b^2}=1$,

$$\frac{32}{25-b^2}-\frac{9}{b^2}=1,$$

$$32b^2-9(25-b^2)=b^2(25-b^2),$$
$$32b^2-225+9b^2=25b^2-b^4,$$
$$b^4+16b^2-225=0.$$

Решая полученное уравнение, получаем $b^2=9$. Тогда $a^2=25-9=16$. Следовательно, уравнение искомой гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Ответ. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Задача 7. Написать уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точки пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2+8y=0$.

Решение. Находим точки пересечения прямой и окружности, для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2+8y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y, \\ (-y)^2+y^2+8y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y, \\ 2y^2+8y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y, \\ 2y(y+4)=0, \end{cases}$$

$$2y(y+4)=0,\ y=0 \text{ или } y=-4.$$

Получаем $\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$ *и* $\begin{cases} x=4, \\ y=-4. \end{cases}$

Следовательно, O (0;0), M (4;-4) – искомые точки пересечения.

Уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через начало координат, имеет вид $x^2=2py$. Определим параметр p из условия, что парабола проходит через точку M(4;-4). Подставляем координаты этой точки в уравнение параболы и получаем $4^2=2p\cdot(-4)$, откуда $2p=-4$. Следовательно, искомое уравнение параболы имеет вид $x^2=-4y$.

Ответ. $x^2=-4y$.

3. Аналитическая геометрия в пространстве

3.1. Метод координат в пространстве

Деление отрезка в данном отношении

Координаты x,y,z точки M, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda \neq -1$, вычисляются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Если точка M – середина отрезка M_1M_2, то $\lambda = 1$ и формулы принимают вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

В этих формулах (x_1; y_1; z_1) – координаты точки M_1 – начала отрезка, (x_2; y_2; z_2) – координаты точки M_2 – конца отрезка.

Пример 1. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: A(3; -4; 7), B(-5; 3; -2), C(1; 2; -3). Найти его четвертую вершину D, противоположную B.

Решение. Пусть E – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Как известно, точка E делит диагонали пополам. Используя формулы, где за x_1, y_1, z_1 примем координаты точки A, а за x_2, y_2, z_2 – координаты точки C, находим координаты точки E:

$$x = \frac{3+1}{2} = 2,\ y = \frac{-4+2}{2} = -1,\ z = \frac{7-3}{2} = 2 \ \Rightarrow E(2; -1; 2).$$

Зная координаты точки E – середины отрезка BD, и координаты точки B – начала отрезка BD, вычисляем по этим же формулам координаты точки D – конца отрезка BD:

$$2 = \frac{-5 + x_2}{2} \Rightarrow x_2 = 9;\ -1 = \frac{3 + y_2}{2} \Rightarrow y_2 = -5;\ 2 = \frac{-2 + z_2}{2} \Rightarrow z_2 = 6.$$

Ответ. D(9; -5; 6)

Расстояние между двумя точками

Расстояние ρ между двумя точками A(x_1; y_1; z_1) и B(x_2; y_2; z_2), заданными относительно прямоугольной системы координат в пространстве, определяется формулой

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пример 2. На оси абсцисс найти точку, расстояние которой от точки A(-3; 4; 8) равно 12.

Решение. Так как искомая точка, обозначим ее B, лежит на оси абсцисс, то ее вторая и третья координаты равны нулю, т.е. B (x; 0; 0).

Выразим расстояние от точки B до точки A через координаты этих точек. Имеем

$$\rho(A,B)=\sqrt{(x-(-3))^2+(0-4)^2+(0-8)^2}=\sqrt{(x+3)^2+80}.$$

По условию задачи это расстояние равно 12:

$$\rho(A,B)=12,\ \sqrt{(x+3)^2+80}=12.$$

Решаем это уравнение:

$$x^2+6x+9+80=144,\ x^2+6x-55=0,\ x_1=5,\ x_2=-11.$$

Следовательно, на оси Ox находятся две точки, удовлетворяющие условию задачи: $B_1(5;\ 0;\ 0)$ и $B_2(-11;\ 0;\ 0)$.

Ответ. $B_1(5;\ 0;\ 0)$, $B_2(-11;\ 0;\ 0)$.

3.2. Уравнение поверхности и уравнение линии

Уравнение с тремя переменными вида $F(x;\ y;\ z)=0$ называется уравнением некоторой поверхности, если ему удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней.

С помощью уравнения поверхности аналитически записано то геометрическое свойство, которым обладают все точки данной поверхности. Следовательно, зная геометрические свойства точек некоторой поверхности, можно написать уравнение, определяющее эту поверхность.

Совокупность точек, координаты которых удовлетворяют двум уравнениям, составляет некоторую линию в пространстве – линию пересечения соответствующих поверхностей. То есть всякая линия в пространстве задается системой из двух уравнений, определяющих поверхности, пересечением которых она является:

$$\begin{cases} F(x;y;z)=0 \\ G(x;y;z)=0 \end{cases}.$$

Пример 1. Составить уравнение множества точек пространства, удаленных от точки $C(2;\ 1;\ -3)$ на расстояние, равное 5.

Решение. Пусть точка $M(x;\ y;\ z)$ – произвольная точка искомого множества. Тогда согласно условию $\rho(M,C)=5$, т.е. $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2}=5$. Возведем обе части этого равенства в квадрат, получим $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$. Это уравнение сферы с центром в точке $C(2;\ 1;\ -3)$ и радиусом $r=5$.

Ответ. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$.

3.3. Плоскость

Всякая плоскость относительно некоторой прямоугольной системы координат в пространстве определяется уравнением первой степени и обратно: каждое уравнение первой степени определяет плоскость.

Различные способы задания плоскости

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам.

Пусть относительно некоторой прямоугольной системы координат в пространстве дана точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ некоторой плоскости и два неколлинеарных вектора $\vec{l}\,(l_1;l_2;l_3)$, $\vec{m}(m_1;m_2;m_3)$, параллельные этой плоскости.

Тогда уравнение плоскости можно записать так: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$

или в виде:

$$x = x_0 + l_1u + m_1v,$$
$$y = y_0 + l_2u + m_2v,$$
$$z = z_0 + l_3u + m_3v,$$

где u, v – параметры. Последние уравнения называются параметрическими уравнениями плоскости.

Пример 1. Если плоскость проходит через точку $A(3;7;2)$ параллельно двум векторам $\vec{a}\,(4;1;2)$ и $\vec{b}\,(5;3;1)$, то уравнением этой плоскости будет уравнение вида:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z-2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$(x\text{-}3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (y\text{-}7)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (z\text{-}2)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0,\ 5x\text{-}6y\text{-}7x\text{+}41=0.$$

Можно написать и параметрические уравнения этой же плоскости:

$$x=3+4u+5v,$$
$$y=7+u+3v,$$
$$z=2+2u+v.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

Если относительно некоторой прямоугольной системы координат в пространстве даны точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, принадлежащие некоторой плоскости, то уравнение этой плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 2. Пусть плоскость проходит через точки $M_1(2;\ 0;\ \text{-}1)$, $M_2(\text{-}2;\ 4;\ 1)$, $M_3(0;\ 2;\ \text{-}1)$. Тогда ее уравнение получаем так:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-(-1) \\ -2-2 & 4-0 & 1-(-1) \\ 0-2 & 2-0 & -1-(-1) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение искомой плоскости

$$x+y-2=0.$$

Уравнение плоскости в «отрезках»

Если некоторая плоскость отсекает на осях координат отрезки: a– на оси Ox, b – на оси Oy, c – на оси Oz, то уравнение этой плоскости имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Пример 3. Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях координат Ox и Oy отрезки, соответственно равные 5 и -5, и проходящей через точку $A(1;\, 1;\, 2)$.

