Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Международный государственный экологический
университет имени А. Д. Сахарова»

Факультет мониторинга окружающей среды

Кафедра физики и высшей математики

В. И. Зеленков

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПОСОБИЕ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Минск
2011

УДК 517.9
ББК 22.161.6
З48

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
МГЭУ им. А. Д. Сахарова (протокол № 3 от 15 ноября 2006 г.)

Автор:
Зеленков В. И., доцент кафедры физики и высшей математики
МГЭУ им. А. Д. Сахарова, к.ф.-м.н.

Рецензенты:
Орлович Ю. Л., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры дискретной математики и алгоритмики БГУ;
Тимощенко А. И., к.ф.-м.н., доцент,
зав. кафедрой радиоэкологии МГЭУ им. А. Д. Сахарова

Зеленков, В. И.
З48 Дифференциальные уравнения: пособие по решению задач / В. И. Зеленков. – Минск : МГЭУ им. А. Д. Сахарова, 2011. – 80 с.

ISBN 978-985-551-008-7.

Пособие предлагается для использования студентами второго курса МГЭУ им. А. Д. Сахарова, оно содержит необходимый теоретический материал и алгоритмы решения основных задач из курса дифференциальных уравнений.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

ISBN 978-985-551-008-7

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Но продуман распорядок действий…
Борис Пастернак

Книга, которую вы сейчас читаете, отнюдь не является учебником. Это конспект лекций и задачник — но не только. Скажем так: задачник с подсказками.

Каждый уважающий себя человек должен учиться мыслить и работать творчески. И все же бывают типовые задачи, при решении которых творческий подход будет скорее помехой. Они требуют четкого алгоритма, раз и навсегда сформулированной последовательности действий. Именно такие задачи и описаны ниже с помощью так называемых *диаграмм Насси—Шнейдермана*, которые по сути представляют собой хорошо знакомые вам по занятиям программированием блок-схемы, но только записанные в табличной, более компактной форме.

Готовясь решать задачи по избранной теме, просмотрите сперва соответствующий раздел пособия, познакомьтесь с более подробным изложением вопроса в учебнике или конспекте и только потом приступайте к работе по алгоритму. Не пропускайте ни одного шага, иначе решение может получиться неполным или даже вовсе неправильным. Не забывайте сделать проверку.

Успеха вам!

1. Основные определения

Дифференциальное уравнение (ДУ) — уравнение, в котором искомая функция находится под знаком производной или дифференциала.

Обыкновенное ДУ (ОДУ) — дифференциальное уравнение, содержащее одну независимую переменную. Если независимых переменных две или более, то имеем уравнение в частных производных. Далее по умолчанию под дифференциальным уравнением будем понимать обыкновенное ДУ.

Порядок ДУ — наибольший порядок входящей в уравнение производной (дифференциала) искомой функции.

Решение ДУ — функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Формы записи решения:

- **Явная:** $y = f(x)$, где f — известная функция либо интеграл от известной функции (см. **квадратуры**).
- **Неявная:** $\Phi\left(x, y\right) = 0$, где Φ — известная функция двух переменных.
- **Параметрическая:** $x = \varphi\left(t\right)$, $y = \psi\left(t\right)$, φ и ψ — известные функции.
- **Графическая:** график в декартовых координатах (x, y); график называется в данном случае **интегральной кривой уравнения**.
- **Численная (табличная):** таблица значений x и y.

Интегрирование ДУ — процесс нахождения решения уравнения.

Интеграл ДУ — функция $\Phi\left(x, y\right) = 0$ в неявной записи решения. Если это уравнение определяет все без исключения решения, то это **общий интеграл**, который в общем случае содержит некоторое количество произвольных постоянных: $\Phi\left(x, y, C_1, \ldots, C_n\right) = 0$.

Квадратуры — неопределенные интегралы от известных функций. ДУ произвольного порядка в общем случае в квадратурах не интегрируется. Если же решение в квадратурах получено, то это не обязательно означает, что искомая функция выражена через элементарные. Например, решением уравнения $y' = \mathrm{e}^{-x^2}$ является $y = \int \mathrm{e}^{-x^2}\,dx + C$.

Линейное уравнение — уравнение, которое может быть записано в форме

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y^{(1)} + a_n(x)y = f\left(x\right),$$

где коэффициенты a_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ и функция f непрерывны на некотором отрезке. Если при этом $f\left(x\right) = 0$, то уравнение называется **однородным**.

Другие необходимые определения будут даны в соответствующих разделах.

2. Методы и примеры решений

1 Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним

1.1 Уравнение, не содержащее искомой функции. Задача Коши

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\,(x), \tag{1}$$

где $f\,(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$. Оно разрешимо в квадратурах:

$$y = \int f\,(x)\,dx + C, \quad a < x < b, \quad -\infty < y < +\infty, \tag{2}$$

здесь C — произвольная постоянная.

Пусть теперь задано начальное условие $y_0 = y\,(x_0)$, $x_0 \in [a, b]$. Существование и единственность решения в этом случае определяются следующей теоремой.

Теорема Пикара. *Пусть дано уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = f\,(x, y) \tag{3}$$

и поставлено начальное условие $y_0 = y\,(x_0)$. Будем считать, что функция $f\,(x, y)$ определена в области $|x - x_0| \leqslant a < +\infty$, $|y - y_0| \leqslant b < +\infty$ с точкой (x_0, y_0) внутри (a и b — заданные положительные числа) и удовлетворяет в ней условиям:

1. *$f\,(x, y)$ непрерывна и, следовательно, ограничена: $|f\,(x, y) \leqslant M|$;*
2. *$f\,(x, y)$ имеет ограниченную частную производную по аргументу y:*

$$\left|\frac{\partial f\,(x, y)}{\partial y}\right| \leqslant K,$$

где M и K — постоянные положительные числа.

Тогда уравнение (3) *имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальному условию. Это решение определено и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности x_0, а именно в $|x - x_0| \leqslant h$, где $h = \min\,(a, b\,/M\,)$.*

Следствие. *Если $f\,(x, y)$ определена и непрерывна относительно x и y вместе со своей частной производной по y при всех значениях x и y, то через любую точку проходит одна и только одна интегральная кривая. Иными словами, вся плоскость (x, y) заполнена непересекающимися и не касающимися друг друга гладкими интегральными кривыми.*

Теперь решение уравнения (1) может быть записано также и **в форме Коши:**

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f\,(x)\,dx + y_0. \tag{4}$$

При этом (2) определяет бесчисленное множество интегральных кривых, которые для всех возможных значений $-\infty < C < +\infty$, не пересекаясь, заполняют всю координатную плоскость (x, y), а в случае (4) решению соответствует единственная интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0).

1.2 Уравнение, не содержащее независимой переменной

Пусть
$$\frac{dy}{dx} = f\,(y), \tag{5}$$
причем функция $f\,(y)$ определена и непрерывна на $[a, b]$ и не обращается на этом интервале в нуль. «Перевернув» уравнение:
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f\,(y)}, \tag{6}$$
приходим к предыдущему случаю:
$$x = \int \frac{dy}{f\,(y)} + C \qquad \text{или} \qquad x = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{f\,(y)} + x_0.$$

1.3 Уравнение с разделенными переменными

Пусть
$$X(x)dx + Y(y)dy = 0, \tag{7}$$
где $X(x)$ и $Y(y)$ — известные функции, непрерывные при всех рассматриваемых значениях x и y. Проинтегрируем (7):
$$d\left[\int_{x_0}^{x} X(x)dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)dy\right] = 0.$$
Тогда общий интеграл уравнения имеет вид
$$\int_{x_0}^{x} X(x)dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)dy = C. \tag{8}$$

1.4 Уравнение с разделяющимися переменными

Алгоритм 1, стр. 41. Общий вид этого уравнения
$$X_1(x)Y_1(y)dx + X_2(x)Y_2(y)dy = 0. \tag{9}$$
Разделив почленно (9) на X_2Y_1, получим уравнение с разделенными переменными
$$\frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx + \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy = 0. \tag{10}$$
Однако при этом могут быть потеряны решения, обращающие в нуль произведение X_2Y_1.

Пример 1. Решить уравнение
$$xydx + \left(x^2+1\right)(y-1)\,dy = 0.$$
Разделим почленно уравнение на $y\,(x^2+1)$ и проинтегрируем:
$$\int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{y-1}{y}dy = C;$$
$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + y - \ln|y| = C.$$
Получено *общее решение* исходного уравнения в неявной форме. Проверим теперь, не потеряны ли особые решения.

Множитель (x^2+1) не обращается в нуль ни при каких значениях x и, следовательно, особых решений не дает. $y=0$ является решением, т. е. при подстановке в уравнение обращает его в тождество (для первого слагаемого это очевидно, а для второго выполняется потому, что дифференциал любой константы, в том числе и 0, равен 0). В общем решении y находится под знаком логарифма, следовательно, не обращается в нуль. Таким образом, $y=0$ — *особое решение* уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{xy}. \tag{11}$$

Приведем уравнение к виду (9), для чего сперва представим y' в виде dy/dx:

$$\sqrt{y^2+1}dx - xydy = 0.$$

Разделив его почленно на $x\sqrt{y^2+1}$ и проинтегрировав, получаем общее решение

$$\ln|x| + \sqrt{y^2+1} = C.$$

$x=0$ особым решением не является, т. е. не обращает в тождество *исходное* уравнение (11).

Пример 3. Решить задачу Коши

$$y'\operatorname{tg} x + y = 1; \quad y(\pi/2) = 3.$$

Действуя так же, как в предыдущем примере, получаем

$$\frac{\cos x}{\sin x}dx + \frac{dy}{y-1} = 0,$$

откуда

$$\ln|\sin x| + \ln|y-1| = \ln|C|$$

(здесь постоянную интегрирования удобно записать именно в таком виде) и

$$y = \frac{C}{\sin x} + 1.$$

Положив $x=\pi/2$, получаем $C=2$. Таким образом, при заданном начальном условии уравнение имеет единственное решение

$$y = \frac{2}{\sin x} + 1.$$

Задания для самостоятельного решения

1.4.1. $3\,\mathrm{e}^x \operatorname{tg} y dx + (2-\mathrm{e}^x)\sec^2 y dy = 0.$

1.4.2. $yy' = \frac{1-2x}{y}.$

1.4.3. $y' = (x^3-x)(1+y^2).$

1.4.4. $y' = \frac{\cos y}{x^2+9}.$

1.4.5. $(y+y^2-x^2y-x^2y^2)\,dx + (x^3y-8y-x^3+8)\,dy = 0.$
Подсказка: разложите выражения в скобках на множители.

1.5 Уравнение, содержащее линейную комбинацию x и y

Алгоритм 2, стр. 42. Пусть

$$y' = f\,(ax + by), \tag{12}$$

где a и b — константы. Положим $z = ax + by$, где y есть некоторая функция от x. Продифференцируем это выражение по x:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

и подставим вместо производной y ее значение из (12)

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z),$$

откуда

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx$$

и

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C. \tag{13}$$

Заменив z на $ax + by$, получим искомое решение в неявной форме.

Отметим, что при этом могут быть потеряны решения уравнения (12), при которых обращается в нуль выражение $a + bf(z)$.

Пример 4. Решить уравнение

$$y' = (4x + y)^2.$$

Положим $z = 4x + y$, тогда $z' = 4 + y' = 4 + (4x + y)^2 = 4 + z^2$. Разделим переменные:

$$\frac{dz}{z^2 + 4} = dx,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\arctan\frac{z}{2} = x + \frac{C}{2}$$

и окончательно получаем решение в неявной форме $\arctan\,(2x + y/2) = 2x + C$. Уравнение не имеет особых решений, т. к. $z^2 + 4 \neq 0$ ни при каких z.

Задания для самостоятельного решения

1.5.1. $y' = \frac{1}{x+y}$.

1.5.2. $y' = \sin\,(x - 2y)$.

1.5.3. $y' = \sqrt{2x + y}$.

1.5.4. $y' = 2x - 4y + \frac{2}{2y-x}$.

1.5.5. $y' = \mathrm{e}^{x+y}$.

1.6 Однородное уравнение

Алгоритм 3, стр. 42. Уравнение вида

$$P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = 0 \tag{14}$$

называется **однородным**, если функции P и Q таковы, что

$$P(ax,ay) = a^k P(x,y);$$
$$Q(ax,ay) = a^k Q(x,y).$$

Число k называется **степенью однородности**. Например, уравнение

$$\left(x^3 - 4y^3\right) dx - \left(2xy^2 - x^2 y\right) dy = 0$$

является однородным степени 3, т. к. при замене x на ax и y на ay его можно записать в виде

$$a^3 \left(x^3 - 4y^3\right) dx - a^3 \left(2xy^2 - x^2 y\right) dy = 0.$$

Замена $y = zx$ приводит (14) к виду

$$x\frac{dz}{dx} = f(z) - z,$$

т. е. к уравнению с разделяющимися переменными. Разумеется, уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{15}$$

также является однородным и решается посредством той же замены $y = zx$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\left(y^2 - 2xy\right) dx + x^2 dy = 0.$$

Пусть $y = zx$, тогда после сокращения на x^2 (сокращать можно, т. к. $x = 0$ не является решением уравнения) имеем

$$\left(z^2 - 2z\right) dx + (zdx + xdz) = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{z^2 - z}dz = 0.$$

Интегрируем: $\ln|x| + \ln|z-1| - \ln|z| = C$. Заменяя z на y/x, получаем

$$\ln|x| + \ln\left|\frac{y-x}{y}\right| = C_1$$

и окончательно

$$\frac{xy - x^2}{y} = C.$$

Задания для самостоятельного решения

1.6.1. $y^2 dx + (xy - 2x^2)\, dy = 0.$

1.6.2. $xdy = \left(3y - 2x + \sqrt{xy - x^2}\right) dx.$

1.6.3. $(x + 3y)y' = y - 3x.$

1.6.4. $x^2 y' = (x + y)^2.$

1.6.5. $y' = \frac{y}{x} - \sin\frac{y}{x}.$

1.7 Уравнение с дробно-линейной функцией

Алгоритм 4, стр. 43. Рассмотрим уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{16}$$

где a_i, b_i и c_i, $i = 1, 2$ — константы.

Возможны три случая. Если $c_1 = c_2 = 0$, то уравнение (16) — однородное. В противном случае рассмотрим определитель

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Если $A = 0$, то строки определителя пропорциональны $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k\right)$ и (16) сводится к уравнению с линейной комбинацией (12):

$$y' = f\left[\frac{k\,(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right] = F\,(a_2x + b_2y).$$

Наконец, при $A \neq 0$ сделаем замену переменных $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, подобрав α и β так, чтобы свести (16) к виду (15). Геометрически это означает перенос начала координат из точки $(0; 0)$ в точку $(\alpha; \beta)$.

Подставив вместо x и y их выражения через новые переменные

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right), \tag{17}$$

подберем константы α и β так, чтобы свести к нулю свободные члены в числителе и знаменателе аргумента функции в правой части:

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Определитель полученной системы уравнений по предположению отличен от нуля, поэтому система эта имеет единственное решение. Подставив полученные значения α и β в (17), приходим к ранее изученному уравнению вида (12).

Пример 6. Решить уравнение

$$y' = \frac{x - y}{x + 2y}.$$

Разделим числитель и знаменатель правой части уравнения на x и положим $y\,/x = z$, тогда

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{1 - z}{1 + 2z}.$$

Разделяя переменные, получим

$$-\frac{2z + 1}{2z^2 + 2z + 1}dz = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем:

$$-\frac{1}{2}\ln\left(2z^2 + 2z - 1\right) = \ln|x| - \ln|C|$$

и окончательно

$$x\sqrt{2\,(y/x)^2 + 2\,(y/x) - 1} = C.$$

Пример 7. Решить уравнение

$$(2x - 4y + 6)\;dx + (x + y - 3)\;dy = 0.$$

Явно выразим производную искомой функции:

$$y' = \frac{-2x + 4y - 6}{x + y - 3}.$$

Определитель $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ отличен от нуля, поэтому положим $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$ и подберем такие α и β, чтобы свести задачу к предыдущей:

$$\begin{cases} -2\alpha + 4\beta - 6 = 0, \\ \alpha + \beta - 3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Тогда уравнение сводится к

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-2\xi + 4\eta}{\xi + \eta}.$$

Далее действуем, как в предыдущем примере: делая замену $\eta = z\xi$, после элементарных преобразований получаем

$$-\frac{1+z}{z^2 - 3z + 2} dz = \frac{d\xi}{\xi};$$

$$2\ln|z-1| - 3\ln|z-2| = \ln|\xi| + \ln|C|;$$

$$\frac{(z-1)^2}{\xi\,(z-2)}^{3} = C.$$

Подставляя $\xi = x - 1$ и $z = \eta/\xi = (y-2)/(x-1)$, получаем окончательно

$$-\frac{(x-y+1)^2}{(2x-y)^3} = C.$$

Пример 8. Решить уравнение

$$y' = \frac{x - 3y + 1}{2x - 6y + 4}.$$

В этом случае определитель равен нулю и задача решается по алгоритму 2. Положим $z = x - 3y$:

$$z' = 1 - 3\frac{z+1}{2z+4};$$

$$\frac{4+2z}{1-z} dz = dx;$$

$$-2z - 6\ln|z-1| = \ln|x| + C;$$

$$-2x + 6y - \ln\left|(x-3y-1)^6 x\right| = C.$$

Задания для самостоятельного решения

1.7.1. $\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y}$.

1.7.2. $y' = \frac{x+y-1}{x-2y+2}$.

1.7.3. $y' = \frac{2x+y}{x+2y-1}$.

1.7.4. $y' = \frac{x+2y-1}{3x+6y+3}$.

1.7.5. $(2x+y-1)\,y' = 4x + 2y + 3$.

2 Уравнение в полных дифференциалах

Алгоритм 5, стр. 44.

2.1 Условия Эйлера

Из курса математического анализа известно, что полным дифференциалом функции двух переменных $U(x, y)$ называется выражение

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy. \tag{18}$$

Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{19}$$

Очевидно, что левая часть (19) является полным дифференциалом тогда и только тогда, когда

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}; \qquad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{20}$$

Продифференцировав P по y и Q по x и учитывая независимость смешанной производной от порядка дифференцирования, получаем **условие Эйлера**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{21}$$

необходимое и достаточное условие того, чтобы (19) было уравнением в полных дифференциалах, т. е. чтобы его левая часть была полным дифференциалом некоторой функции двух переменных.

2.2 Решение путем последовательного интегрирования и дифференцирования

Из равенств (20) следует, что, проинтегрировав $P\left(x, y\right)$ по переменной x, мы получим функцию $U\left(x, y\right)$ с точностью до произвольного слагаемого, не зависящего от x, но, возможно, зависящего от y:

$$U\left(x, y\right) = \int P\left(x, y\right)dx + \varphi\left(y\right). \tag{22}$$

Заметим, что при вычислении (22) переменная y (независимая от x) считается как бы константой в смысле интегрирования по x.

Продифференцировав теперь (22) почленно по y и приравняв результат к $Q\left(x, y\right)$, придем к дифференциальному уравнению, из которого определим функцию $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P\left(x, y\right)dx\right] + \varphi'\left(y\right) = Q\left(x, y\right). \tag{23}$$

Искомое решение записывается в виде $U\left(x, u\right) = C$. Произвольную константу можно найти, если задано начальное условие.

2.3 Решение с использованием криволинейных интегралов

В курсе математического анализа доказывается, что значение криволинейного интеграла второго рода

$$U\left(x, y\right) = \int\limits_{MN} P\left(x, y\right)dx + Q\left(x, y\right)dy \tag{24}$$

не зависит от вида кривой, соединяющей точки M и N в том случае, если подынтегральное выражение является полным дифференциалом. На этом основан метод нахождения решения уравнения в полных дифференциалах, особенно удобный в том случае, когда задано начальное условие $y\left(x_0\right)=y_0$.

Выберем точки M и N так, как указано на рис. 1 (здесь x и y — текущие значения переменных), и вычислим интеграл вдоль ломаной линии, состоящей из горизонтального и вертикального отрезков. По свойству аддитивности интеграл вдоль ломаной равен сумме интегралов вдоль отдельных ее отрезков, иными словами,

$$U\left(x,y\right)=\int\limits_{x_0}^{x} P\left(x,y\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q\left(x,y\right)dy \tag{25}$$

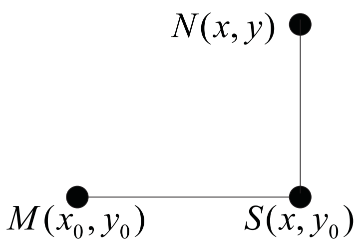


Рис. 1: Решение с использованием криволинейных интегралов

(на отрезке MS значение переменной y не изменяется и, следовательно, $dy=0$; по сходной причине $dx=0$ на отрезке SN). Проведя вычисления, запишем решение (19) в виде $U\left(x,y\right)=0$.

Пример 9. Решить уравнение:

$$y'=\frac{2x\left(y+1\right)}{2y-x^2}. \tag{26}$$

Перепишем (26) в форме

$$2x\left(y+1\right)dx+\left(x^2-2y\right)dy=0 \tag{27}$$

и проверим, является ли (27) уравнением в полных дифференциалах. В данном случае $P(x,y)=2x(y+1)$, $Q(x,y)=x^2-2y$. Очевидно, что

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$$

и условие Эйлера выполняется.

Будем искать решение (26) в виде

$$u(x,y)=\int P(x,y)\,dy+\varphi(y)=x^2(y+1)+\varphi(y).$$

$\partial u/\partial y=Q$, поэтому дифференцируем полученное равенство по y и приходим к уравнению

$$x^2+\frac{d\,\varphi(y)}{dy}=x^2-2y,$$

из которого находим

$$\varphi(y)=-y^2$$

(нас интересует *любое* значение $\varphi(y)$, поэтому произвольную константу здесь можно положить равной 0).

Таким образом, искомая функция найдена:

$$u(x,y)=x^2y+x^2-y^2,$$

и решение уравнения (26) в неявной форме имеет вид

$$x^2y+x^2-y^2=C. \tag{28}$$

Непосредственная подстановка (28) в (26) подтверждает, что решение получено правильно.

Самостоятельно решите эту же задачу, сначала интегрируя по y, а затем дифференцируя по x.

Пример 10. Решить уравнение с начальным условием:

$$\begin{aligned}&(y\sin x+\sin y)\,dx+(x\cos y-\cos x)\,dy=0,\\&y\,(\pi/2)=1.\end{aligned}\tag{29}$$

Интегрируем в соответствии с рис. 1 на стр. 15:

$$u(x,y)=\int\limits_{(\pi/2,\,\pi/2)}^{(x,\,y)}(y\sin x+\sin y)\;dx+(x\cos y-\cos x)\;dy=$$

$$=\int\limits_{\pi/2}^{x}(y\sin x+\sin y)\;dx\,\Big|_{y=\pi/2}+\int\limits_{\pi/2}^{y}(x\cos y-\cos x)\;dy=$$

$$=\int\limits_{\pi/2}^{x}(\pi/2\sin x+1)\;dx+\int\limits_{\pi/2}^{y}(x\cos y-\cos x)\;dy=$$

$$=(-\pi/2\cos x+x)\,\Big|_{\pi/2}^{x}+(x\sin y-y\cos x)\,\Big|_{\pi/2}^{y}.$$

Таким образом, $u(x,y)=x\sin y-y\cos x-\frac{\pi}{2}$, а окончательное решение задачи имеет вид

$$x\sin y-y\cos x=\frac{\pi}{2}.$$

Задания для самостоятельного решения

2.3.1. $\left(4x^3-y^2+\frac{3}{y}\right)dx+\left(-2yx-\frac{3x}{y^2}\right)dy=0.$

2.3.2. $(\mathrm{e}^{xy}y-2x)\,dx+(\mathrm{e}^{xy}x-6y^2)\,dy=0;\quad y(0)=1.$

2.3.3. $(2x+4y-3x^2)\,dx+(4x+8y+1)\,dy=0.$

2.3.4. $\left(-\frac{y+1}{x^2}-1\right)dx+\left(\frac{1}{x}-1\right)dy=0; y(1)=3.$

2.4 Уравнение, допускающее интегрирующий множитель

Алгоритм 6, стр. 45. Если уравнение вида (19) не удовлетворяет условию Эйлера (21), можно попытаться преобразовать его таким образом, чтобы левая часть стала полным дифференциалом. Домножим его на $\mu\,(x,y)$. Теперь для того, чтобы получилось уравнение в полных дифференциалах, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{\partial\,(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial\,(\mu Q)}{\partial x},\tag{30}$$

из которого следует

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial\mu}{\partial x}.\tag{31}$$

Выражение для интегрирующего множителя можно получить, решив полученное дифференциальное уравнение в частных производных, но это не всегда простая задача. Упростим задачу, попытавшись отыскать множитель, зависящий только от одной переменной, например, от x.

Итак, пусть $\mu = \mu(x)$. Тогда частная производная по y в (31) обращается в нуль и уравнение сводится к виду

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{d\mu}{dx}. \tag{32}$$

Полученное уравнение легко решается:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \Psi dx, \quad \Psi = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \tag{33}$$

(очевидно, что как μ, так и Q отличны от нуля, поэтому разделение переменных потери решений не вызывает). Поскольку левая часть (33) зависит только от x, можно сделать вывод, что необходимым условием возможности подбора интегрирующего множителя, зависящего только от этой переменной, является независимость от y функции Ψ. Если это условие выполняется, то $\mu(x) = \exp[\Psi(x)]$ и условие Эйлера для

$$\mu(x)P(x,y)\,dx + \mu(x)Q(x,y)\,dy = 0 \tag{34}$$

теперь выполняется.

Пример 11. Решить уравнение

$$y\,(x+y)\,dx + (xy+1)\,dy = 0.$$

Очевидно, что условия Эйлера для данного уравнения не выполняются. Домножим обе его части на $\mu(x,y)$ и запишем равенство (21):

$$\frac{\partial\,[y\,(x+y)\,\mu(x,y)]}{\partial y} = \frac{\partial\,[(xy+1)\,\mu(x,y)]}{\partial x};$$

$$\left(xy+y^2\right)\frac{\partial\mu}{\partial y} + (x+2y)\,\mu = (xy+1)\,\frac{\partial\mu}{\partial x} + y\mu.$$

Предположим, что множитель зависит только от переменной x; тогда $\partial\mu/\partial y = 0$:

$$(x+2y)\,\mu = (xy+1)\,\frac{d\mu}{dx} + y\mu$$

(отметим, что частная производная при этом заменена на обыкновенную). Приведя подобные, убеждаемся, что

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{xy+1}{x+y}.$$

Правая часть этого уравнения содержит y, следовательно, наше предположение было неверным. Пусть теперь $\mu = \mu(y)$. В этом случае

$$\left(xy+y^2\right)\frac{d\mu}{dy} + (x+2y)\,\mu = y\mu$$

и

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{x+y}{y\,(x+y)}dy = -\frac{dy}{y}.$$

Решая полученное уравнение с разделенными переменными, получаем $\mu(y) = 1/y$ (нас устраивает *любой* интегрирующий множитель, приводящий к уравнению в полных дифференциалах, поэтому постоянную интегрирования здесь вводить не обязательно).

Домножим обе части исходного уравнения на $1/y$:

$$(x+y)\,dx + \frac{xy+1}{y}dy = 0.$$

Теперь условия Эйлера выполняются. Ищем решение полученного уравнения в полных дифференциалах в виде

$$u(x,y) = \int (x+y)\,dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y).$$

Далее,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{d\varphi(y)}{dy} = x + \frac{1}{y},$$

откуда $\varphi(y) = \ln|y|$. Окончательное решение уравнения имеет вид $\frac{x^2}{2} + xy + \ln|y| = C$.

Отметим, что интегрирующий множитель $\mu(y) = 1/y$ нигде не обращается в нуль, поэтому побочных решений не возникает.

Задания для самостоятельного решения

Решите уравнения, подобрав интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$.

2.4.1. $(x^2 + 2y)\,dx + (x+1)dy = 0.$

2.4.2. $(x^2 - y^2)\,dx + (xy + y)dy = 0.$

2.4.3. $(x^2y + 2xy + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$

2.4.4. $(y^2 - xy)\,dx + (5xy - 2x^2)\,dy = 0.$

2.4.5. $(x - y)dx - \frac{x^2}{2y}dy = 0.$

Решите уравнения посредством интегрирующих множителей одного из видов: $\mu = \mu(x+y)$, $\mu = \mu(xy)$ или $\mu = \mu(x^2 - y^2)$.

2.4.6. $(x^2 + y^2)\,dx + (2 - 2x + x^2 + 2y + y^2)\,dy = 0.$

2.4.7. $(x^2 + y)\,dx + \left(x + \frac{x^3}{4y}\right)dy = 0.$

2.4.8. $\frac{dx}{x-y} + \frac{x}{x^2-y^2}dy = 0$

3 Другие уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах

3.1 Линейное уравнение

Алгоритм 7, стр. 46. Общее решение y линейного неоднородного ДУ любого (не только первого) порядка равно сумме общего решения $\tilde{y}$ соответствующего однородного уравнения и любого частного решения y_1 данного однородного. Таким образом, задача вида

$$y' + p(x)\,y = f(x) \tag{35}$$

сводится к отысканию решения однородного уравнения

$$\tilde{y}' + p(x)\,\tilde{y} = 0, \tag{36}$$

которое легко найти, разделив переменные, и к нахождению частного решения методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа). Подробное описание последовательности действий см. в алгоритме 7.