Решение. Известны отрезки $a=5$ и $b=-5$. Следовательно, уравнение искомой плоскости будет таким: $\frac{x}{5}+\frac{y}{-5}+\frac{z}{c}=1$. Неизвестный отрезок c, отсекаемый плоскостью на оси Oz, найдем из условия, что плоскость проходит через точку A, т.е. координаты точки A должны удовлетворять уравнению плоскости:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{-5}+\frac{2}{c}=1,\ \frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{2}{c}=1,\ \frac{2}{c}=1,\ c=2.$$

Ответ. $\frac{x}{5}+\frac{y}{-5}+\frac{z}{2}=1$.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть относительно некоторой прямоугольной системы координат плоскость проходит через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A;\, B;\, C)$. Уравнение этой плоскости будет иметь вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Пример 4. Написать уравнение плоскости, зная, что точка $P(3;\, -6;\, 2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

Решение. Так как искомая плоскость проходит через точку P, то $x_0=3$; $y_0=-6$; $z_0=2$. Вектор $\overrightarrow{OP}$ будет вектором нормали к данной плоскости и его координаты совпадают с координатами точки P, $\overrightarrow{OP}(3;\, -6;\, 2)$. Отсюда $A=3$; $B=-6$; $C=2$. Следовательно, получим уравнение плоскости

$$3(x-3)-6(y+6)+2(z-2)=0,\ 3x-6y+2z-49=0.$$

Общее уравнение плоскости. Условие параллельности вектора некоторой плоскости

Какими бы способами ни была задана плоскость, ее уравнение можно привести к виду

$$Ax + By + Cz + D = 0 .$$

Это уравнение называется общим уравнением плоскости.

Если плоскость задана относительно прямоугольной системы координат, то коэффициенты A, B, C этого уравнения служат координатами вектора нормали к данной плоскости: $\vec{n}\,(A;\, B;\, C)$.

Вектор $\vec{p}(p_1; p_2; p_3)$ параллелен плоскости, определяемой уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$Ap_1+Bp_2+Cp_3=0.$$

Пример 5. Вектор $\vec{p}(0;6;4)$ параллелен плоскости $x+2y-3z+1=0$, так как данное условие выполняется ($A=1$; $B=2$; $C=-3$; $p_1=0$; $p_2=6$; $p_3=4$). Получаем

$$1\cdot 0 + 2\cdot 6 - 3\cdot 4 = 0 + 12 - 12 = 0 .$$

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ до плоскости, определяемой в прямоугольной системе координат общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, находится с помощью формулы

$$\rho(M_0, \delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Пример 6. Так, расстояние от точки $A(3;\, 1;\, -1)$ до плоскости, заданной уравнением $22x+4y-20z-45=0$, равно

$$\rho(A, \delta) = \frac{|22\cdot 3 + 4\cdot 1 + (-20)\cdot(-1) - 45|}{\sqrt{22^2 + 4^2 + (-20)^2}} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2} .$$

Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Пусть заданы относительно прямоугольной системы координат две плоскости своими общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Угол φ между этими плоскостями вычисляется как угол между нормальными векторами плоскостей $\vec{n}_1(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2(A_2;B_2;C_2)$:

$$\cos\varphi = \cos(\vec{n}_1 \widehat{,} \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} .$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей есть условие перпендикулярности векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 + C_1\cdot C_2 = 0 .$$

Условие параллельности двух плоскостей есть условие коллинеарности двух векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Условие совпадения двух плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

Пример 7. Определить, при каком значении l плоскости, определяемые уравнениями $3x$-$5y$+lz-3=0, x+$3y$+$2z$+5=0, будут взаимно перпендикулярны.

Решение. Для нахождения l используем условие перпендикулярности двух плоскостей. Из уравнения первой плоскости A_1=3, B_1=-5, C_1= l. Из уравнения второй плоскости A_2=1, B_2=3, C_2=2.

Подставляем эти значения в условие перпендикулярности:

$$3\cdot 1+(-5)\cdot 3+l\cdot 2=0,\ 2l=12,\ l=6.$$

Ответ. l=6.

3.4. Прямая в пространстве

Вектор, параллельный прямой, называется направляющим вектором прямой.

Различные способы задания прямой. Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$, определяется или параметрическими уравнениями

$$x=x_0+a_1t,$$
$$y=y_0+a_2t,$$
$$z=z_0+a_3t,$$

где t – параметр, принимающий произвольные значения, или каноническими уравнениями вида:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}.$$

(В этом уравнении отношения рассматриваются как пропорция, а не как дроби.)

Пример 1. Составим параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1;-1;-3)$ параллельно прямой, заданной каноническими уравнениями $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$. Так как искомая прямая должна быть параллельна данной, следовательно, обе они имеют один и тот же направляющий вектор. Из уравнения данной прямой находим координаты общего направляющего вектора $\vec{a}(5;2;-1)$. Так как для искомой прямой x_0=1, y_0=-1, z_0=-3 (координаты точки M_1), запишем параметрические уравнения

$$x = 1+5t,$$
$$y = -1+2t,$$
$$z = -3-t.$$

Прямая как линия пересечения двух плоскостей

Прямая как линия пересечения двух плоскостей определяется системой уравнений этих плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Координаты a_1, a_2, a_3 направляющего вектора $\vec{a}$ этой прямой равны:

$$a_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\ a_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\ a_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \text{ т.е. } \vec{a}(a_1; a_2; a_3).$$

Пример 2. Даны уравнения прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$$

Напишем параметрические уравнения этой прямой. Для этого найдем координаты направляющего вектора $\vec{a}$ этой прямой:

$$a_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 4, \qquad a_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 14, \qquad a_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8, \text{ т.е. } \vec{a}\,(4;14;8).$$

В параметрические уравнения входят координаты (x_0; y_0; z_0) некоторой точки M_0, через которую проходит прямая. Чтобы их вычислить, решим систему уравнений, задающих прямую:

$$\begin{cases} \mathrm{x} - 2\mathrm{y} + 3\mathrm{z} - 4 = 0, \\ 3\mathrm{x} + 2\mathrm{y} - 5\mathrm{z} - 4 = 0, \end{cases}$$

поскольку координаты M_0 должны удовлетворять уравнению прямой. Придавая z_0 произвольное значение, например $z_0=0$, получаем x_0 и y_0:

$$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 4 = 0. \end{cases},\ \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = -1 \end{cases},\ M_0(2;\ -1;\ 0).$$

Отсюда параметрические уравнения прямой

$$x = 2+4t,$$
$$y = -1+14t,$$
$$z = 8t.$$

Уравнения прямой, проходящей через две точки

Канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пример 3. Даны вершины треугольника $A(3;-1;-1)$, $B(1;\ 2;\ -7)$, $C(-5;\ 14;\ -3)$. Составить уравнение биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

Решение. Чтобы написать уравнение биссектрисы, надо найти координаты точки пересечения ее с противоположной стороной AC. Для этого воспользуемся тем свойством биссектрисы, что она делит противоположную сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам. С помощью этого свойства найдем отношение λ, в котором точка D – точка пересечения биссектрисы со стороной AC – делит отрезок AC:

$$\lambda = \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{(1-3)^2 + (2-(-1))^2 + (-7-(-1))^2}}{\sqrt{(-5-1)^2 + (14-2)^2 + (-3-(-7))^2}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{196}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

Итак, точка D делит отрезок AC в отношении $\frac{1}{2}$. Находим координаты точки D, принимая во внимание, что точка A – начало отрезка, точка C– конец:

$$x = \frac{3+\frac{1}{2}(-5)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3};\ y = \frac{-1+\frac{1}{2}\cdot 14}{1+\frac{1}{2}} = 4;\ z = \frac{-1+\frac{1}{2}(-3)}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{5}{3}.$$

Значит, $D(\frac{1}{3};4;-\frac{5}{3})$.