Пример 12. Решить уравнение

$$xy' - y = x^2 \cos x.$$

Будем искать решение в виде $y = \tilde{y} + y_1$. Однородное линейное уравнение первого порядка

$$x\tilde{y}' - \tilde{y} = 0$$

решаем как уравнение с разделяющимися переменными: $xd\tilde{y} = \tilde{y}$, откуда $\tilde{y} = Cx$. Частное решение неоднородного уравнения отыскиваем в форме $y_1 = \varphi(x) \cdot x$, заменив постоянную интегрирования в выражении для $\tilde{y}$ на неопределенную функцию. Подставив это выражение в уравнение и приведя подобные, получаем

$$x\frac{d\varphi(x)}{dx} = x^2 \cos x,$$

откуда

$$\varphi(x) = \int \cos x dx = \sin x.$$

Заметим, что сокращение обеих частей уравнения на x^2 не приводит к потере решений, т. к. $x = 0$ не является решением исходного уравнения, а константу интегрирования можно не вводить, поскольку нас устраивает *любая* функция $\varphi(x)$. Частное решение уравнения, таким образом, имеет вид $y_1 = x \sin x$, а общее $y = x\,(C + \sin x)$.

Задания для самостоятельного решения

3.1.1. $y' + y \cos x = \sin 2x$.

3.1.2. $y' + 4xy = 2x$.

3.1.3. $xy' + 6y = \frac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1$.

3.1.4. $y' + 6e^x y = 9e^{3x}, \quad y(0) = 0$.

3.1.5. $e^{y(x)} - 2y'(x) = 1$.

3.2 Уравнение Бернулли

Алгоритм 8, стр. 47. Рассмотрим уравнение вида

$$y' + p\,(x)\,y = q\,(x)\,y^a, \tag{37}$$

где $a \neq 1$ (при $a = 1$ уравнение (37) сводится к линейному однородному). Подстановкой $z = y^{1-a}$ уравнение Бернулли сводится к линейному относительно функции z. Если $a > 1$, то уравнение наряду с общим имеет и особое решение $y = 0$.

Пример 13. Решить уравнение

$$(x+1)\left(y' + y^2\right) = -y.$$

Это уравнение Бернулли, в котором $a = 2$. Введем новую функцию $z = y^{1-2} = 1\,/y$. Очевидно, что $y = 1\,/z$ и $y' = -z'\,/z^2$. Подставив эти выражения в уравнение, получаем после домножения на z^2 линейное уравнение первого порядка

$$(x+1)\,z' - z = x + 1.$$

Отыскивая его решение по алгоритму 7 в виде $z = \tilde{z} + z_1$, получаем общее решение $\tilde{z} = C\,(x+1)$ однородного и частное решение $z_1 = (x+1)\ln|x+1|$ неоднородного уравнений. Таким образом, $z = C\,(x+1) + (x+1)\ln|x+1|$ и общее решение уравнения Бернулли имеет вид

$$y = \frac{1}{(x+1)\,(C + \ln|x+1|)}.$$

Задача имеет также особое решение $y = 0$, которое не следует из общего ни при каких значениях константы C.

Пример 14. Решить уравнение

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{y^2}. \tag{38}$$

Здесь $a = -2$ и, таким образом, $z = y^3$ и $y = z^{1/3}$. Линейное уравнение относительно $z(x)$ имеет вид $z' + 3z\,/x\, = 6$. Решив его, получаем

$$y^3 = \frac{3x}{2} + \frac{C}{x^3}. \tag{39}$$

Особых решений исходное уравнение не имеет, т. к. $a < 1$.

Заметим, что уравнение

$$y^3y' + \frac{y^4}{x} = 2y$$

не эквивалентно (38), ибо наряду с общим решением, заданным формулой (39), имеет особое решение $y = 0$.

Задания для самостоятельного решения

3.2.1. $y' + \frac{x}{x^2-4}y = 2x\sqrt{y}$.

3.2.2. $\frac{y'}{x^2} - y = (x^3+1)\,y^{2/3}$.

3.2.3. $2xdx = (x^2\cos y + \sin 2y)\,dy$.

3.2.4. $3y^4y' + y^5 + x = 0$.

3.2.5. $y' + y\cos x = y^2\cos x, \quad y(0) = 1$.

3.2.6. $2y' + \frac{y}{x} = -3xy^2$.

3.2.7. $y' + y\,\mathrm{ctg}\,2x = \cos x\,\mathrm{ctg}\,x\frac{y^3}{2}$.

3.3 Уравнение Риккати

Алгоритм 9, стр. 48. Уравнение Риккати – нелинейное уравнение первого порядка вида

$$y' = P\,(x)\,y^2 + Q\,(x)\,y + R\,(x)\,, \tag{40}$$

где P, Q, R – непрерывные на некотором интервале функции, причем $P\,(x) \neq 0$ и $R\,(x) \neq 0$. Отметим два важных его свойства.

1. Уравнение Риккати инвариантно относительно дробно-линейного преобразования искомой функции. Иначе говоря, если в (40) сделать замену искомой функции вида

$$y = \frac{\alpha(x)z + \beta(x)}{\gamma(x)z + \delta(x},$$

то новое уравнение относительно z тоже будет уравнением Риккати.

2. Линейным преобразованием искомой функции $y = \alpha(x)z + \beta(x)$ уравнение (40) можно свести к виду $z' = \pm z^2 + S(x)$.

В общем случае (т. е. при произвольных P, Q, R) уравнение Риккати в квадратурах неразрешимо. Однако если известно его частное решение y_1, то заменой $y = y_1 + z$ (40) сводится к уравнению Бернулли, а заменой $y = y_1 + 1/z$ — к линейному уравнению первого порядка. В последнем случае наряду с общим следует записать и особое решение $y = y_1 + z$, которое из общего без дополнительных преобразований (см. ниже пример 15) не следует. Два известных частных решения уравнения Риккати позволяют легко найти частное решение линейного уравнения относительно функции z:

$$z_1 = 1/(y_2 - y_1). \tag{41}$$

Наконец, три частных решения позволяют сразу записать решение (40):

$$y = \frac{1}{y_2 - y_1} + C\left(\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1}\right).$$

Таким образом, интегрирование уравнения Риккати сводится к нахождению одного или нескольких частных его решений. Как уже отмечено выше, в общем случае эта задача неразрешима, однако для некоторых видов коэффициентов существуют несложные приемы, указанные в алгоритме 9.

Пример 15. Решить уравнение

$$y' + y^2 + \frac{y}{x} - \frac{4}{x^2} = 0.$$

Ищем частное решение в виде $y_1 = a/x$. Подставляя это выражение в уравнение и домножая почленно на $x^2 \neq 0$, получаем $a^2 - 4 = 0$, откуда $a = \pm 2$. Имея два частных решения $y_{1,2} = \pm 2/x$, будем искать общее решение посредством подстановки $y = y_1 + 1/z$, приводящей к линейному уравнению

$$z' - \frac{5}{x}z = 1.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\tilde{z} = Cx^5$. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся формулой (41): $z_1 = 1/(y_2 - y_1) = -x/4$. Таким образом,

$$\left\{\begin{aligned} &y = \frac{2}{x} + \frac{1}{Cx^5 - x/4}; \\ &y = \frac{2}{x}. \end{aligned}\right.$$

Можно, однако, преобразовать полученное решение, сделав замену константы интегрирования. Произведя сложение в первой формуле

$$y = \frac{2Cx^4 + 1/2}{Cx^5 - x/4}$$

и положив $C = 1/(4K)$, получим

$$y = \frac{2x^4 + 2K}{x^5 - Kx}.$$

Теперь особое решение следует из общего при $K = 0$.

Задания для самостоятельного решения

3.3.1. $2y' + y^2 = -\frac{1}{x^2}$.

3.3.2. $9y' = 2y^2 - 4xy + 12x$.

3.3.3. $x^2y' - 2xy + y^2 = 4$.

3.3.4. $y' + (x + y)^2 = 0$.

3.3.5. $y' - y^2 + 3y\cos x + 3\sin x = 0$ (частное решение ищите в виде $y_1 = a\sin x + b\cos x$).

3.4 Уравнение Лагранжа

Алгоритм 10, стр. 49. Это нелинейное уравнение первого порядка, неразрешенное относительно производной
$$y = x\varphi\left(y'\right) + \psi\left(y'\right), \tag{42}$$
где φ и ψ — дифференцируемые функции. Уравнение Лагранжа разрешимо в квадратурах.

Продифференцируем уравнение почленно по x, положив $y' = p$:
$$p - \varphi\left(p\right) = \frac{dp}{dx}\left[x\frac{d\varphi\left(p\right)}{dp} + \frac{d\psi\left(p\right)}{dp}\right]. \tag{43}$$

Равенство (43) выполняется в двух случаях.

1. $p - \varphi\left(p\right) = 0$, т. е. $p = \alpha_i$, где α_i — корни этого уравнения. При этом правая часть (43) автоматически обращается в нуль, т. к. dp/dx — производная от константы. Теперь для каждого i можно найти *особое решение*: $y_i = x\varphi\left(\alpha_i\right) + \psi\left(\alpha_i\right)$.

2. Если левая часть (43) отлична от нуля, то уравнение сводится к линейному относительно функции x и переменной p:
$$\Big[p - \varphi\left(p\right)\Big]\frac{dx}{dp} = x\,\frac{d\varphi\left(p\right)}{dp} + \frac{d\psi\left(p\right)}{dp}, \tag{44}$$
которое решается по алгоритму 7: $x = x\left(p, C\right)$ (здесь C — произвольная постоянная). Подставляя это выражение в исходное уравнение, получаем *общее решение уравнения Лагранжа*, заданное в параметрической форме:
$$\begin{cases} x = x(p, C); \\ y = x(p, C)\varphi\left(p\right) + \psi\left(p\right). \end{cases} \tag{45}$$

Пример 16. Решить уравнение
$$y = x\left(y'\right)^2 + \left(y'\right)^3.$$

Продифференцируем обе части уравнения по x и положим $y' = p$ (обратите внимание на то, что производные $\left(y'\right)^2 \equiv p^2$ и $\left(y'\right)^3 \equiv p^3$ берутся по правилам дифференцирования сложных функций):
$$p - p^2 = 2xp\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx}.$$

Если $p = 0$ или $p = 1$, то левая часть уравнения обращается в нуль. Подставляя эти значения в исходное уравнение вместо y', получаем два *особых решения* $y = 0$ и $y = x + 1$.

Найдем теперь *общее решение*. Умножив обе части последнего уравнения на dx/dp, приходим к линейному уравнению относительно функции $x = x\left(p\right)$:
$$\left(p - p^2\right)\frac{dx}{dp} - 2xp = 3p^2.$$

Решая его по алгоритму (7), находим x и, подставив в исходное уравнение p вместо y', получаем общее решение уравнения Лагранжа в параметрической форме:
$$\begin{cases} x = \frac{C}{(p-1)^2} - p - \frac{1}{2}; \\ y = 2xp^2 + p^3. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

3.4.1. $y = x(y' + 2) + 2y'^2$.

3.4.2. $y = x(1 + y') - 1 + y'$.

3.4.3. $y + xy' = y'^3$.

3.4.4. $2y(y' + 2) = xy'^2$.

3.4.5. $yy'^2 - 2xy'^3 = 1$.

3.5 Уравнение Клеро

Алгоритм 11, стр. 50. Формально уравнение Клеро

$$y = xy' + \psi(y') \tag{46}$$

является частным случаем уравнения Лагранжа (42) при $\varphi(y') = y'$. Отличие заключается в том, что, решая его тем же методом (почленное дифференцирование по x и замена $y' = p$), мы приходим к

$$\frac{dp}{dx}\left[x + \frac{d\psi(p)}{dp}\right] = 0. \tag{47}$$

Это равенство выполняется в двух случаях:

1. $dp/dx = 0$, т. е. $p = C$.
2. $x + \dfrac{d\psi(p)}{dx} = 0$.

Первый случай дает *общее решение* уравнения Клеро $y = Cx + \psi(C)$. Второй – *особое решение*, записанное в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{d\psi(p)}{dp}; \\ y = xp + \psi(p). \end{cases} \tag{48}$$

Можно показать, что кривая, которая описывается уравнениями (48), является огибаюшей для семейства прямых, задаваемых общим решением. Иными словами, для любой точки этой кривой можно подобрать такое значение константы C, что соответствующая ему прямая будет касаться кривой в этой точке.

Пример 17. Решить уравнение

$$y = xy' + 2\sqrt{-y'}$$

(отметим, что из условия задачи очевидно одно из свойств искомой функции: из неположительности производной $y' \leqslant 0$ следует, что функция y либо является монотонно убывающей, либо тождественно равна 0).

Общее решение уравнения Клеро получаем автоматически: подставляя C вместо p в исходное уравнение, имеем $y = Cx + 2\sqrt{-C}$.

Особое решение найдем из уравнения $x - 1/\sqrt{-p} = 0$. В параметрической форме оно имеет вид

$$x = \frac{1}{\sqrt{-p}}; \qquad y = xp + 2\sqrt{-p}.$$

Исключая отсюда p, получаем $y = 1/x$.

Построим интегральные кривые полученных решений (рис. 2). Общему решению соответствует семейство прямых (сплошные линии), особому – гипербола (линия 1), которая является огибающей всех прямых.

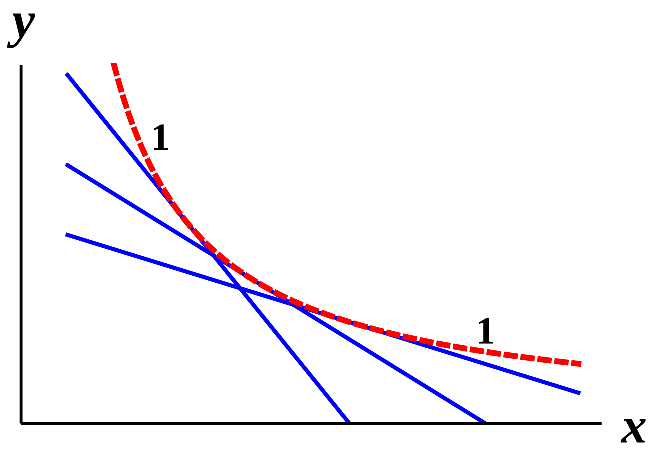


Рис. 2: Интегральные кривые для общего и особого решений уравнения Клеро

Задания для самостоятельного решения

3.5.1. $y = xy' + y'^3$.