Уравнения биссектрисы запишем как уравнения прямой, проходящей через две точки B и D:

$$\frac{x-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z+7}{-\frac{5}{3}+7},\ \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+7}{16}.$$

Ответ. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+7}{16}$.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть относительно некоторой прямоугольной системы координат даны две прямые, определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x_1 + a_1 t, & x &= x_2 + b_1 t,\\ y &= y_1 + a_2 t, & y &= y_2 + b_2 t,\\ z &= z_1 + a_3 t, & z &= z_2 + b_3 t. \end{aligned}$$

Первая прямая проходит через точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ параллельно вектору $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$, а вторая прямая проходит через точку $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ параллельно вектору $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$.

Если эти прямые скрещиваются, то выполняется условие

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Если же прямые лежат в одной плоскости, то три вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ должны быть компланарны, следовательно,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Угол φ между прямыми, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат, равен углу между направляющими векторами этих прямых и определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} .$$

Условие параллельности двух прямых есть условие коллинеарности направляющих векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} .$$

Условие перпендикулярности прямых в случае, когда прямые заданы в прямоугольной системе координат, есть условие перпендикулярности направляющих векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

Пример 4. Проверим, пересекаются ли прямые, заданные уравнениями

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-5}{4} \text{ и } \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1} .$$

Если прямые пересекаются, то они лежат в одной плоскости, и в этом случае должно выполняться приведенное условие. Проверим его. Первая прямая проходит через точку с координатами (1; 7; 5) и имеет направляющий вектор $\vec{a}$(2; 1; 4). На второй же прямой лежит точка с координатами (6; -1; 0) и ей параллелен вектор $\vec{b}$ (3; -2; 1). Подставляем эти значения в условие

$$\begin{vmatrix} 6-1 & -1-7 & 0-5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -8 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 96 - 96 = 0 .$$

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости выполняется. Но заданные прямые могут быть параллельны. Проверяем это условие:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{2}{3},\ \frac{a_2}{b_2}=-\frac{1}{2},\ \frac{a_3}{b_3}=4, \text{ тогда } \frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}\neq\frac{a_3}{b_3}.$$

Условие параллельности прямых не выполняется, следовательно, данные прямые пересекаются.

3.5. Прямая и плоскость

Взаимное расположение прямой и плоскости

Необходимым и достаточным условием того, что плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая

$$x=x_0+a_1t,$$
$$y=y_0+a_2t,$$
$$z=z_0+a_3t$$

пересекаются, является условие: $Aa_1+Ba_2+Ca_3\neq 0$.

Чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, необходимо решить систему из уравнения плоскости и параметрических уравнений прямой

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ x=x_0+a_1t, \\ y=y_0+a_2t, \\ z=z_0+a_3t. \end{cases}$$

Если прямая и плоскость параллельны, то выполняются условия

$$\begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0. \end{cases}$$

Условиями принадлежности прямой некоторой плоскости являются

$$\begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases}$$

Пример 1. Найдем точку пересечения плоскости $3x+5y-z-2=0$ с прямой, заданной каноническими уравнениями $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$. Задача решается просто, если уравнение прямой записать в параметрическом виде. Так как координаты точки, через которую проходит прямая, равны $x_0=12$; $y_0=9$; $z_0=1$, а направляющий вектор прямой $\vec{a}(4;3;1)$, то параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x=12+4t, \\ y=9+3t, \\ z=1+t. \end{cases}$$

Далее решаем систему:

$$\begin{cases} 3x+5y-z-2=0, \\ x=12+4t, \\ y=9+3t, \\ z=1+t. \end{cases}$$

В уравнение плоскости вместо текущих координат x, y, z подставляем их выражения через t из уравнений прямой:

$$3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0,\ t=-3.$$

Подставив значение t в уравнения прямой, находим координаты точки пересечения этой прямой с плоскостью: $x=0$, $y=0$, $z=-2$, $A(0;\ 0;\ -2)$.

Угол между прямой и плоскостью. Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть относительно прямоугольной системы координат в пространстве даны плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая $x=x_0+a_1t$, $y=y_0+a_2t$, $z=z_0+a_3t$.

Угол между ними определяется из соотношения

$$\sin\varphi=\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Необходимым и достаточным условием параллельности прямой и плоскости является условие перпендикулярности векторов $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{n}(A;B;C)$:

$$\frac{A}{a_1}=\frac{B}{a_2}=\frac{C}{a_3}.$$

Пример 2. При каких значениях l и C прямая $\frac{x-2}{l}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна плоскости $3x-2y+Cz+1=0$?

Решение. Составим условие перпендикулярности данных прямой и плоскости:

$$\frac{3}{l}=\frac{-2}{4}=\frac{C}{-3},\quad \begin{matrix}-2l=12,\\ 4C=6,\end{matrix}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}l=-6,\\ C=\frac{3}{2}.\end{matrix}$$

Ответ. $l=-6; C=\frac{3}{2}$.

3.6. Примеры решения задач

Задача 1. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(3;\ 1;\ -2)$ и через прямую, заданную уравнением $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$.

Решение. Чтобы написать уравнение плоскости, необходимо знать координаты точки, лежащей в плоскости, и координаты двух неколлинеарных векторов, параллельных плоскости. Из условия задачи известны координаты точки A. Так как искомая плоскость должна проходить через заданную прямую, следовательно, направляющий вектор прямой $\vec{a}(5;2;1)$ параллелен и плоскости. Точка $M_0(4;\ -3;\ 0)$, через которую проходит прямая, будет лежать также в искомой плоскости. Поэтому можно найти координаты еще одного вектора $\overrightarrow{AM_0}$ (1; -4; 2), параллельного плоскости.

Теперь для составления уравнения плоскости есть все необходимые данные:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z+2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ 8x\text{-}9y\text{-}22z\text{-}59=0.$$

Ответ. $8x-9y-22z-59=0$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; -5; 1)$ и параллельной плоскости $x-2y+4z=0$.

Решение: Нормальный вектор данной плоскости $\vec{n}(1;-2;4)$ является и нормальным вектором искомой плоскости. Тогда используем уравнение плоскости по координатам данной точки и нормальному вектору:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Получаем $1\cdot(x-3)-2\cdot(y+5)+4\cdot(z-1)=0$, т.е. $x-2y+4z-17=0$.

Ответ. $x-2y+4z-17=0$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку C, делящую отрезок AB в отношении $\lambda=-\frac{1}{3}$, где $A(-1; 2; 4)$, $B(15; 12; -6)$, перпендикулярно прямой $\begin{cases} 3x-5y+3z-6=0, \\ x+3y-5z+1=0. \end{cases}$

Решение. Находим координаты точки C, лежащей в искомой плоскости:

$$x=\frac{-1+(-\frac{1}{3})\cdot 15}{1-\frac{1}{3}}=-9, \quad y=\frac{2+(-\frac{1}{3})\cdot 12}{1-\frac{1}{3}}=-6, \quad z=\frac{4+(-\frac{1}{3})(-6)}{1-\frac{1}{3}}=9$$

(здесь точка A – начало отрезка, точка B – конец отрезка).

Итак, $C(-9; -6; 9)$.

Искомая плоскость должна быть перпендикулярна заданной прямой, следовательно, направляющий вектор прямой $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ является вектором нормали к плоскости. Вычислим координаты вектора $\vec{a}$:

$$a_1=\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=16, \ a_2=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}=18, \ a_3=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=14, \text{ т.е. } \vec{a}(16; 18; 14).$$

Уравнение искомой плоскости можно написать в виде

$$16(x+9)+18(y+6)+14(z-9)=0, \quad 8x+9y+7z+63=0.$$

Ответ. $8x+9y+7z+63=0$.

Задача 4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;4;-6)$ перпендикулярно плоскости $2x-5y+6z-1=0$.

Решение. Нормальный вектор данной плоскости $\vec{n}(2; -5; 6)$ будет направляющим вектором искомой прямой, т.е. $\vec{n}(2;-5;6)$ параллелен прямой, уравнение которой мы должны написать. Запишем уравнение искомой прямой, проходящей через точку A, в каноническом виде:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z+6}{6}.$$

Ответ. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z+6}{6}$.