3.5.2. $y = xy' + \sqrt[3]{y'}$.

3.5.3. $y = xy' + \sin y'$.

3.5.4. $y - xy' = \mathrm{e}^{y'}$.

3.5.5. $\frac{y}{y'} = x + \frac{1}{y'^4}$.

4 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

4.1 Однородные уравнения

Алгоритм 12, стр. 51. Решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{49}$$

коэффициенты которого a_i, $i = \overline{1, n}$ — вещественные константы, ищется в виде $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Подставив это выражение в (49), проведя дифференцирование и сократив на $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$, получим *характеристическое уравнение*

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \tag{50}$$

Известно, что степенные уравнения с постоянными коэффициентами вида (50) в общем случае разрешимы в радикалах (т. е. каждый корень можно аналитически выразить через коэффициенты) только в случае $n \leqslant 4$, поэтому не для всякого дифференциального уравнения типа (49) можно найти аналитическое решение. Будем, однако, предполагать, что все корни (50) известны. Коэффициенты уравнения вещественны, поэтому и корни должны либо быть вещественными, либо возникать комплексно сопряженными парами.

Возможны следующие варианты:

корень λ вещественный: решение $\mathrm{e}^{\lambda x}$;

корни $\pm iq$ чисто мнимые: решения $\cos qx$ и $\sin qx$;

корни $p \pm iq$ комплексные: решения $\mathrm{e}^{px} \cos qx$ и $\mathrm{e}^{px} \sin qx$.

Общее решение уравнения представляет собой линейную комбинацию всех перечисленных выше частных решений с коэффициентами в виде произвольных констант. Если какой-либо корень имеет кратность k, то соответствующее решение умножается на многочлен степени $k-1$ также с коэффициентами в виде произвольных констант. Все без исключения константы могут быть определены, если задано n начальных условий

$$y\left(x_0\right)=y_0^{(0)};\quad y'\left(x_0\right)=y_0^{(1)};\ldots;y^{(n-1)}\left(x_0\right)=y_0^{(n-1)}.$$

Пример 18. Решить уравнение

$$y^{(4)}+9y^{(2)}=0.$$

Будем искать решение в виде $y=\mathrm{e}^{\lambda x}$. Подставив это выражение в уравнение и сократив на экспоненту, приходим к характеристическому уравнению $\lambda^4+9\lambda^2=0$, корни которого $\lambda_{1,2}=\pm 3i$, $\lambda_{3,4}=0$.

Для первой пары корней частными решениями будут $\cos 3x$ и $\sin 3x$. Корень характеристического уравнения 0 дает $\mathrm{e}^{0\cdot x}=1$. Поскольку кратность этого корня равна 2, это решение нужно домножить на многочлен первой степени. Таким образом, общим решением уравнения будет $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 3x+C_3x+C_4$.

Пример 19. Решить уравнение

$$y^{(6)}+16y^{(3)}+64y=0.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее данному дифференциальному, $\lambda^6+16\lambda^3+64=0$. Корни его суть $\lambda_{1,2}=-2$, $\lambda_{3,4}=1+i\sqrt{3}$, $\lambda_{5,6}=1-i\sqrt{3}$.

Корню -2 соответствует решение e^{-2x}, но, т. к. корень этот имеет кратность 2, в общее решение он войдет домноженным на многочлен с неопределенными коэффициентами степени $2-1=1$: $(C_1+C_2x)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Пара комплексносопряженных корней $1\pm i\sqrt{3}$ дает $\mathrm{e}^x\left(C_3\cos\sqrt{3}x+C_4\sin\sqrt{3}x\right)$, но, т. к. эти корни также кратные, снова домножаем на многочлен первой степени.

Общее решение уравнения имеет вид

$$y=(C_1+C_2x)\,\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^x\left(C_3\cos\sqrt{3}x+C_4\sin\sqrt{3}x\right)(C_5+C_6x).$$

Пример 20. Решить уравнение

$$y''+5y'+6y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2.$$

Корнями характеристического уравнения $\lambda^2+5\lambda+6=0$ являются $\lambda_1=-2$ и $\lambda_2=-3$. Общее решение, таким образом, имеет вид $y=C_1\,\mathrm{e}^{-2x}+C_2\,\mathrm{e}^{-3x}$.

Эта задача состоит из собственно уравнения и начальных условий (задача Коши). Для определения констант C_1 и C_2, которые теперь уже не будут произвольными, найдем производную решения $y'=-2C_1\,\mathrm{e}^{-2x}-3C_2\,\mathrm{e}^{-3x}$ и, подставив $x=0$, приравняем полученные выражения к 1 и 2 соответственно:

$$\begin{cases} C_1+C_2=1;\\ -2C_1-3C_2=2.\end{cases}$$

Решив систему, получаем $C_1=5$, $C_2=-4$ и, следовательно, $y=5\,\mathrm{e}^{-2x}-4\,\mathrm{e}^{-3x}$. Подстановкой легко убедиться в том, что этот результат удовлетворяет как уравнению, так и начальным условиям.

Задания для самостоятельного решения

4.1.1. $y''+4y'+3y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

4.1.2. $y^{(5)}-8y'''-9y'=0.$

4.1.3. $y^{(4)}+9y''+16y=0.$

4.1.4. $y''' + 27y = 0.$

4.1.5. $y^{(4)} - y = 0.$

4.1.6. $y^{(4)} + y = 0.$

4.2 Неоднородные уравнения. Метод Лагранжа

Алгоритм 13, стр. 52. Как уже отмечено на стр. 18, общее решение y линейного неоднородного ДУ

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{51}$$

равно сумме общего решения $\tilde{y}$ соответствующего однородного уравнения (49) и любого частного решения y_1 данного неоднородного уравнения. $\tilde{y}$ получаем по алгоритму 12, а для нахождения y_1 воспользуемся *методом Лагранжа* (иначе называемом *методом вариации произвольных постоянных*).

Пусть $\tilde{y} = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n$. Будем искать частное решение (51) в той же форме, но полагая коэффициенты C не константами, а функциями x:

$$y_1 = C_1(x) z_1 + C_2(x) z_2 + \ldots + C_n(x) z_n. \tag{52}$$

Запишем производные y_1 до n-го порядка включительно

$$y_1' = C_1(x) z_1' + C_2(x) z_2' + \ldots + C_n(x) z_n' + \underbrace{C_1'(x) z_1 + C_2'(x) z_2 \ldots + C_n'(x) z_n};$$
$$y_1'' = C_1(x) z_1'' + C_2(x) z_2'' + \ldots + C_n(x) z_n'' + \underbrace{C_1'(x) z_1' + C_2'(x) z_2' \ldots + C_n'(x) z_n'};$$
$$\ldots$$
$$y_1^{(n)} = C_1(x) z_1^{(n)} + C_2(x) z_2^{(n)} + \ldots + C_n(x) z_n^{(n)} + \underline{C_1'(x) z_1^{(n-1)} + C_2'(x) z_2^{(n-1)} \ldots + C_n'(x) z_n^{(n-1)}},$$

приравнивая каждый раз $\underbrace{\text{эту сумму}}$ к нулю, а в выражении для старшей производной $\underline{\text{эту сумму}}$ к $f(x)$. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) z_1 + C_2'(x) z_2 \ldots + C_n'(x) z_n = 0; \\ C_1'(x) z_1' + C_2'(x) z_2' \ldots + C_n'(x) z_n' = 0; \\ \ldots \\ C_1'(x) z_1^{(n-1)} + C_2'(x) z_2^{(n-1)} \ldots + C_n'(x) z_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{53}$$

Разрешив эту систему относительно $C_i'(x)$, $i = \overline{1, n}$, путем интегрирования находим искомые функции $C_i(x)$. Подставив их в (52), получаем искомое частное решение уравнения (51). Общее же решение исходной задачи записывается как $y = \tilde{y} + y_1$.

Пример 21. Решить уравнение

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Будем искать решение в виде $y = \tilde{y} + y_1$, где $\tilde{y}$ и y_1 — общее решение соответствующего однородного и частное решение неоднородного уравнений

$$\tilde{y}'' + 3\tilde{y}' + 2\tilde{y} = 0;$$
$$y_1'' + 3y_1' + 2y_1 = \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

Решение однородного уравнения получаем путем подстановки $\tilde{y} = \mathrm{e}^{\lambda x}$ и сведения дифференциального уравнения к степенному характеристическому $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, корни которого $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Отсюда $\tilde{y} = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}$.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом Лагранжа. Взяв вместо констант C_1 и C_2 функции, получим $y_1 = C_1(x)\,\mathrm{e}^{-x} + C_2(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$. Последовательно дифференцируя y_1, приравниваем к нулю сумму слагаемых в правой части, содержащих производные $C_1(x)$ и $C_2(x)$, пока порядок производной y_1 не станет равным порядку уравнения; в этом последнем случае упомянутую сумму приравниваем к правой части исходного уравнения:

$$C_1'(x)\,\mathrm{e}^{-x} + C_2'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} = 0;$$
$$-C_1'(x)\,\mathrm{e}^{-x} - 2C_2'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

Полученную систему проще всего решить, сложив уравнения почленно:

$$C_2'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

Интегрируя, находим $C_2(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1) - \mathrm{e}^x$ (константу интегрирования можно положить равной нулю, т. к. нас устраивает *любое* частное решение). Выражая из первого уравнения системы

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\,\mathrm{e}^{-x} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1},$$

получаем $C_1(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$.

Используя выражения для $C_1(x)$ и $C_2(x)$, получаем частное решение уравнения $y_1 = \mathrm{e}^{-x}\ln(\mathrm{e}^x + 1) - \underline{\mathrm{e}^{-x}} + \mathrm{e}^{-2x}\ln(\mathrm{e}^x + 1)$. Общее решение имеет вид

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x} + \left[\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right]\ln(\mathrm{e}^x + 1)$$

(слагаемое, выделенное выше подчеркиванием, можно не учитывать, переопределив константу C_1).

Для определения C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями, предварительно найдя первую производную:

$$y' = -C_1 \mathrm{e}^{-x} - 2C_2 \mathrm{e}^{-2x} - \left[\mathrm{e}^{-x} + 2\,\mathrm{e}^{-2x}\right]\ln(\mathrm{e}^x + 1) + \left[\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right]\mathrm{e}^x/(\mathrm{e}^x + 1).$$

Положив $x = 0$, получаем

$$C_1 + C_2 + 2\ln 2 = 1;$$
$$-C_1 - 2C_2 - 3\ln 2 + 1 = 0,$$

откуда $C_1 = 1 - \ln 2$, $C_2 = -\ln 2$. Таким образом, решение уравнения с учетом начальных условий имеет вид

$$y = \left(e^{-2x} + e^{-x}\right)\ln(1 + e^x) - e^{-2x}\ln 2 + e^{-x}(1 - \ln 2).$$

Задания для самостоятельного решения

4.2.1. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

4.2.2. $y'' + y = 4\operatorname{ctg} x$.

4.2.3. $y'' + 2y' + y = \frac{1}{x}$.

4.2.4. $y'' + 4y' + 4y = \frac{18}{x^4} - \frac{24}{x^3} + \frac{12}{x^2}$.

4.2.5. $y'' + y = \cos^{-\frac{3}{2}} 2x$.

4.2.6. $y'' - y' = \frac{2(x-1)}{x^3}\,\mathrm{e}^x$.

4.2.7. $y'' + 4y = \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^2}$.

4.3 Случай квазиполинома Эйлера

Алгоритм 14, стр. 53. Частное решение уравнения типа (51) в некоторых случаях можно получить, не прибегая к громоздкому методу вариации произвольных постоянных. Это возможно в том случае, когда правая часть уравнения представляет собой *квазиполином Эйлера*:

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right], \tag{54}$$

где P_m и Q_n — многочлены степени m и n соответственно, α и β — некоторые вещественные константы (обратите внимание на то, что аргументы косинуса и синуса должны быть одинаковыми). Комплексное число $\gamma = \alpha + i\beta$ называется *контрольным числом квазиполинома*. Очевидно, что подбором контрольного числа в качестве квазиполинома можно представить показательную функцию ($\beta = 0$, $m = n = 0$), тригонометрические функции ($\alpha = 0$, $m = n = 0$), многочлен степени m ($\alpha = \beta = 0$) и разнообразные их произведения.

Частное решение неоднородного линейного уравнения с правой частью в виде квазиполинома Эйлера ищется по формуле

$$y_1 = x^r\,\mathrm{e}^{\alpha x}\left[R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x\right], \tag{55}$$

где r — кратность корня γ в характеристическом уравнении (50), R и S — многочлены с неопределенными коэффициентами степени $k = \max(m, n)$. Подставляя y_1 в уравнение и приводя подобные, приравниваем множители при одинаковых функциях в левой и правой частях и составляем систему алгебраических уравнений, из которой находим коэффициенты многочленов R и S.

Пример 22. Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 2\,\mathrm{e}^{2x} - \sin 2x,$$

правая часть которого представляет собой сумму двух квазиполиномов.

Ищем решение в виде $y = \tilde{y} + y_1 + y_2$, где слагаемые в правой части удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \tilde{y}'' - 4\tilde{y}' + 4\tilde{y} &= 0;\\ y_1'' - 4y_1' + 4y_1 &= 2\,\mathrm{e}^{2x};\\ y_2'' - 4y_2' + 4y_2 &= -\sin 2x. \end{aligned}$$

В однородном уравнении заменим $\tilde{y}$ на $\mathrm{e}^{\lambda x}$ и получим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4$, корни которого $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Эти корни кратные, поэтому $\tilde{y} = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Для нахождения y_1 воспользуемся тем, что в правой части соответствующего уравнения находится квазиполином, для которого $m = n = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$. Таким образом, контрольное число квазиполинома $\gamma = \alpha + i\beta = 2$ совпадает с корнем характеристического уравнения, причем кратность корня $r = 2$. Частное решение ищем в виде $y_1 = ax^2\,\mathrm{e}^{2x}$. Подставив это выражение в уравнение, сократив на экспоненту и приведя подобные, получаем $a = 1$.

Для y_2 квазиполином имеет значения параметров $m = n = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Контрольное число $\gamma = i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $r = 0$; положим $y_2 = a\cos 2x + b\sin 2x$. Подставив y_2 в уравнение, приведя подобные и приравняв коэффициенты в обеих частях уравнения по отдельности для косинусов и синусов, получаем $a = -1/8$ и $b = 0$, следовательно, $y_2 = -\sin 2x/8$.

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{2x} + x^2\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{8}\cos 2x.$$

Задания для самостоятельного решения

4.3.1. $y'' - y = x^3 - 2x$.

4.3.2. $y'' - 4y' + 4y = 3\,\mathrm{e}^{2x}$.

4.3.3. $y^{(4)} - 16y = 4\,\mathrm{e}^{2x}$.

4.3.4. $y'' + 9y = 2\cos 3x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

4.3.5. $y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^x + 2x$.

4.3.6. $y'' + y = \mathrm{e}^x + 2\sin x$.

4.3.7. $y'' - 2y' = x^2 + 2x - 1$.

4.3.8. $y^{(4)} + 2y'' + y = 2\sin x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

4.3.9. $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \sin x$.

5 Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

5.1 Сведение системы к уравнению более высокого порядка

Алгоритм 15, стр. 54. Всякая система дифференциальных уравнений последовательным исключением искомых функций может быть сведена к одному уравнению более высокого порядка относительно одной функции[1]. Уравнение это затем решается одним из описанных в предыдущих разделах способов.

Алгоритм проще всего понять на конкретном примере.

Пример 23. Решить систему

$$\begin{cases} x' = -3x + y + \sin 3t, \\ y' = -8x - 9y, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1. \end{cases} \tag{56}$$

Почленно продифференцируем по переменной t первое уравнение системы: $x''{=}{-}3x'{+}y'{+}3\cos 3t$. Подставим вместо производной y' ее значение из второго уравнения:

$$x'' = -3x' - 8x - 9y + 3\cos 3t. \tag{57}$$

Выразим y из первого уравнения:

$$y = x' + 3x - \sin 3t \tag{58}$$

и подставим в (57)

$$x'' = -3x' - 8x - 9x' - 27x + 9\sin 3t + 3\cos 3t,$$

откуда

$$x'' + 12x' + 35x = 9\sin 3t + 3\cos 3t. \tag{59}$$

Будем искать решение (59) в виде $x = \tilde{x} + x_1$, где $x = \tilde{x}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\tilde{x}'' + 12\tilde{x}' + 35\tilde{x} = 0.$$

[1]Верно и обратное утверждение: любое дифференциальное уравнение порядка выше первого можно представить в виде системы уравнений первого порядка.

Характеристическое уравнение $\lambda^2+12\lambda+35=0$ имеет корни $\lambda_1=-5$ и $\lambda_2=-7$ и, таким образом, общим решением однородного уравнения будет

$$\tilde{x}=C_1\,\mathrm{e}^{-5t}+C_2\,\mathrm{e}^{-7t}. \tag{60}$$

Частное решение x_1 неоднородного уравнения (59) находим по формуле (55), т. к. в правой части уравнения стоит квазиполином Эйлера. Пусть

$$x_1=a\cos 3t+b\sin 3t, \tag{61}$$

где a и b — константы, подлежащие определению. Подставляя (61) в (59) и сравнивая коэффициенты при соответствующих тригонометрических функциях, получаем

$$26a+36b=3;\quad -36a+26b=9,$$

откуда

$$a=-\frac{123}{986},\quad b=\frac{171}{986}. \tag{62}$$

Общее решение уравнения (59) имеет вид

$$x=C_1\,\mathrm{e}^{-5t}+C_2\,\mathrm{e}^{-7t}-\frac{123}{986}\cos 3t+\frac{171}{986}\sin 3t. \tag{63}$$

Для нахождения y подставим (63) в (58); получаем

$$y=-2C_1\,\mathrm{e}^{-5t}-4C_2\,\mathrm{e}^{-7t}+\frac{72}{493}\cos 3t-\frac{52}{493}\sin 3t.$$

Воспользуемся теперь начальными условиями. Положим $t=0$, $x=0$, $y=1$:

$$\begin{cases} C_1+C_2-\frac{123}{986}=0,\\ -2C_1-4C_2+\frac{72}{493}=1.\end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $C_1=23/34$ и $C_2=-16/29$. Таким образом, решение системы (56) с начальными условиями

$$x=\frac{23}{34}\,\mathrm{e}^{-5t}-\frac{16}{29}\,\mathrm{e}^{-7t}-\frac{123}{986}\cos 3t+\frac{171}{986}\sin 3t, \tag{64}$$

$$y=\frac{23}{17}\,\mathrm{e}^{-5t}+\frac{64}{29}\,\mathrm{e}^{-7t}+\frac{72}{493}\cos 3t-\frac{52}{493}\sin 3t. \tag{65}$$

Теперь необходимо сделать две проверки — на соответствие решения начальным условиям и уравнениям системы. Непосредственной подстановкой (64) и (65) в (56) убеждаемся, что уравнения обращаются при этом в тождества. Задача решена.

Задания для самостоятельного решения

5.1.1. $\begin{cases} x'=5x+5y,\\ y'=-13x+7y.\end{cases}$

5.1.2. $\begin{cases} x'=-4x+2y,\\ y'=-16x+4y.\end{cases}$

5.1.3. $\begin{cases} x'=-4x+3y,\\ y'=x-6y.\end{cases}$

5.1.4. $\begin{cases} x' = 5y, \\ y' = -2x + 6y. \end{cases}$

5.1.5. $\begin{cases} x' = 2x + 5y - 4 + 6t, \\ y' = x + 6y, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

5.1.6. $\begin{cases} x' = x + 4y - 20t, \\ y' = -9x - 12y, \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases}$

5.1.7. $\begin{cases} x' = -2x + 2y - \sin 2t, \\ y' = 15x - 3y. \end{cases}$

5.1.8. $\begin{cases} x' = x + 5y + 4\sin 2t, \\ y' = -13x - y. \end{cases}$

5.1.9. $\begin{cases} x' = -4x + 5y + 4\cos 7t, \\ y' = -13x - 2y. \end{cases}$

5.1.10. $\begin{cases} x' = x + 5y - 5 + 27t, \\ y' = -9x + 7y. \end{cases}$

5.2 Подбор интегрируемых комбинаций

Алгоритм 16, стр. 55. Интегрируемая комбинация – это дифференциальное уравнение, следующее из данной системы, но легко интегрируемое. Существуют различные способы отыскания интегрируемых комбинаций. Один из них, относящийся к системам линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, описан в алгоритме 16.

Если количество найденных независимых интегрируемых комбинаций совпадает с числом искомых функций, то система дифференциальных уравнений сводится к системе уравнений алгебраических. В любом случае всякая найденная независимая комбинация уменьшает на единицу число искомых функций.

Заметим, что, если найти интегрируемую комбинацию невозможно, то это вовсе не означает неразрешимости системы – просто ее следует решать каким-либо иным методом.

Пример 24. Решить систему:

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + 1, \\ y' = x + 5y + 4t, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 2. \end{cases} \tag{66}$$

Сложим уравнения, предварительно умножив второе почленно на k:

$$(x + ky)' = (2 + k)\,x + (-2 + 5k)\,y + 1 + 4kt = (2 + k)\left(x + \frac{-2 + 5k}{2 + k}y\right) + 1 + 4kt.$$

Сравнивая выражения в левой и правой частях, попробуем подобрать такие вещественные значения k, чтобы выполнялось равенство

$$k = \frac{-2 + 5k}{2 + k}.$$

Полученное квадратное уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$ имеет два различных вещественных корня, следовательно, для решения данной системы можно подобрать две различные интегрируемые комбинации.

Положив k равным 1 и 2, получаем соответственно

$$
\begin{aligned}
(x+y)' &= 3\,(x+y)+4t+1,\\
(x+2y)' &= 4\,(x+2y)+8t+1.
\end{aligned}
$$

Решая эти линейные *дифференциальные* уравнения первого порядка по алгоритму 7, приходим к системе *алгебраических* уравнений относительно x и y:

$$
\begin{cases} x+y = C_1\,\mathrm{e}^{3t} - \frac{4}{3}t - \frac{7}{9},\\ x+2y = C_2\,\mathrm{e}^{4t} - 2t - \frac{3}{4}, \end{cases}
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
x &= 2C_1\,\mathrm{e}^{3t} - C_2\,\mathrm{e}^{4t} - \frac{2}{3}t - \frac{29}{36},\\
y &= -C_1\,\mathrm{e}^{3t} + C_2\,\mathrm{e}^{4t} - \frac{2}{3}t + \frac{1}{36}.
\end{aligned}
$$

Для определения постоянных интегрирования подставим начальные значения

$$
\begin{aligned}
1 &= 2C_1 - C_2 - \frac{29}{36},\\
2 &= -C_1 + C_2 + \frac{1}{36}.
\end{aligned}
$$

Решение этой системы дает $C_1 = 34/9$, $C_2 = 23/4$. Окончательно

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{68e^{3t}}{9} - \frac{23e^{4t}}{4} - \frac{2t}{3} - \frac{29}{36},\\
y &= -\frac{34e^{3t}}{9} + \frac{23e^{4t}}{4} - \frac{2t}{3} + \frac{1}{36}.
\end{aligned}
$$

Подстановка полученных выражений в исходную систему приводит к тождествам. Задача решена.

Задания для самостоятельного решения

5.2.1. $\begin{cases} x' = 3x+2y,\\ y' = x+4y. \end{cases}$

5.2.2. $\begin{cases} x' = 3x-6y,\\ y' = x+8y. \end{cases}$

5.2.3. $\begin{cases} x' = 3x-4y+2t,\\ y' = x+7y. \end{cases}$

5.2.4. $\begin{cases} x' = 3x+12y,\\ y' = x+4y-\sin t. \end{cases}$

5.2.5. $\begin{cases} x' = 3x+4y,\\ y' = x+3y+3\,\mathrm{e}^{2t},\\ x(0)=y(0)=1. \end{cases}$

5.2.6. $\begin{cases} x' = 3x-9y+1,\\ y' = x-3y-t^2. \end{cases}$

6 Устойчивость решений дифференциальных уравнений по Ляпунову

6.1 Виды точек покоя

Алгоритм 17, стр. 56. Пусть $x_1(t, x_0)$ — решение задачи (под задачей мы здесь понимаем дифференциальное уравнение или систему дифференциальных уравнений), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$. Это решение называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что при $|\Delta x_0| < \delta(\varepsilon)$ для всех $t > t_0$ справедливо неравенство

$$\Big| x(t, x_0 + \Delta x_0) - x(t, x_0) \Big| < \varepsilon.$$

Иными словами, при малом изменении начального условия поведение решения качественно не изменяется.

Решение задачи называется *асимптотически устойчивым*, если оно 1) устойчиво по Ляпунову и 2) существует такое $\delta > 0$, что для всех $|\Delta x_0| < \delta$ выполняется предельный переход

$$\lim_{t\to\infty} \Big| x(t, x_0 + \Delta x_0) - x(t, x_0) \Big| = 0.$$

Смысл этого соотношения таков: решения с близкими начальными условиями с течением времени начинают вести себя одинаковым образом.

В качестве примера рассмотрим динамику материальной точки, закрепленной на пружине и совершающей колебания под действием силы сопротивления, которая описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{67}$$

которое легко сводится к системе из двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - 2hy. \end{cases} \tag{68}$$

Здесь x — координата точки, y — ее скорость (точнее, проекция скорости на ось x), точка над буквой обозначает производную по времени (т. е. по переменной t). Параметр $h \geqslant 0$ характеризует силу сопротивления движению $F_x = -2hy$, циклическая частота $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ (k — жесткость пружины, m — масса колеблющейся точки).

Характеристическое уравнение, соответствующее как (67), так и (68), имеет вид

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0, \tag{69}$$

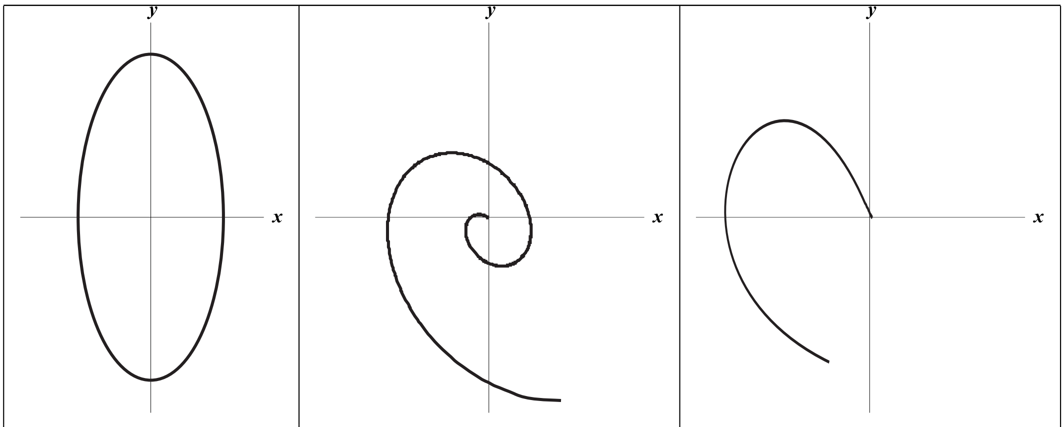
корни его

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}. \tag{70}$$

Решения (67–68) при различных соотношениях между h и ω_0 представлены в таблице:

Параметры	Корни	Решения	Точка покоя
$h = 0$	$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$	$x = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$ $y = -C_1\omega_0\sin\omega_0 t + C_2\omega_0\cos\omega_0 t$	центр
$0 < h < \omega_0$	$\lambda_{1,2} = -h \pm i\omega_1$, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$	$x = \mathrm{e}^{-ht}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t)$ $y = \mathrm{e}^{-ht}\left[\omega(-C_1\sin\omega_1 t + C_2\cos\omega_1 t) -\right.$ $\left.-h(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t)\right]$	уст. фокус
$h = \omega_0$	$\lambda_1 = \lambda_2 = -h$	$x = (C_1 + C_2 t)\,\mathrm{e}^{-ht}$ $y = (C_2 - C_1 h - C_2 ht)\,\mathrm{e}^{-ht}$	уст. узел
$h > \omega_0$	$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$	$x = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ $y = \lambda_1 C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$	уст. узел

Графическую интерпретацию сформулированных выше положений удобно давать с использованием *фазовых диаграмм*.



Центр	Фокус	Устойчивый узел

Каждая такая диаграмма представляет собой параметрический график в координатах x, y. Важно отметить, что эти линии не совпадают с реальными траекториями колеблющихся тел; каждая точка на графике характеризует координату и скорость частицы в данный момент времени. Замкнутая линия описывает периодическое движение, сходящаяся спираль — затухающие колебания, а кривая, стремящаяся к началу координат — апериодическое движение, т. е. затухание при большой силе сопротивления.

Пример 25. Исследовать на устойчивость уравнение

$$\ddot{x} + 4a\dot{x} + ax = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

при различных значениях параметра a.

Характеристический полином уравнения имеет вид $\lambda^2 + 4a\lambda + a$, его дискриминант $D = 4a^2 - a$, а корни $\lambda_{1,2} = -2a \pm \sqrt{D}$. Очевидно, что дискриминант положителен при $0 < a < 4$, отрицателен при $a < 0$ или $a > 1/4$ и равен нулю при $a = 0$ или $a = 1/4$. Рассмотрим эти случаи в порядке возрастания a.