Задача 5. Найти расстояние от точки $M_0(2;3;8)$ до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 где $M_1(1;1;2), M_2(-1;1;3), M_3(2;-2;4)$.

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3.

Получаем $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0$ или $(x-1)\cdot 3-(y-1)\cdot(-5)+(z-2)\cdot 6=0$,

$$3x+5y+6z-20=0.$$

Находим расстояние от точки M_0 до полученной плоскости:

$$\rho(M_0,\alpha)=\frac{|3\cdot 2+5\cdot 3+6\cdot 8-20|}{\sqrt{9+25+36}}=\frac{49}{\sqrt{70}}=\sqrt{\frac{343}{10}}.$$

Ответ. $\sqrt{\frac{343}{10}}$.

Задача 6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A(-3; -1; 7) перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$, если B(0; 2; -6), C(2; 3; -5).

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0;y_0;z_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(A,B,C)$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Находим координаты вектора $\overrightarrow{BC}$, получаем (2; 1; 1). Составляем уравнение искомой плоскости

$$2(x+3)+(y+1)+(z-7)=0,\ 2x+y+z=0.$$

Ответ. $2x+y+z=0$.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $x-y+7z-1=0$, $2x-2y-5=0$.

Решение. Из общих уравнений плоскостей выпишем координаты нормальных векторов этих плоскостей, получаем $\vec{n}_1(1;-1;7)$, $\vec{n}_2(2;-2;0)$.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{n}_1\,\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{2+2}{\sqrt{1+1+49}\cdot\sqrt{4+4}}=\frac{4}{\sqrt{51}\cdot\sqrt{8}}=\frac{2}{\sqrt{102}}.$$

Ответ. $\frac{2}{\sqrt{102}}$.

Задача 8. Написать канонические уравнения прямой.

$$\begin{cases} 2x+3y-2z+6=0, \\ x-3y+z+3=0. \end{cases}$$

Решение. Канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3},$$

где $\vec{p}(p_1;p_2;p_3)$ – направляющий вектор прямой.

Находим координаты этого вектора: $\vec{n}_1(2;3;-2)$, $\vec{n}_2(1;-3;1)$, тогда

$$\vec{p}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-3\vec{i}-4\vec{j}-9\vec{k}.$$

Найдем координаты точки M_0, лежащей на данной прямой. Пусть z=0, тогда $\begin{cases} 2x+3y+6=0, \\ x-3y+3=0. \end{cases}$ Получаем x=-3, y=0, т.е. $M_0(-3;0;0)$. Запишем каноническое уравнение прямой $\frac{x+3}{-3}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{-9}$ или $\frac{x+3}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{9}$.

Ответ. $\frac{x+3}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{9}$.

Задача 9. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2}$ и плоскости $3x-y+4z=0$.

Решение. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$x=2+4t,\ y=1-3t,\ z=-3-2t.$$

Подставим значения x, y, z в уравнение плоскости, получаем

$$3(2+4t)-(1-3t)+4(-3-2t)=0,$$

$$6+12t-1+3t-12-8t=0,$$

$$7t=7,\ t=1,$$

тогда точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты x=6, y=-2, z=-5.

Ответ. M(6; -2; -5).

Задача 10. Найти точку M', симметричную точке M(3; -3; -1) относительно плоскости $2x-4y-4z-13=0$.

Решение. Составим уравнение прямой в параметрическом виде:

$$x=3+2t,\ y=-3-4t,\ z=-1-4t.$$

Найдем координаты точки O.

$$2(3+2t)-4(-3-4t)-4(-1-4t)-13=0;$$

$$6+4t+12+16t+4+16t-13=0;$$

$$36t = -9$$

$$t = -\frac{1}{4}, \text{ тогда } x_0 = \frac{5}{2}, y_0 = -2, z_0 = 0.$$

Точка O является серединой отрезка MM', тогда

$$x_0 = \frac{x + x'}{2}, y_0 = \frac{y + y'}{2}, z_0 = \frac{z + z'}{2}.$$

Отсюда находим координаты M'

$$\frac{5}{2} = \frac{3 + x'}{2}, \quad x' = 2;$$

$$-2 = \frac{-3 + y'}{2}, \quad y' = -1;$$

$$0 = \frac{-1 + z'}{2}, \quad z' = 1,$$

т.е. M' (2; -1; 1).

Ответ. M' (2; -1; 1).

3.7. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, координаты которых относительно некоторой системы координат удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0.$$

Сфера

В прямоугольной системе координат уравнение сферы с центром в точке $C(a; b; c)$ и радиусом R имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Пример 1. Написать уравнение сферы, имеющей центр в точке $C(6;-8;3)$ и касающейся оси Ox.

Решение. Чтобы написать уравнение сферы, надо найти ее радиус R. Он будет равен расстоянию от центра сферы C до точки A касания сферы с осью Ox. Так как точка A лежит на оси Ox, то ее координаты равны: $y=0$, $z=0$, $x=6$, т.е. $A(6;0;0)$. Следовательно,

$$R = \rho(A, C) = \sqrt{(6-6)^2 + (-8-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{73}$$

Получим уравнение сферы $(x-6)^2+(y+8)^2+(z-3)^2=73$.

Ответ: $(x-6)^2+(y+8)^2+(z-3)^2=73$.

Пример 2. Определить координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением

$$x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=0.$$

Решение. Выделяем в заданном уравнении полные квадраты:

$$(x^2-6x)+(y^2+8y)+(z^2+2z)+10=0,$$

$$(x^2-6x+9)-9+(y^2+8y+16)-16+(z^2+2z+1)-1+10=0,$$

$$(x-3)^2+(y+4)^2+(z+1)^2=16.$$

Отсюда, центр сферы $C(3; -4; -1)$, радиус $R=4$.

Ответ: $C(3; -4; -1)$, $R=4$.

Эллипсоид

Относительно прямоугольной системы координат эллипсоид определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где числа a, b, c – полуоси эллипсоида.

В случае задания эллипсоида каноническим уравнением плоскости симметрии эллипсоида совпадают с координатными плоскостями системы координат, оси симметрии – с координатными осями, а центр симметрии (центр эллипсоида) совпадает с началом координат. Точки пересечения осей симметрии эллипсоида с его поверхностью называются вершинами эллипсоида.

При исследовании эллипсоида методом параллельных сечений получаются следующие линии второго порядка.

Сечения плоскостями, параллельными координатной плоскости xOy, задаются системой

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

а) при $|h|<c$ в плоскости $z=h$ лежит эллипс;

б) при $|h|=c$ в плоскости $z=h$ получаем точку (вершину эллипсоида);

в) при $|h|>c$ плоскость $z=h$ не пересекает эллипсоид.

В случаях сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям yOz и xOz, получаем линии, аналогичные приведенным.

Однополостный гиперболоид

Каноническое уравнение однополостного гиперболоида имеет вид (прямоугольная система координат):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Числа a, b называются действительными полуосями, число c – мнимой полуосью однополостного гиперболоида. При $a=b$ гиперболоид называется гиперболоидом вращения. Если однополостный гиперболоид определяется каноническим уравнением, то плоскости симметрии совпадают с координатными плоскостями системы координат, оси симметрии – с осями координат, а центр симметрии (центр однополостного гиперболоида) – с началом координат. Точки пересечения однополостного гиперболоида с осями симметрии, совпадающие с осями Ox и Oy, называются его вершинами.

При исследовании однополостного гиперболоида методом сечений плоскостями, параллельными координатной плоскости *xOy,* получаются линии, определяемые уравнениями $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$

При любых значениях h в плоскости $z=h$ будет лежать эллипс.

Сечения плоскостями, параллельными координатной плоскости xOz, дают следующие линии: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}$

а) если $|h|>b$, в плоскости $y=h$ лежит гипербола;

б) при $|h|=b$ в плоскости $y=h$ лежит пара действительных пересекающихся прямых;

в) при $|h|<b$ в плоскости $y=h$ находится гипербола.

В плоскостях сечения $x=h$ лежат линии, аналогичные находящимся в плоскостях $y=h$.

Двуполостный гиперболоид

Двуполостный гиперболоид определяется каноническим уравнением (система координат прямоугольная):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Число a называется действительной полуосью, b, c – мнимые полуоси.

При $a=b$ уравнение определяет двуполостный гиперболоид вращения.

Если двуполостный гиперболоид задан каноническим уравнением, то координатные плоскости системы координат являются плоскостями симметрии поверхности, координатные оси – осями симметрии и начало системы координат – центром симметрии (центром двуполостного гиперболоида). Две точки пересечения двуполостного гиперболоида с осью симметрии, совпадающей с Ox, называются его вершинами.

Исследование двуполостного гиперболоида сечениями плоскостями, параллельными координатной плоскости xOy, дает линии второго порядка, уравнения которых имеют вид $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$

При любых значениях h в плоскости $z=h$ лежит гипербола.

В плоскостях сечения $y=h$ также лежат гиперболы.

Сечения плоскостями, параллельными координатной плоскости yOz, задаются уравнениями $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{h^2}{a^2}-1, \\ x=h. \end{cases}$

а) При $|h|>a$ в плоскости $x=h$ лежит эллипс;

б) при $|h|=a$ в плоскости $x=h$ получаем точку (вершину гиперболоида);

в) при $|h|<a$ плоскость $x=h$ не пересекает эту поверхность.

Эллиптический параболоид

В прямоугольной системе координат каноническое уравнение эллиптического параболоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z .$$

При $a=b$ уравнение определяет параболоид вращения.

Если эллиптический параболоид задан каноническим уравнением, то плоскостями симметрии поверхности являются координатные плоскости xOz и yOz; осью симметрии – ось Oz, она называется осью параболоида. Точка пересечения параболоида с его осью называется вершиной, она совпадает с началом координат.

При сечении эллиптического параболоида плоскостями, параллельными координатной плоскости xOy, получаются линии, уравнения которых $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2h\\ z=h.\end{cases}$,

а) если $h>0$, в плоскости $z=h$ лежит эллипс;

б) если $h=0$, в плоскости xOy лежит точка – вершина параболоида;

в) если $h<0$, то плоскость $z=h$ не пересекает поверхность.

Сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям xOz и yOz, дают линии, определяемые, соответственно, уравнениями

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=2z-\dfrac{y^2}{b^2},\\ y=h.\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}=2z-\dfrac{h^2}{a^2},\\ x=h.\end{cases}$$

При любых значениях h в плоскостях $y=h$ и $x=h$ лежат параболы.

Гиперболический параболоид

Относительно прямоугольной системы координат гиперболический параболоид определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z .$$

Если гиперболический параболоид задан таким уравнением, то координатные плоскости xOz и yOz, являются его плоскостями симметрии, а ось Oz – осью симметрии.

При исследовании поверхности методом сечения плоскостями, параллельными координатной плоскости xOy, получаем линии, определяемые уравнениями $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2h\\ z=h.\end{cases}$, а) при $h>0$ в плоскости $z=h$ лежит гипербола;

б) при $h=0$ в плоскости $z=h$ находится пара пересекающихся прямых;

в) при $h<0$ в плоскости $z=h$ лежит гипербола.

Сечения плоскостями, параллельными координатной плоскости xOz дают линии, уравнения которых $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 2z + \dfrac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$

При любых h в плоскости $y=h$ лежит парабола. В плоскостях сечения, параллельных координатной плоскости yOz, лежат параболы, уравнения которых $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = -2z + \dfrac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$

3.8. Примеры решения задач

Задача 1. Установить, что плоскость x-2=0 пересекает эллипсоид $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.

Решение. Получим уравнение линии второго порядка, лежащей в плоскости сечения x-2=0. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ x - 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{2^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ x = 2; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} = \dfrac{3}{4}, \\ x = 2; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{3} = 1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Итак, в плоскости x-2=0 лежит линия, уравнение которой $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{3} = 1$, т.е. эллипс, с полуосями $b=3$, $c=\sqrt{3}$. Вершины этого эллипса находятся в точках $B_1(2; 3; 0)$, $B_2(2; -3; 0)$ и $C_1(2; 0; \sqrt{3})$, $C_2(2; 0; -\sqrt{3})$.

Ответ. $b=3$, $c=\sqrt{3}$, $B_1(2; 3; 0)$, $B_2(2; -3; 0)$, $C_1(2; 0; \sqrt{3})$, $C_2(2; 0; -\sqrt{3})$.

Задача 2. Исследовать методом сечений и определить вид поверхности, заданной уравнением $4x^2+4y^2-z^2-16y+20=0$.

Решение. Выделяя в данном уравнении полные квадраты, приведем его к каноническому виду:

$$4x^2+(4y^2-16y)-z^2+20=0,$$
$$4x^2+4(y^2-4y+4)-16-z^2+20=0,$$
$$4x^2+4(y-2)^2-z^2=4,$$
$$\frac{x^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{1} - \frac{z^2}{4} = 1.$$

Получили уравнение однополостного гиперболоида вращения, центр которого находится в точке $O'(0; 2; 0)$. Перенесем начало исходной системы координат в эту точку. Формулы преобразования координат в этом случае будут

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y'+2 \\ z = z', \end{cases}$$

И в новой системе координат уравнение однополостного гиперболоида принимает канонический вид $\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{1}-\frac{z'^2}{4}=1.$

Пересекаем поверхность плоскостями $z'=h$. Решаем систему

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{1}-\frac{z'^2}{4}=1, \\ z' = z. \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{1}=1+\frac{h^2}{4}, \\ z' = h. \end{cases}$$

В плоскости $z'=h$ при любых значениях h лежит окружность, причем окружность будет наименьшего радиуса R=1 при h=0:

Сечения плоскостями $y'=h$ $\quad \begin{cases} \frac{x'^2}{1}-\frac{z'^2}{1}=1-h^2, \\ y' = h. \end{cases}$

Если $|h|>1$, в плоскости $y'=h$ лежит гипербола. При $h=\pm 1$ в плоскости $y'=\pm 1$ лежит линия, определяемая уравнением $\frac{x'^2}{1}-\frac{z'^2}{4}=1.$ Это пара действительных пересекающихся прямых.

Если $|h|>1$, в плоскости $y'=h$ находится гипербола.

Виды линий второго порядка в плоскостях сечения $x'=h$ совпадают с теми, которые лежат в плоскостях $y'=h$.

Задача 3. Исследовать методом сечений поверхность $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$.

Решение.

а) Пусть $x=h$, тогда $\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1-\frac{h^2}{16}$.

Возможны случаи:

1) $1-\frac{h^2}{16}>0, \quad h^2<16, \quad -4<h<4$.

Если $-4<h<4$, то в сечении плоскостью $x=h$ получаем эллипс, полуоси которого равны $a=\sqrt{12(1-\frac{h^2}{16})}, \quad b=2\sqrt{1-\frac{h^2}{16}}$.

2) $1-\frac{h^2}{16}=0, \quad h=\pm 4$. В этом случае в сечении мы получаем единственную точку $A(\pm 4; 0; 0)$. Плоскость касается данной поверхности.

3) $1-\frac{h^2}{16}<0, \quad h^2>16, \quad h>4, \quad h<-4$.

В этом случае плоскость и поверхность общих точек не имеют.

б) Пусть $y=h$, тогда $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1-\frac{h^2}{12}$.

1) Если $-\sqrt{12}<h<\sqrt{12}$, то в сечении получаем эллипс с полуосями $a=4\sqrt{1-\frac{h^2}{12}}, \quad b=2\sqrt{1-\frac{h^2}{12}}$.