$a < 0$ Дискриминант отрицателен, следовательно, корни характеристического уравнения — комплексно сопряженные числа с положительной вещественной частью, равной $-2a$. Точка покоя — *неустойчивый фокус*.

$a = 0$ Оба корня характеристического уравнения равны 0 и общее решение уравнения имеет вид $x = C_1 t + C_2$. Найдем константы, используя начальные условия: $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Таким образом, $x \equiv 1$, и *все решения уравнения устойчивы*[1].

$0 < a < 1/4$ Дискриминант положителен, оба корня вещественны и отрицательны (т. к. для $a > 0$ выполняется неравенство $\sqrt{4a^2 - a} < 2a$). Точка покоя — *устойчивый узел*.

$a = 1/4$ Дискриминант равен нулю, характеристическое уравнение имеет кратные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -1/2$. Точка покоя — *устойчивый узел*.

$a > 1/4$ Дискриминант снова отрицателен, корни — комплексно сопряженные числа, но на сей раз с отрицательной вещественной частью. Точка покоя — *устойчивый фокус*.

[1] Если бы начальные условия имели вид, например, $x(0) = 0, x'(0) = 1$, то общим решением уравнения было бы $x = t$, т. е. точка покоя неустойчива.

Задания для самостоятельного решения

6.1.1. $a^2y'' + 9y = 0$.

6.1.2. $y'' + ay' + 4y = 0$.

6.1.3. $y'' + 4y' + a^2y = 0$.

6.1.4. $ay'' + 2y' + ay = 0$.

6.1.5. $ay'' + ay' + y = 0$.

6.1.6. $y'' + (a-1)y' + ay = 0$.

7 Уравнения в частных производных первого порядка

7.1 Линейное однородное уравнение

Алгоритм 18, стр. 57. Для решения уравнения вида

$$P(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{71}$$

где $u = u(x,y,z)$ — искомая функция, а P, Q и R заданы, используется следующий метод. Пусть

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y,z); \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y,z); \\ \dfrac{dz}{dt} = R(x,y,z). \end{cases} \tag{72}$$

Исключив из этой системы dt, запишем ее в виде

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \tag{73}$$

Запись (72) в виде (73) называется *системой в симметрической форме*. Для ее решения удобно пользоваться *рядом равных отношений*:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_na_n}{k_1b_1 + k_2b_2 + \dots + k_nb_n}. \tag{74}$$

Важно отметить, что в (73) нет дробей — это просто условная форма записи. Например, записав систему $x' = y$; $y' = x$ в симметрической форме и применив к ней формулу (74) с коэффициентами $k_1 = x$, $k_2 = -y$, получим

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{xdx - ydy}{0}.$$

Последняя запись вовсе не означает деления на ноль; смысл ее в том, что $xdx - ydy = 0$. Решая это дифференциальное уравнение, получаем интеграл системы $x^2 - y^2 = C$.

Вернемся к отысканию решения уравнения в частных производных. Можно показать, что система (73) эквивалентна уравнению (72). Это означает, что всякое решение уравнения является решением системы и всякое решение системы удовлетворяет уравнению.

Если начальные условия не заданы, то решение уравнение будет получено в виде произвольной дифференцируемой функции, аргументами которой являются независимые интегралы системы, количество которых равно количеству переменных уравнения минус 1.

Пример 26. Решить уравнение:

$$(z-y)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Запишем систему в симметрической форме, к которой сводится данное уравнение:

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

Одним из интегралов является решение уравнения

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y};$$

очевидно, что отсюда следует $y^2 - z^2 = C_1$.

Построим теперь ряд равных отношений, выбрав $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -1$:

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy - dz}{z-y}.$$

Теперь $dx = -(z-y)\, d(z-y)$ или $2x - (z-y)^2 = C_2$.

Таким образом, решением исходного уравнения является произвольная непрерывно дифференцируемая функция вида $\Phi\left[y^2 - z^2,\, 2x - (z-y)^2\right]$. Обратите внимание на то, что, хотя формально Φ зависит от трех переменных x, y, z, они входят в нее только в двух возможных сочетаниях; вот почему эта функция является функцией *двух* переменных.

Задания для самостоятельного решения

7.1.1. $(x+4y)\frac{\partial u}{\partial x} - (y+1)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

7.1.2. $\frac{\partial u}{\partial x} - (y+z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y+z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

7.1.3. $(1+x^2)\frac{\partial u}{\partial z} + y\frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

7.1.4. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

7.1.5. $x^2\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

7.1.6. $x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} - z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

7.2 Задача Коши

Алгоритм 19, стр. 57. Решение обыкновенного дифференциального уравнения, если не заданы начальные условия, содержит произвольные постоянные. Корректно сформулированная задача Коши из бесчисленного множества интегральных кривых оставляет лишь ту, которая проходит через данную точку.

Решение уравнения в частных производных содержит уже не постоянные, а произвольные функции, совокупность которых определяет некоторую интегральную поверхность. Соответственно, решая задачу Коши для уравнения первого порядка с двумя переменными, из бесчисленного множества интегральных поверхностей мы оставляем лишь ту, которая проходит через данную линию. Если число переменных больше 2, геометрическая интерпретация также возможна, но менее наглядна.

Пусть

$$P\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial x}+Q\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial y}+R\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial z}=0, \tag{75}$$

$$u\left(x_0,y,z\right)=f\left(y,z\right). \tag{76}$$

Решая это уравнение, найдем два независимых интеграла $\varphi\left(x,y,z\right)$ и $\psi\left(x,y,z\right)$, а затем составим систему, положив предварительно $x=x_0$:

$$\begin{cases} \varphi\left(x_0,y,z\right)=C_1; \\ \psi\left(x_0,y,z\right)=C_2. \end{cases} \tag{77}$$

Разрешим теперь эту систему, выразив y и z через C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y=v\left(C_1,C_2\right); \\ z=w\left(C_1,C_2\right). \end{cases} \tag{78}$$

Теперь решение задачи Коши (75) получаем, подставив в аргумент функции f из начального условия (76) вместо y и z их значения из (78), заменив предварительно C_1 и C_2 на $\varphi\left(x,y,z\right)$ и $\psi\left(x,y,z\right)$ соответственно:

$$u\left(x,y,z\right)=f\left[v\left(\varphi,\psi\right)+w\left(\varphi,\psi\right)\right]. \tag{79}$$

Пример 27. Решить уравнение

$$\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{80}$$

с начальным условием $u(1,y,z)=y-z$.

Составим систему в симметрической форме, следующую из заданного уравнения:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Независимыми интегралами этой системы будут $\varphi(x,y,z)=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ и $\psi(x,y,z)=\sqrt{y}-\sqrt{z}$. Запишем систему вида (77), положив в соответствии с начальным условием $x=1$:

$$\begin{cases} 1-\sqrt{y}=C_1; \\ \sqrt{y}-\sqrt{z}=C_2, \end{cases}$$

откуда $y=\left(1-C_1\right)^2$, $z=\left(1-C_1-C_2\right)^2$ (эти соотношения – аналог (78)) и будем искать решение задачи в форме правой части начального условия, подставив вместо y и z их только что полученные выражения с заменой $C_1\to\varphi(x,y,z)$ и $C_2\to\psi(x,y,z)$:

$$\begin{aligned} u\left(x,y,z\right)&=\underbrace{\left(1-\varphi\right)^2}_{y}-\underbrace{\left(1-\varphi-\psi\right)^2}_{z}= \\ &=\left(1-\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-\left(1-\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2= \\ &=\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(2-2\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right). \end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в исходное уравнение, приходим к тождеству, положив $x=1$, получаем $y-x$. Задача решена.

7.3 Системы уравнений в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами

Алгоритм 20, стр. 58. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — функции двух переменных, удовлетворяющие следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + a_{11}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12}\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + a_{21}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22}\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{81}$$

и начальными (при $t = 0$) условиями

$$\begin{aligned} &u_1\left(x,0\right) = f\left(x\right), \\ \\ &u_2\left(x,0\right) = g\left(x\right). \end{aligned} \tag{82}$$

Здесь коэффициенты a — константы, $0 < t < +\infty$, а x принимает значения на интервале непрерывности функций f и g. Далее для компактности записи мы будем использовать обозначения типа $u_x = \partial u/\partial x$.

Систему (81) можно записать также и в матричной форме:

$$U_t + AU_x = 0, \quad \text{где} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{83}$$

Собственными значениями матрицы A называются числа λ, удовлетворяющие матричному уравнению $|A - \lambda E| = 0$, где E — единичная матрица, а прямые скобки соответствуют операции вычисления определителя. Из

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

следует, что $\lambda_{1,2}$ суть корни

$$\left(a_{11} - \lambda\right)\left(a_{22} - \lambda\right) - a_{12}a_{21} = 0.$$

Будем предполагать, что эти корни λ_1 и λ_2 вещественны и различны.

Собственные векторы той же матрицы — это столбцы

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix} \text{ и } Y_2 = \begin{pmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющие уравнениям $AY_1 = \lambda_1 Y_1$ и $AY_2 = \lambda_2 Y_2$. Они определены с точностью до постоянного числового множителя, т. к. из $AY_1 = \lambda_1 Y_1$ следует $A\left(CY_1\right) = \lambda_1\left(CY_1\right)$.

Построим матрицу P из собственных векторов матрицы A как из столбцов:

$$P = \left(\, Y_1 \,\middle|\, Y_2 \,\right) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \\ y_2^{(1)} & y_1^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{84}$$

Эта матрица диагонализирует матрицу A:

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{85}$$

(здесь P^{-1} — обратная по отношению к P матрица: $P^{-1}P = PP^{-1} = E$).

Введем теперь новые неизвестные функции $V = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ так, чтобы

$$U = PV, \tag{86}$$

и подставим (86) в (83): $PV_t + APV_x = 0$. Умножив почленно это уравнение слева на P^{-1}, получаем с учетом (85) $V_t + \Lambda V_x = 0$ или

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0 \qquad (87)$$

Уравнения системы (87) «расцеплены»: в каждом из них присутствует лишь одна неизвестная функция. Решения этих уравнений — бегущие волны, скорости которых равны собственным значениям матрицы: $v_1(x,t) = \varphi(x - \lambda_1 t)$ и $v_2(x,t) = \psi(x - \lambda_2 t)$. φ и ψ здесь произвольные дифференцируемые функции одной переменной (см. сноску на стр. 40).

Теперь

$$V = \begin{pmatrix} \varphi(x - \lambda_1 t) \\ \psi(x - \lambda_2 t) \end{pmatrix}.$$

Подставив V в (86), находим U и выражаем искомые функции через φ и ψ:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= y_1^{(1)}\varphi(x - \lambda_1 t) + y_1^{(2)}\psi(x - \lambda_2 t), \\ u_2(x,t) &= y_2^{(1)}\varphi(x - \lambda_1 t) + y_2^{(2)}\psi(x - \lambda_2 t). \end{aligned} \qquad (88)$$

Получено общее решение системы.

Для учета начальных условий положим в (88) $t = 0$ и учтем (82):

$$\begin{aligned} f(x) &= y_1^{(1)}\varphi(x) + y_1^{(2)}\psi(x), \\ g(x) &= y_2^{(1)}\varphi(x) + y_2^{(2)}\psi(x). \end{aligned}$$

Выразив отсюда φ и ψ, подставим их в общее решение, приведя аргументы в соответствие с (88).

Пример 28. Решить однородную систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_1)_t + 3(u_1)_x - 2(u_2)_x = 0; \\ (u_2)_t - (u_1)_x + 2(u_2)_x = 0; \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} u_1(x,0) = x; \\ u_2(x,0) = 1 - x. \end{array} \right. \qquad (89)$$

1. Найдем собственные значения матрицы системы (89):

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ и, следовательно, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$.

2. Построим собственные векторы матрицы. Из уравнения $AY_1 = \lambda_1 Y$ следует

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot y_1^{(1)} \\ 1 \cdot y_2^{(1)} \end{pmatrix},$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} 3y_1^{(1)} - 2y_2^{(1)} = y_1^{(1)}, \\ -2y_1^{(1)} + 2y_2^{(1)} = y_2^{(1)}. \end{array} \right.$$

Очевидно, что полученные уравнения следуют одно из другого и сводятся к $y_1^{(1)} = y_2^{(1)}$ (отметим, что на этом промежуточном этапе мы заодно убедились, что пока все в порядке; если бы уравнения получились различными, то это означало бы, что где-то ранее была допущена ошибка). В качестве первого собственного вектора мы можем выбрать *любой* столбец, состоящий из двух равных элементов; для простоты положим $y_1^{(1)} = y_2^{(1)}$ и, таким образом, $Y_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Тем же способом находим, что $Y_2 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Таким образом, матрица диагонализации P, составленная из собственных векторов матрицы A,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть теперь $U = PV$. Подставив это выражение в систему $U_t + AU_x = 0$ и умножив обе части матричного уравнения слева на P^{-1}, получаем $V_t + \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{smallmatrix}\right) V_x = 0$, т. е. «расцепляем» уравнения системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + 4\frac{\partial v_2}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{90}$$

Решаем эти уравнения, используя алгоритм 18: $v_1(x,t) = \varphi(x-t)$ и $v_2(x,t) = \psi(x-4t)$, где φ и ψ − произвольные дифференцируемые функции[1].

4. Выразим искомые функции через φ и ψ: $U = PV$ и, следовательно,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x-t) \\ \psi(x-4t) \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \varphi(x-t) - 2\psi(x-4t), \\ u_2(x,t) &= \varphi(x-t) + \psi(x-4t). \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся начальными условиями. Положим $t = 0$, тогда $u_1(x,0) = x$ и $u_2(x,0) = 1 - x$. Отсюда

$$x = \varphi(x) - 2\psi(x), \tag{91}$$

$$1 - x = \varphi(x) + \psi(x) \tag{92}$$

и $\varphi(x) = (2-x)/3$; $\psi(x) = (1-2x)/3$.

Подставим полученные значения функций φ и ψ в (91), заменив x на указанные в этих формулах аргументы:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= x - 5t, \\ u_2(x,t) &= 1 - x + 3t. \end{aligned}$$

5. Сделаем проверку, подставив полученные выражения в исходную систему (89), и, положив $t = 0$, убедимся в том, что они удовлетворяют начальным условиям. Задача решена.

Решая следующие системы, обращайте внимание на порядок следования производных в уравнениях.