2) Если $h=\pm\sqrt{12}$, то в сечении получаем единственную точку $B(0;\pm\sqrt{12};0)$.

3) Если $h>\sqrt{12}, \quad h<\sqrt{-12}$, то точек пересечения нет.

в) Сечение плоскостью $z=h$ аналогично рассмотренным в пунктах а,б.

Итак, данная поверхность представляет собой эллипсоид с полуосями $a=4, \quad b=2\sqrt{3}, \quad c=2$.

Ответ. Эллипсоид с полуосями $a=4, \quad b=2\sqrt{3}, \quad c=2$.

4. Матрицы, основные действия над ними

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из действительных или комплексных чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Горизонтальные ряды чисел матрицы называются ее *строками*, а вертикальные – *столбцами*. Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*. Матрицу, имеющую m строк и n столбцов, называют матрицей размеров $m \times n$. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной порядка* n.

4.1. Действия над матрицами

Сложение матриц

Пусть заданы две матрицы одинаковых размеров $m \times n : A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$. Их *суммой A+B* называется матрица размеров $m \times n$ $C = A + B = (c_{ij})$, такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,2,...,m$; $j = 1,2,...,n$. Другими словами, при сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

Произведение матрицы на число

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ *размеров* $m \times n$ *на число* α (или числа α на матрицу $A = (a_{ij})$) называется матрица $B = (b_{ij})$ размеров $m \times n$, такая, что $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = 1,2,...,m$; $j = 1,2,...,n$. Произведение матрицы *A* на число α обозначается *A*α или α*A*.

Разность матриц *A-B* определим следующим образом: *A-B=A+(-B)*.

Произведение матриц

Матрицу *A* будем называть *согласованной* с матрицей *B*, если число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*. (Из согласованности матрицы *A* с *B* не следует согласованность матрицы *B* с *A*.)

Произведение матрицы *A* на матрицу *B* вводится только тогда, когда матрица *A* согласована с матрицей *B*, т.е. если *A* есть матрица размеров $m \times n$, а *B* – размеров $n \times k$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ *на матрицу* $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размеров $m \times k$, такая, что $c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}$.

Произведение матрицы *A* на матрицу *B* обозначается *AB*.

Из определения следует, что элемент матрицы AB, стоящий в i–й строке и j–м столбце, равен сумме произведений элементов i–й строки матрицы A на соответствующие элементы j–го столбца матрицы B.

Произведение AB часто называют произведением матрицы A на матрицу B справа или произведением матрицы B на матрицу A слева.

Если произведение AB существует, то произведение BA, вообще говоря, не существует. Если AB и BA существуют, то возможно, $AB \neq BA$.

Если $AB = BA$, то матрицы называются *перестановочными* или *коммутирующими.*

4.2. Примеры решения задач

Задача 1. Найти сумму и разность матриц A и B, а также произведение матрицы A на число α=-3.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрицы A и B имеют одинаковые размеры, следовательно, для них определена операция сложения (вычитания). Найдем сумму матриц:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4+1 & 2+(-3) & 3+2 \\ 4+3 & -5+(-4) & 2+1 \\ -2+2 & 3+(-5) & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 7 & -9 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Разность матриц будет равна

$$A - B = \begin{pmatrix} 4-1 & 2-(-3) & 3-2 \\ 4-3 & -5-(-4) & 2-1 \\ -2-2 & 3-(-5) & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы A на число α=-3 есть матрица

$$\alpha A = \begin{pmatrix} -3\cdot 4 & -3\cdot 2 & -3\cdot 3 \\ -3\cdot 4 & -3\cdot(-5) & -3\cdot 2 \\ -3\cdot(-2) & -3\cdot 3 & -3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -6 & -9 \\ -12 & 15 & -6 \\ 6 & -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найти произведения матриц AB и BA, если они существуют:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1) Матрица A согласована с матрицей B. Тогда, используя определение произведения матриц, находим

$$AB=\begin{pmatrix} 4\cdot1+2\cdot3+3\cdot2 & 4\cdot(-3)+2\cdot(-4)+3\cdot(-5) & 4\cdot2+2\cdot1+3\cdot2 \\ 4\cdot1+(-5)\cdot3+2\cdot2 & 4\cdot(-3)+(-5)\cdot(-4)+2\cdot(-5) & 4\cdot2+(-5)\cdot1+2\cdot2 \\ (-2)\cdot1+3\cdot3+1\cdot2 & (-2)\cdot(-3)+3\cdot(-4)+1\cdot(-5) & (-2)\cdot2+3\cdot1+1\cdot2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & -35 & 16 \\ -7 & -2 & 7 \\ 9 & -11 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица *B* согласована с матрицей *A*, следовательно, существует произведение *BA*

$$BA=\begin{pmatrix} 1\cdot4+(-3)\cdot4+2\cdot(-2) & 1\cdot2+(-3)\cdot(-5)+2\cdot3 & 1\cdot3+(-3)\cdot2+2\cdot1 \\ 3\cdot4+(-4)\cdot4+1\cdot(-2) & 3\cdot2+(-4)\cdot(-5)+1\cdot3 & 3\cdot3+(-4)\cdot2+1\cdot1 \\ 2\cdot4+(-5)\cdot4+2\cdot(-2) & 2\cdot2+(-5)\cdot(-5)+2\cdot3 & 2\cdot3+(-5)\cdot2+2\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 23 & -1 \\ -6 & 29 & 2 \\ -16 & 35 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы видим, что $AB \neq BA$.

2) Матрица *A* согласована с матрицей *B*, тогда находим

$$AB=\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot3+2\cdot(-9) \\ -3\cdot(-1)+4\cdot1 & -3\cdot0+4\cdot2 & -3\cdot3+4\cdot(-9) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -15 \\ 7 & 8 & -45 \end{pmatrix}.$$

Матрица *B* не согласована с матрицей *A*, следовательно, произведение *BA* не существует.

4.3. Обратная матрица

Если для матрицы *A* существует матрица *B*, такая, что $AB = BA = E$, где *E* – единичная матрица, то матрица *B* называется *обратной* к матрице *A*.

Из определения следует, что *A* и *B* – квадратные матрицы одинакового порядка. Матрицу, обратную к матрице *A*, будем обозначать A^{-1}.

Невырожденной, или неособенной матрицей называется квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля. Если определитель матрицы равен нулю, то матрица называется *вырожденной, или особенной*.

Для того, чтобы существовала матрица *B*, обратная матрице *A*, необходимо и достаточно, чтобы матрица *A* была невырожденной.

Обратная к данной матрица может быть получена следующим образом

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\det A$ – определитель матрицы *A*, A_{ij} – алгебраические дополнения элементов матрицы *A*.

4.4. Примеры решения задач

Задача 1. Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, существует ли обратная ей матрица, и если существует, то найти ее.

Решение. Найдем определитель матрицы *A:*

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 .$$

Следовательно, данная матрица невырожденная, и обратная к ней матрица существует. Для нахождения обратной матрицы вычислим алгебраические дополнения A_{ij} элементов данной матрицы. Получим

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -5 ; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 15 ; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 25 ;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 1 ; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 3 ; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 9 ;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 ; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 ; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14 .$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 1{,}5 & 0{,}3 & -0{,}8 \\ 2{,}5 & 0{,}9 & -1{,}4 \end{pmatrix}.$$

5. Системы линейных уравнений

Линейным алгебраическим уравнением называют уравнение, содержащее переменную только в первой степени и не имеющее произведений переменных. При решении систем линейных уравнений используются определители и матрицы.