Задания для самостоятельного решения

7.3.1. $\begin{cases} (u_1)_t + 3(u_1)_x - 22(u_2)_x = 0; \\ 5(u_1)_x + (u_2)_t - 18(u_2)_x = 0; \end{cases} \left| \begin{array}{l} u_1(x,0) = x, \\ u_2(x,0) = 2x. \end{array} \right.$

7.3.2. $\begin{cases} (u_1)_t - 3(u_1)_x - 55(u_2)_x = 0; \\ (u_1)_x + (u_2)_t + 13(u_2)_x = 0; \end{cases} \left| \begin{array}{l} u_1(x,0) = x^2, \\ u_2(x,0) = 2x. \end{array} \right.$

7.3.3. $\begin{cases} (u_1)_t - 5(u_1)_x - 7(u_2)_x = 0; \\ 3(u_1)_x + (u_2)_t + 5(u_2)_x = 0; \end{cases} \left| \begin{array}{l} u_1(x,0) = 1 - 2x, \\ u_2(x,0) = x - 2. \end{array} \right.$

7.3.4. $\begin{cases} (u_1)_t - 5(u_1)_x + 27(u_2)_x = 0; \\ (u_1)_x + (u_2)_t + (u_2)_x = 0; \end{cases} \left| \begin{array}{l} u_1(x,0) = x, \\ u_2(x,0) = 5 - x. \end{array} \right.$

7.3.5. $\begin{cases} (u_1)_t + 2(u_1)_x + 16(u_2)_x = 0; \\ -5(u_1)_x + (u_2)_t - 16(u_2)_x = 0; \end{cases} \left| \begin{array}{l} u_1(x,0) = 2x, \\ u_2(x,0) = 3x. \end{array} \right.$

7.3.6. $\begin{cases} (u_1)_t - 5(u_1)_x - 90(u_2)_x = 0; \\ 2(u_1)_x + (u_2)_t + 22(u_2)_x = 0; \end{cases} \left| \begin{array}{l} u_1(x,0) = -x, \\ u_2(x,0) = -4x + 1. \end{array} \right.$

---

[1] Важно понять, что это функции *одной* переменной. Сама эта переменная, естественно, зависит от x и t, но эти «настоящие» переменные входят в φ и ψ строго определенным образом - как линейная комбинация вида $x - \lambda t$.

3. Алгоритмы решений

Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним

Алгоритм 1. Уравнения с разделяющимися переменными

$$X_1(x)Y_1(y)\,dx + X_2(x)Y_2(y)\,dy = 0 \tag{93}$$

Пусть $Y_1(y)X_2(x) \neq 0$. Разделим почленно (93) на $Y_1(y)X_2(x)$ и проинтегрируем:

$$\int \frac{X_1(x)}{X_2(x)}\,dx + \int \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}\,dy = C. \tag{94}$$

.

Заданы ли начальные условия?

Да:

Пусть $y\,(x_0) = y_0$.

Подставим x_0, y_0 в (94) и найдем значение C.

Нет:

Ответ будет содержать произвольную константу.

Проверка на особые решения

Имеют ли решения уравнения $X_2(x) = 0$ или $Y_1(y) = 0$?

Да:

Являются ли корни уравнений решениями (93)?

Да:

Получаются ли они из (94) при каких-то частных значениях константы C?

Да: Особых решений нет.

Нет: Эти корни являются особыми решениями уравнения (93).

Нет: Особых решений нет.

Нет: Особых решений нет.

Выписываем общее решение уравнения (94) и особые решения (если они есть).

Алгоритм 2. Уравнение, содержащее линейную комбинацию x и y

$$y' = f\left(ax + by\right) \tag{95}$$

Заменой

$$z = ax + by$$

эта задача сводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bf\left(z\right)$$

(см. алгоритм 1; возможно особое решение, соответствующее корням уравнения $a + bf\left(z\right) = 0$).

Алгоритм 3. Однородное уравнение

$$P\left(x, y\right)\, dx + Q\left(x, y\right)\, dy = 0, \tag{96}$$

причем функции P и Q таковы, что

$$P\left(ax, ay\right) = a^k P\left(x, y\right),$$
$$Q\left(ax, ay\right) = a^k Q\left(x, y\right).$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P\left(x, y\right)}{Q\left(x, y\right)} = -\frac{x^k P\left(1, y/x\right)}{x^k Q\left(1, y/x\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Замена $y = zx$ приводит (96) к виду

$$x\frac{dz}{dx} = f\left(z\right) - z,$$

т. е. к уравнению с разделяющимися переменными (алгоритм 1).

Разумеется, уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{97}$$

также является однородным и решается посредством той же замены $y = zx$.

Алгоритм 4. Уравнение с дробно-линейной функцией

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad (98)$$

$$c_1 = c_2 = 0$$

Да | Нет

Да:

Делением числителя и знаменателя на x уравнение

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) \qquad (99)$$

приводится к однородному уравнению вида (97) (см. алгоритм 3).

Нет:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (100)$$

Да | Нет

Да: Сделав замену переменных $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$ и подобрав α и β так, чтобы свести (98) к виду (97), приходим к уравнению (101) (см. следующий блок).

Нет: Если определитель равен нулю, то его строки пропорциональны: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$. Уравнение (98) сводится к

$$\begin{aligned} y' &= f\left[\frac{k\,(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right] = \\ &= F\,(a_2x + b_2y) \end{aligned}$$

(см. алгоритм 2).

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right) \qquad (101)$$

Положим

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

В силу условия (100) эта система имеет единственное решение и, таким образом, (101) сводится к (99) и далее к однородному уравнению.

Уравнение в полных дифференциалах

Алгоритм 5. Методы решения

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

Выполняется ли условие Эйлера

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{102}$$

Да | Нет

Выберите метод решения

Поищите интегрирующий множитель

См. алгоритм 6 ⋙

Каким методом решать?

Интегрирование
(если начальные значения не заданы)

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) \tag{103}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

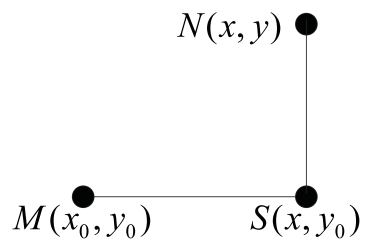
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)dx\right] + \varphi'(y) = Q(x,y),$$

Решая это уравнение, находим $\varphi(y)$.

Подставьте $\varphi(y)$ в (103) и запишите ответ в виде

$$u(x,y) = C.$$

Криволинейные интегралы
(если задано начальное значение $y(x_0) = y_0$)



$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \tag{104}$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx\,|_{y=y_0} + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy.$$

Сделайте проверку

Алгоритм 6. Нахождение интегрирующего множителя

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{105}$$

Условие Эйлера (102) **не выполняется.**

Домножим (105) на множитель $\mu\,(x,y)$ и подберем его таким, чтобы для «нового» уравнения выполнялись условия Эйлера:

$$\frac{\partial\,(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial\,(\mu Q)}{\partial x} \quad \text{или} \quad P\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Выберем интегрирующий множитель так,
чтобы он зависел только от одной переменной

$\mu = \mu\,(x)$	$\mu = \mu\,(y)$
$Q\dfrac{d\mu}{dx} = \mu\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$ $\dfrac{d\mu}{\mu} = \dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx. \qquad (106)$	$P\dfrac{d\mu}{dy} = \mu\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$ $\dfrac{d\mu}{\mu} = \dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}\,dy. \qquad (107)$
Множитель вида $\mu = \mu\,(x)$ можно подобрать, если $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q$ не зависит от y.	Множитель вида $\mu = \mu\,(x)$ можно подобрать, если $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)/P$ не зависит от x.

Если одно из условий, сформулированных строкой выше, выполняется, находим μ, проинтегрировав (106) или (107) соответственно. Уравнение

$$\mu P(x,y)\,dx + \mu Q(x,y)\,dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах и решается по алгоритму 5.

Имеет ли решения уравнение $\mu\,(x,y) = 0$?

Да	Нет
Удовлетворяют ли эти решения уравнению (105)?	Побочных решений нет.
Если не удовлетворяют, то их следует исключить из решения полученного уравнения в полных дифференциалах.	

Другие уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах

Алгоритм 7. Линейное уравнение первого порядка

$$y' + p\,(x)\,y = f\,(x) \tag{108}$$

Общее решение ищется в виде

$$y = \tilde{y} + y_1, \tag{109}$$

где $\tilde{y}$ — общее решение соответствующего (108) однородного уравнения

$$\tilde{y}' + p\,(x)\,\tilde{y} = 0, \tag{110}$$

а y_1 — любое частное решение неоднородного уравнения (108).

Решение однородного уравнения

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = -p\,(x)\,\tilde{y}$$

Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} = -\int p\,(x)\,dx + \ln|C|\,,$$

откуда

$$\tilde{y} = C\exp\left[-\int p\,(x)\,dx\right]. \tag{111}$$

Нахождение частного решения. Ищем частное решение (108) в форме (111), но заменив константу C на некоторую функцию $\varphi\,(x)$:

$$y_1 = \varphi\,(x)\exp\left[-\int p\,(x)\,dx\right]. \tag{112}$$

Подставляя (112) в (108) и приводя подобные, получаем

$$\varphi\,(x) = \int f\,(x)\exp\left[\int p\,(x)\,dx\right]dx. \tag{113}$$

Получение общего решения. Подставляем (111) и (112) с учетом (113) в (109):

$$y = \Big[C + \varphi(x)\Big]\exp\left[-\int p\,(x)\,dx\right]. \tag{114}$$

Алгоритм 8. Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^a, \qquad a \neq 1$$

Делаем замену $z = y^{1-a}$, откуда

$$y = z^{1/(1-a)}, \tag{115}$$
$$y' = \frac{z^{a/(1-a)}}{1-a} z'.$$

Подставляем в уравнение:

$$\frac{1}{1-a} z^{a/(1-a)}\, z' + p(x)\, z^{1/(1-a)} = q(x)\, z^{a/(1-a)}$$

или

$$\frac{1}{1-a} z' + p(x)\, z = q(x)\,.$$

Решаем полученное линейное уравнение с помощью алгоритма 7 и, подставляя его в (115), находим общее решение уравнения Бернулли.

Проверка на наличие особых решений

$a > 0$	$a < 0$
Уравнение имеет особое решение $y = 0$.	Особых решений нет.

Алгоритм 9. Уравнение Риккати

$$y' = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x) \tag{116}$$

Пусть известно любое частное решение уравнения y_1. Тогда общее решение (116) ищется в виде

$y = z + y_1$	$y = \frac{1}{z} + y_1$
Приходим к уравнению Бернулли для z $$z' = Pz^2 + (2Py_1 + Q)\,z$$ (алгоритм 8).	Приходим к линейному уравнению первого порядка для z $$z' + (2Py_1 + Q)\,z = -P \tag{117}$$ (алгоритм 7).

Решив уравнения, записываем общее и частное решения (116):

$$\left\{ \begin{array}{l} y = z + y_1 \quad \left(\text{или } y = \frac{1}{z} + y_1\right) \\ y = y_1 \end{array} \right.$$

Если известно более одного частного решения уравнения, то

известны два решения	известны три решения
$$z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1} \tag{118}$$ является частным решением уравнения (117).	Решение (116) сразу записывается в виде $$y = \frac{1}{y_2 - y_1} + C\left(\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1}\right).$$

Поиск частных решений и приведение к другим типам уравнений

$y' = Ay^2 + B\frac{y}{x} + \frac{C}{x^2}$	$y' = A\frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{y}{x} + C$	$y' = Ay^2 + \frac{B}{x^2}$
$y_1 = \dfrac{a}{x}$	Замена $y = z\sqrt{x}$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными (алгоритм 1).	Замена $y = 1/z$ приводит к однородному уравнению (алгоритм 3).

Алгоритм 10. Уравнение Лагранжа

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{119}$$

Положим $y' = p$, затем продифференцируем обе части уравнения по x:

$$p - \varphi(p) = \frac{dp}{dx}\left[x\frac{d\varphi(p)}{dp} + \frac{d\psi(p)}{dp}\right]$$

$$p - \varphi(p) = 0 \tag{120}$$

<table>
<tr><th>Да</th><th>Нет</th></tr>
<tr>
<td>Пусть $p = \alpha_i$ — решения уравнения (120). Тогда $y' = \alpha_i$ и особые решения (119) имеют вид
$$y_i = x\varphi(\alpha_i) + \psi(\alpha_i).$$</td>
<td>Получаем линейное по x уравнение
$$\Big[p - \varphi(p)\Big]\frac{dx}{dp} = x\frac{d\varphi(p)}{dp} + \frac{d\psi(p)}{dp}, \tag{121}$$
которое решаем по алгоритму 7 (стр. 46) и находим общее решение уравнения (119) в параметрической форме:
$$\begin{cases} x = x(p, C) \text{ (решение линейного уравнения);} \\ y = x(p, C)\varphi(p) + \psi(p). \end{cases}$$</td>
</tr>
</table>

Алгоритм 11. Уравнение Клеро

$$y = xy' + \psi(y')$$

Положим $y' = p$, затем продифференцируем обе части уравнения по x:

$$\frac{dp}{dx}\left[x + \frac{d\psi(p)}{dp}\right] = 0.$$

Получаем решения

$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = C$	$x + \dfrac{d\psi(p)}{dp} = 0$
$y = Cx + \psi(C) \qquad (122)$ Общее решение уравнения Клеро; геометрически ему соответствует семейство прямых.	$\begin{cases} x = -\frac{d\psi(p)}{dp} \\ y = xp + \psi(p) \end{cases} \qquad (123)$ Особое решение. Его интегральная кривая является огибающей семейства прямых (122), т. е. касается каждой из них.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Алгоритм 12. Однородные уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{124}$$

Ищем решение в виде $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ и получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{125}$$

Решаем это уравнение.

Решение, соответствующее корню λ уравнения (125), если этот корень

вещественный	пара чисто мнимых комплексно сопряженных $\lambda = \pm iq$	пара комплексно сопряженных $\lambda = p \pm iq$
$C\,\mathrm{e}^{\lambda x}$	$C_1 \cos qx + C_2 \sin qx$	$\mathrm{e}^{px}\left(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx\right)$

Является ли корень λ кратным?

Да	Нет
Соответствующее решение умножается на многочлен с произвольными коэффициентами степени, равной кратности корня минус 1.	Решение найдено.

Алгоритм 13. Неоднородные уравнения. Метод Лагранжа

Для краткости рассмотрим решение уравнения второго порядка

$$y'' + Ay' + By = f\,(x). \tag{126}$$

Ищем решение (126) в виде

$$y = \tilde{y} + y_1, \tag{127}$$

где $\tilde{y}$ — общее решение соответствующего (126) однородного уравнения

$$\tilde{y}'' + A\tilde{y}' + B\tilde{y} = 0,$$

а y_1 — любое частное решение (126).