5.1. Метод Крамера

Введем определитель системы – $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и дополнительные определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Если определитель системы $\Delta \neq 0$**,** то система имеет единственное решение, определяемое **формулами Крамера**:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Пример 1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x + 4y - z = 4 \\ -2x + y + 3z = 1 \\ 7x + y - 2z = 9 \end{cases}$$

Решение. Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5\cdot1\cdot(-2) + 4\cdot3\cdot7 + (-1)\cdot1\cdot(-2) - (-1)\cdot1\cdot7 - 4\cdot(-2)\cdot(-2) - 5\cdot3\cdot1 =$$

$$= -10 + 84 + 2 + 7 - 16 - 15 = 52$$

Так как $\Delta \neq 0$, то можно использовать формулы Крамера. Для этого находим еще три определителя:

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4\cdot1\cdot(-2) + 4\cdot3\cdot9 + (-1)\cdot1\cdot1 - (-1)\cdot1\cdot9 - 4\cdot1\cdot(-2) - 4\cdot3\cdot1 =$$

$$= -8 + 108 - 1 + 9 + 8 - 12 = 104,$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 5\cdot1\cdot(-2)+4\cdot3\cdot7+(-1)\cdot9\cdot(-2)-(-1)\cdot1\cdot7-4\cdot(-2)\cdot(-2)-5\cdot3\cdot9=$$

$$=-10+84+18+7-16-135=-52,$$

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5\cdot1\cdot9+4\cdot1\cdot7+4\cdot1\cdot(-2)-4\cdot1\cdot7-4\cdot(-2)\cdot9-5\cdot1\cdot1=$$

$$=45+28-8-28+72-5=104.$$

Теперь воспользуемся формулами Крамера:

$$x=\frac{\Delta_X}{\Delta}=\frac{104}{52}=2;\quad y=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=\frac{-52}{52}=-1;\quad z=\frac{\Delta_Z}{\Delta}=\frac{104}{52}=2;$$

Ответ. X=2; Y=-1; Z=2.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ x-y+z=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$$

Решение. Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-3)+(-3)\cdot1\cdot2+1\cdot1\cdot2-2\cdot(-1)\cdot2-1\cdot(-3)\cdot(-3)-1\cdot1\cdot1=$$

$$=3-6+2+4-9-1=-7.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное нулевое решение: $x=0, y=0, z=0$.

Ответ. X=0; Y=0; Z=0.

5.2. Матричный метод

Систему уравнений можно записать в матричной форме в следующем виде: $A\cdot X = B$. Если $\Delta \neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1} и решение системы можно записать в виде $X = A^{-1}\cdot B.$

Пример 3. Решить систему линейных уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} 5x+4y-z=4 \\ -2x+y+3z=1 \\ 7x+y-2z=9 \end{cases}.$$

Решение. Обозначим через A основную матрицу системы, через B – матрицу-столбец правых частей, через X – матрицу- столбец неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ -2 & 1 & 3\\ 7 & 1 & -2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}4\\1\\9\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 4 & -1\\ -2 & 1 & 3\\ 7 & 1 & -2\end{vmatrix}=5\cdot1\cdot(-2)+4\cdot3\cdot7+(-1)\cdot1\cdot(-2)-(-1)\cdot1\cdot7-4\cdot(-2)\cdot(-2)-5\cdot3\cdot1=$$
$$=-10+84+2+7-16-15=52$$

Решение данной системы можно записать в виде $X=A^{-1}\cdot B.$. Сначала найдем A^{-1}:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2-3=-5;\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 7 & -2\end{vmatrix}=-(4-21)=17;\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 7 & 1\end{vmatrix}=-2-7=-9;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-(-8+1)=7;\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 7 & -2\end{vmatrix}=-10+7=-3;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}5 & 4\\ 7 & 1\end{vmatrix}=-(5-28)=23;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=12+1=13;\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}5 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-(15-2)=-13;\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}5 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=5+8=13.$$

Теперь можем записать:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{52}\cdot\begin{pmatrix}-15 & 7 & 13\\ 17 & -3 & -13\\ -9 & 23 & 13\end{pmatrix};$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{52}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 7 & 13\\ 17 & -3 & -13\\ -9 & 23 & 13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\9\end{pmatrix}=\frac{1}{52}\cdot\begin{pmatrix}-5\cdot4+7\cdot1+13\cdot9\\ 17\cdot4-3\cdot1-13\cdot9\\ -9\cdot4+23\cdot1+13\cdot9\end{pmatrix}=\frac{1}{52}\cdot\begin{pmatrix}104\\ -52\\ 104\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Ответ. X=2; Y=-1; Z=2.

5.3. Метод Гаусса

Ранее рассмотренные методы можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причем определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Теорема Кронекера-Капелли. Для того, чтобы неоднородная система линейных алгебраических уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы совпадал с рангом матрицы системы.

Однородная система уравнений всегда совместна, так как имеет нулевое решение $x = y = z = 0$. Ненулевые решения она имеет тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$.

Пример 4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 21 \\ 5x + 4y + z = 40 \\ 9x + 5y + 4z = 61 \end{cases}.$$

Решение. Путем элементарных преобразований необходимо привести имеющуюся систему к эквивалентной системе ступенчатого вида. Затем отбрасывают уравнения вида $0 = 0$, из последнего уравнения находят выражение последнего неизвестного и подставляют это выражение в предыдущие уравнения. Таким образом находят все неизвестные.

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 21 \\ 5 & 4 & 1 & 40 \\ 9 & 5 & 4 & 61 \end{array}\right).$$

Первую строку умножим на $-\frac{5}{2}$ и сложим со второй, затем первую строку умножим на $-\frac{9}{2}$ и сложим с третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 21 \\ 5 & 4 & 1 & 40 \\ 9 & 5 & 4 & 61 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 21 \\ 0 & -7/2 & -3/2 & -25/2 \\ 0 & -17/2 & -1/2 & -67/2 \end{array}\right).$$

Вторую строку, умноженную на $-\frac{17}{7}$, прибавляем к третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 21 \\ 0 & -7/2 & -3/2 & -25/2 \\ 0 & -17/2 & -1/2 & -67/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 21 \\ 0 & -7/2 & -3/2 & -25/2 \\ 0 & 0 & 22/7 & -22/7 \end{array}\right).$$

Система уравнений приведена к треугольному виду:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 21 \\ -\frac{7}{2}y - \frac{3}{2}z = -\frac{25}{2} \\ \frac{22}{7}z = -\frac{22}{7} \end{cases}.$$

В результате получаем

$$\frac{22}{7}z = -\frac{22}{7}; \qquad -\frac{7}{2}y - \frac{3}{2}(-1) = -\frac{25}{2}; \qquad 2x + 3 \cdot 4 + (-1) = 21;$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ответ. $x = 5; y = 4; z = -1.$

Пример 5. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + y - 4z = 5 \\ 5x - 8y + 2z = 8 \end{cases}.$$

Решение. Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 5 & -8 & 2 & 8 \end{array}\right).$$

Умножая первую строку поочередно на -2, -5 и прибавляя соответственно ко второй и третьей, получаем матрицу.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{array}\right).$$

Умножив вторую строку на -1 и прибавив к третьей, получим новую матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Данной матрице соответствует система уравнений.

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 7y - 8z = 3 \end{cases}.$$

Отсюда: $\begin{cases} x = 3y - 2z + 1 \\ y = \dfrac{3 + 8z}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10z + 16}{7} \\ y = \dfrac{8z + 3}{7} \end{cases}$, Z может принимать любые действительные значения.

Ответ. $x = \dfrac{10z + 16}{7}$; $y = \dfrac{8z + 3}{7}$, где Z может принимать любые действительные значения.

Пример 6. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Умножая первую строку на -1 и прибавляя поочередно ко второй и третьей, получаем матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Умножив вторую строку на -2 и прибавив к третьей, получим новую матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Данная система уравнений несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворять ей.

Ответ. Система несовместна.

6. Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите объем призмы $ABCA'B'C'$, зная координаты ее вершин $A(1,5,-2)$, $B(4,1,1)$, $C(-3,0,1)$, $A'(2,-1,3)$.
2. Даны точки $A(0,-2,5)$, $B(6,6,0)$, $C(3,-3,6)$, $D(2,-1,3)$. Найдите отношение площадей треугольников ABC и ADC.
3. Даны три точки $A(0,0,0)$, $B(1,1,1)$, $C(2,-3,4)$. Найдите расстояние от точки C до прямой AB.
4. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = 6\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\overrightarrow{AD} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$ =30°.
5. Найдите вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}(2,-3,1)$ и $\vec{b}(1,-2,3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.
6. Лежат ли четыре точки $A(1,2,1)$, $B(1,1,2)$, $C(2,1,1)$, $D(-3,0,7)$ в одной плоскости?
7. Даны вершины параллелепипеда $A(0,-2,5)$, $B(6,6,0)$, $C(3,-3,6)$, $A_1(2,-1,3)$. Найдите площадь основания и высоту.
8. Дано: $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 15$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. Вычислите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
9. Найдите высоту BD треугольника ABC, если известны его вершины $A(-5,6,-2)$, $B(-1,1,-2)$, $C(-1,-3,1)$.
10. При каких значениях x и y вектор $\vec{c}(x, y, 24)$ коллинеарен вектору $\vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{a}(1,-2,3)$, $\vec{b}(-4,0,5)$?
11. Даны векторы $\vec{a}(0,1,2)$ и $\vec{b}(-2,-1,0)$. При каком значении z вектор $\vec{c}(3,4,z)$ ортогонален вектору $\vec{a} \times \vec{b}$?
12. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$. Вычислите $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
13. Даны векторы $\vec{a}(2,-3,1)$, $\vec{b}(-3,1,2)$ и $\vec{c}(1,2,3)$. Вычислите $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ и $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.
14. Найдите вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}(2,3,-1)$ и $\vec{b}(1,-2,3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.
15. Найдите вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}(2,1,-1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$.
16. Даны векторы $\vec{a}(3,0,-1)$, $\vec{b}(2,4,3)$, $\vec{c}(-1,3,2)$, $\vec{d}(2,0,1)$. Найдите $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ и $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d})$.
17. Даны вершины тетраэдра $A(0,0,0)$, $B(1,-3,0)$, $C(1,2,0)$, $D(0,0,5)$. Найдите объем тетраэдра и площадь грани ABC.
18. Лежат ли четыре точки $A(2,3,7)$, $B(1,4,9)$, $C(-4,0,5)$, $D(-2,3,-5)$ в одной плоскости?
19. Найдите расстояние от точки $C(3,2,-2)$ до прямой, проходящей через точки $A(1,2,-3)$ и $B(5,2,0)$.
20. Найдите длину высоты тетраэдра $A(3,2,-1)$, $B(4,1,3)$, $C(2,-1,1)$, $D(5,5,4)$, проведенную из вершины A.

21. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}=5\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}(-2,4,1)$, $\vec{b}(1,-2,7)$?
22. Докажите, что диагонали четырехугольника, заданного координатами своих вершин $A(-4,-4,4)$, $B(-3,2,2)$, $C(2,5,1)$, $D(3,-2,2)$, взаимно перпендикулярны.
23. При каком значении z точки $O(0,0,0)$, $A(1,-5,3)$, $B(2,4,4)$, $C(1,-1,z)$ лежат в одной плоскости?
24. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}=2\vec{a}+4\vec{b}$ и $\vec{d}=3\vec{b}-\vec{a}$, если $\vec{a}(1,-2,3)$, $\vec{b}(3,0,-1)$?
25. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=3\vec{m}-n$, если $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=2$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n})=\dfrac{\pi}{6}$.
26. Вершины треугольника находятся в точках $A(-1,2,-1)$, $B(-3,1,1)$, $C(0,4,-3)$. Найдите площадь этого треугольника и $\cos\angle A$.
27. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 30°; $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=10$. Найдите $|\vec{a}+\vec{b}|$.
28. Найдите угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}(0,-1,2)$ и $\vec{b}(2,1,2)$.
29. Найдите косинус угла между векторами $\dfrac{1}{3}\vec{b}$ и $-3\vec{a}$, если $\vec{a}(6,-3,6)$ и $\vec{b}(4,-2,5)$.
30. Найдите косинус угла между векторами $2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}(1,-1,2)$ и $\vec{b}(1,1,-2)$.
31. Найти сумму матриц *A+B*, разность матриц *A- B* и произведения матриц *AB* и *BA*, если они существуют:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&2\\-1&2&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&1&-2\\3&-2&4\\-3&5&-1\end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\4&-1&-3\\2&-1&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&5&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\\2&4\\1&-5\end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&3\\0&0&4&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-2&4\\0&0&3&1\end{pmatrix}.$$

32. Найти матрицу, обратную данной, или доказать, что она не существует:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\5&3&-6\\-1&-2&3\end{pmatrix};\qquad A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&1\\3&1&2\end{pmatrix};\qquad A=\begin{pmatrix}4&5&-5\\1&2&2\\5&7&-2\end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix};\qquad A=\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\-5&4&2&0\\1&6&7&8\\2&6&5&9\end{pmatrix}.$$

33. Решить систему линейных уравнений тремя способами:
а) методом Крамера,
б) матричным методом,
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}7x+y-z=2\\3x+4y+2z=-5\\6x+2y-z=-2\end{cases}\qquad \begin{cases}2x+3y+3z=-10\\3x+2y-5z=11\\x+2y-z=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x-7y-2z=-4\\4x-2y+5z=3\\x-8y-6z=-6\end{cases}\qquad \begin{cases}6x-5y+z=-1\\3x+2y+4z=-6\\5x+5y+7z=-13\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-2y-4z=-5\\2x-7y-6z=3\\4x-5y-9z=-15\end{cases}\qquad \begin{cases}-3x-y+2z=1\\4x+3y-5z=6\\-9x+2y+6z=18\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+2y+3z=-6\\x-7y-8z=19\\3x-2y-3z=11\end{cases}\qquad \begin{cases}x+2y+2z=4\\6x+9y-2z=-7\\6x+8y+3z=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+2y+3z=6\\7x+y+4z=20\\5x+2y+6z=18\end{cases}\qquad \begin{cases}x-3y-3z=-1\\2x+8y+7z=-4\\7x+6y+5z=-9\end{cases}.$$

Рекомендуемая литература

1. Гусак А.А. Высшая математика: В 2-х т. Т.1.: Учебник для студентов вузов. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 544 с.
2. Марков Л.Н., Размыслович Г.П. Высшая математика. Ч. 1: Элементы линейной и векторной алгебры. Основы аналитической геометрии. – Мн.: Амалфея, 1999. – 208 с.
3. Дадаян А.А., Масалова Е.С. Сборник задач по аналитической геометрии и элементам линейной алгебры. – Мн.: Выш. школа, 1982. – 206 с.
4. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике: В 2-х ч. – Мн.: Выш. школа, 1988.
5. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 288 с.
6. Гусак А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения: Справочное пособие по решению задач. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 416 с.

Содержание

Учебное издание

Авторы-составители:
Борботко Елена Петровна,
Кузьменкова Тамара Евгеньевна,
Пакштайте Виолета Валентиновна,
Шевцова Анна Владимировна.

«Справочное пособие по решению задач
курса аналитической геометрии и линейной алгебры»

Учебно-методическое пособие

Редактор *М.И. Авхимович*
Технический редактор *М.Л. Шимкевич*
Корректор *О.В. Гуд.*

Сдано в набор 16.06.2005. Подписано в печать 24.06.2005.
Бумага офсетная. Формат 60×80/16. Уч.-изд. л. 1,79. Усл. печ. л. 3,95.
Гарнитура Times. Тираж 150 экз.

Международный государственный экологический университет им. А.Д. Сахарова,
ул. Долгобродская, 23, 220009, г. Минск, Республика Беларусь