$\tilde{y}$ отыскиваем по алгоритму 12. Решение состоит из двух слагаемых $\tilde{y} = C_1 z_1 + C_2 z_2$, вид которых, если корни характеристического уравнения (125)

вещественные	чисто мнимые $\lambda_{1,2} = \pm iq$	комплексно сопряженные $\lambda_{1,2} = p \pm iq$
$\tilde{y} = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2}$	$\tilde{y} = C_1 \cos qx + C_2 \sin qx$	$\tilde{y} = \mathrm{e}^{px}\,(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$

Ищем частное решение методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа) в форме

$$y_1 = C_1\,(x)\,z_1 + C_2\,(x)\,z_2. \tag{128}$$

Находим производные y_1 до n-го порядка включительно

$$y_1' = C_1\,(x)\,z_1' + C_2\,(x)\,z_2' + \underbrace{C_1'\,(x)\,z_1 + C_2'\,(x)\,z_2};$$

$$y_1'' = C_1\,(x)\,z_1'' + C_2\,(x)\,z_2'' + \underline{C_1'\,(x)\,z_1' + C_2'\,(x)\,z_2'};$$

после чего приравниваем к нулю это выражение, а эту сумму приравниваем к $f\,(x)$.

Решаем систему

$$\begin{cases} C_1'\,(x)\,z_1 + C_2'\,(x)\,z_2 = 0; \\ C_1'\,(x)\,z_1' + C_2'\,(x)\,z_2' = f\,(x) \end{cases}$$

относительно $C_1'\,(x)$ и $C_2'\,(x)$, затем находим интегрированием $C_1\,(x)$ и $C_2\,(x)$ (константы интегрирования можно положить равными нулю, ибо нам подходит *любое* частное решение), подставляем в (128) и, таким образом, получаем искомое частное решение.

Алгоритм 14. Случай квазиполинома Эйлера

Правая часть уравнения (126) имеет специальный вид:

$$y'' + Ay' + By = \mathrm{e}^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right], \tag{129}$$

где α и β — некоторые константы, а P_m и Q_n — многочлены степени m и n соответственно. Комплексное число $\gamma = \alpha + i\beta$ называется контрольным числом квазиполинома.

Частное решение (129) **ищем в виде**

$$y_1 = x^r\,\mathrm{e}^{\alpha x}\left[R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x\right], \tag{130}$$

где r — кратность корня γ в характеристическом уравнении (125), R и S — многочлены с неопределенными коэффициентами степени $k = \max(m, n)$.

Подставляя (130) в (129) и приравнивая множители при $x^i\,\mathrm{e}^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\cos x\\ \sin x\end{Bmatrix}$, $i = \overline{0, r+k}$, получаем систему уравнений, из которой находим искомые коэффициенты многочленов R и S.

Если правая часть имеет вид $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$, где каждое слагаемое есть квазиполином Эйлера, то частное решение (129) ищется в виде $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, причем каждое y_i соответствует квазиполиному T_i.

Системы уравнений с постоянными коэффициентами[1]

Алгоритм 15. Сведение системы к уравнению более высокого порядка

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = a_{11}\,x + a_{12}\,y + f_1\,(t), \\ y' = a_{21}\,x + a_{22}\,y + f_2\,(t). \end{array} \right. \tag{131}$$

Продифференцируем почленно первое уравнение

$$x'' = a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + f_1'\,(t).$$

Подставим y' из второго уравнения:

$$x'' = a_{11}\,x' + a_{12}\,\left[a_{21}\,x + a_{22}\,y + f_2\,(t)\right] + f_1'\,(t). \tag{132}$$

Выразим y из первого уравнения системы

$$y = \frac{x' - a_{11}\,x - f_1\,(t)}{a_{12}}, \tag{133}$$

подставим в (132) и приведем подобные

$$x'' + (a_{22} - a_{11})\;x' + (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\;x = a_{12} f_2\,(t) - a_{22} f_1\,(t) + f_1'\,(t) \tag{134}$$

Решаем уравнение по алгоритму 13, а затем находим y по формуле (133).

Заданы ли начальные условия?

Да:

Пусть $\left\{ \begin{array}{l} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{array} \right.$

Подставляя в (131) $t = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$, получаем систему двух линейных уравнений, из которых находим значения констант C_1 и C_2.

Нет:

Задача решена.

Аналогичным образом система решается не «через x», а «через y».

[1] Все алгоритмы приводятся для систем из двух уравнений первого порядка.

Алгоритм 16. Подбор интегрируемых комбинаций

$$\begin{cases} x' = a_{11}\,x + a_{12}\,y + f_1\,(t), \\ y' = a_{21}\,x + a_{22}\,y + f_2\,(t). \end{cases} \tag{135}$$

Умножим второе уравнение системы (135) на k и почленно сложим уравнения:

$$(x + ky)' = (a_{11} + ka_{21})\,x + (a_{12} + ka_{22})\,y + f_1\,(t) + kf_2\,(t)$$

или

$$(x + ky)' = (a_{11} + ka_{21})\left[x + \frac{a_{12} + ka_{22}}{a_{11} + ka_{21}}y\right] + f_1\,(t) + kf_2\,(t). \tag{136}$$

Выберем k так, чтобы выражение в квадратных скобках в (136) равнялось $x + ky$, и решим полученное квадратное уравнение

$$a_{21}k^2 + (a_{11} - a_{22})\,k - a_{12} = 0. \tag{137}$$

Пусть уравнение (137)

имеет два различных вещественных корня $k_1 \neq k_2$:	имеет кратные корни $k_1 = k_2$:	не имеет вещественных корней:
можно подобрать две интегрируемые комбинации.	можно подобрать одну интегрируемую комбинацию.	интегрируемую комбинацию подобрать невозможно, нужно решать задачу посредством алгоритма 15.

Решая (алгоритм 7) линейное уравнение первого порядка

$$(x + ky)' = (a_{11} + ka_{21})\,(x + ky) + f_1\,(t) + kf_2\,(t)$$

относительно $x + ky$, получаем для каждого из указанных выше случаев

при $k_1 \neq k_2$ систему двух алгебраических линейных уравнений $\begin{cases} x + k_1y = F_1\,(t), \\ x + k_2y = F_2\,(t). \end{cases}$	при $k_1 = k_2$ одно уравнение $x + k_1y = F_1\,(t)$.
Решая систему, находим x и y.	Выражая x через y (или наоборот), сводим систему (135) к одному линейному дифференциальному уравнению первого порядка.

Таким образом, *каждая найденная интегрируемая комбинация уменьшает число* ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ *уравнений на единицу за счет сведения их к уравнениям* АЛГЕБРАИЧЕСКИМ.

Устойчивость решений дифференциальных уравнений по Ляпунову

Алгоритм 17. Виды точек покоя

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0; \qquad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0. \tag{138}$$

Построим (алгоритм 12) характеристический полином этого уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c$ и найдем его дискриминант $D = b^2 - 4ac$.

Определим тип точки покоя;
значения констант C_1 и C_2 следуют из начальных условий в (138).

$D > 0$; $x = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$			$D < 0$, $\lambda_{1,2} = p \pm iq$; $x = \mathrm{e}^{pt}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt)$.			$D = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$; $x = (C_1 t + C_2)\mathrm{e}^{\lambda t}$.		
Знаки корней:			Знак p:			Знаки корней:		
$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$	$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$	$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p = 0$	$\lambda > 0$	$\lambda < 0$	$\lambda = 0$
$\mathcal{H}$ узел[1]	$\mathcal{Y}$ узел[1]	Седло	$\mathcal{H}$ фокус	$\mathcal{Y}$ фокус	Центр	$\mathcal{H}$ узел	$\mathcal{Y}$ узел	См. ниже[2]

[1] Здесь и далее $\mathcal{H}$ = Неустойчивый, $\mathcal{Y}$ = Устойчивый.
[2] В зависимости от начальных условий либо все решения устойчивы (при $C_1 = 0$), либо все неустойчивы.

Уравнения в частных производных первого порядка

Алгоритм 18. Линейное однородное уравнение

Задано уравнение

$$P(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{139}$$

Составим систему в симметрической форме

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)} \tag{140}$$

и найдем два ее независимых интеграла $\varphi(x,y,z)=C_1$ и $\psi(x,y,z)=C_2$.

Решением (139) является $\Phi[\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z)]$, где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Замечание. Для решения системы (140) удобно пользоваться *рядом равных отношений*:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n}.$$

Алгоритм 19. Задача Коши

Задача состоит из уравнения и начального условия:

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+R(x,y)\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u(x_0,y,z)=f(y,z). \tag{141}$$

Решив уравнение по алгоритму 18, найдем два независимых интеграла: $\varphi(x,y,z)$ и $\psi(x,y,z)$.

$$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=C_1,\\ \psi(x,y,z)=C_2.\end{cases} \tag{142}$$

Подставив вместо x значение x_0, разрешим систему (142), выразив y и z через C_1 и C_2:

$$\begin{cases}y=v(C_1,C_2),\\ z=w(C_1,C_2).\end{cases} \tag{143}$$

Теперь

$$u(x,y,z)=f[v(\varphi,\psi)+w(\varphi,\psi)]. \tag{144}$$

Алгоритм 20. Однородные системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} U_t + AU_x = 0, \\ u_1(x,0) = f(x), \\ u_2(x,0) = g(x). \end{cases} \qquad (145)$$

Здесь $U = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$, $0 < t < +\infty$, а x принимает значения на интервале непрерывности функций f и g.

Найдем собственные значения λ матрицы системы A из уравнения $|A - \lambda E| = 0$ или

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0.$$

Найдем собственные векторы матрицы A из уравнений $AY_1 = \lambda_1 Y_1$ и $AY_2 = \lambda_2 Y_2$. Построим матрицу P из собственных векторов матрицы A как из столбцов: $P = \left(\begin{array}{c|c} Y_1 & Y_2 \end{array}\right)$. Эта матрица диагонализирует матрицу A:

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \qquad (146)$$

Введем новые неизвестные функции $V = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ так, чтобы

$$U = PV, \qquad (147)$$

и подставим (147) в (145): $PV_t + APV_x = 0$. Умножив почленно это уравнение слева на P^{-1}, получаем с учетом (146) $V_t + \Lambda V_x = 0$ или

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0. \qquad (148)$$

С учетом (147) находим

$$u_1(x,t) = y_1^{(1)}\varphi(x - \lambda_1 t) + y_1^{(2)}\psi(x - \lambda_2 t),$$
$$u_2(x,t) = y_2^{(1)}\varphi(x - \lambda_1 t) + y_2^{(2)}\psi(x - \lambda_2 t).$$

.

Положив $t = 0$, с учетом начальных условий выражаем функции φ и ψ через f и g:

$$f(x) = y_1^{(1)}\varphi(x) + y_1^{(2)}\psi(x),$$
$$g(x) = y_2^{(1)}\varphi(x) + y_2^{(2)}\psi(x).$$

4. Контрольные работы

Контрольная работа № 1. Уравнения, интегрируемые в квадратурах

Решить уравнение, указав его тип. Варианты выбора:

1. Уравнение с разделяющимися переменными.
2. Однородное уравнение.
3. Уравнение, не содержащее искомой функции или независимой переменной.
4. Уравнение в полных дифференциалах.
5. Уравнение с интегрирующим множителем.
6. Линейное уравнение первого порядка.
7. Уравнение Бернулли.
8. Уравнение Риккати.
9. Уравнение Лагранжа.
10. Уравнение Клеро.

Вариант № 1

1. $y = xy' - (2+y')$.
2. $y = x\left(y' - x^2\cos x\right)$.
3. $y' = x\,\mathrm{e}^{2x}$.
4. $xy' + y = y^2\ln x$.
5. $y' = \frac{1}{x^2+4x-5}$.
6. $\sqrt{x}\ln x\,dx + y\,dy = 0$.
7. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.

Вариант № 2

1. $(xy' - 1)\ln x = 2y$.
2. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.
3. $\left(x^2+1\right)dy + 4xy^2dx = 0$.
4. $y' = \mathrm{e}^{-x}\sin x$.
5. $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$.
6. $y' = y\ln^2 y$.
7. $\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\,dx + \mathrm{e}^{\cos y}\sin y\,dy = 0$.

Вариант № 3

1. $y' = x\cos x$.
2. $y = 2xy' - 4{y'}^3$.
3. $dy = \mathrm{e}^{x-y}\,dx$.
4. $\sin^2 y\,dy - \frac{1}{1+9x^2}dx = 0$.
5. $\left(1+x^2\right)y' + xy = 1$.
6. $x^2y' + (xy-2)^2 = 0$.
7. $y' = 1 + \frac{1}{y}$.

Вариант № 4

1. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.
2. $y' = x\sin x$.
3. $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$.
4. $\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}dx + \cos^2 y\,dy = 0$.
5. $\mathrm{e}^{x+y}\,dx + y^2dy = 0$.
6. $y' = 1 + \frac{5}{y}$.
7. $y' = y^2 + yx - 2x^2 + 1$.

Вариант № 5

1. $\frac{1}{x^2}y' - 3y - \mathrm{e}^{x^3} = 0$.
2. $y' = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.
3. ${y'}^3 = 3\,(xy' - y)$.
4. $y' = \frac{\mathrm{e}^{-y^2}}{y}$.
5. $\ln x\,dx + \mathrm{e}^{-y}\,dy = 0$.
6. $y\,dy - \frac{2y^2}{x^2}dx = \frac{3}{x^2}dx$.
7. $y' = y^2 - \frac{12}{x^2}$.

Вариант № 6

1. $y' = y\ln y$.
2. $2x\sqrt{1-y^2}dx + y\,dy = 0$.
3. $xy' + 2y = \mathrm{e}^{-x^2}$.
4. $y = x + {y'}^2 - y'$.
5. $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$.
6. $2\,\mathrm{e}^x\,y' = \mathrm{e}^x\,y^2 + x^3$.
7. $y' = \arccos x$.

Вариант № 7

1. $y'\ln x = \frac{y}{x} - y^2$.
2. $(x+1)\,y' + y = x^3 + x^2$.
3. $y' = \sqrt{1-x^2}$.
4. $2\sqrt{x}yy' + y^2 = 2$.
5. $y' = \frac{1}{\cos^2 y}$.
6. $y' + 2y\,\mathrm{e}^x = y^2 + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x$.
7. $\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}dy = dx$.

Вариант № 8

1. $y' = x\sqrt{1+x^2}$.
2. $y' - xy = -y^3\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
3. $y' = \frac{y^3}{\ln y}$.
4. $y\,\mathrm{e}^{-y^2}\,dy = \cos 5x\,dx$.
5. $xy' - y = \ln y'$.
6. $\left(y + x^2y\right)y' = 1 + y^2$.
7. $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$.

Вариант № 9

1. $\cos x\,dy = (y\sin x + \sin 2x)\,dx$.
2. $\left(1-x^2\right) y' - xy = xy^2$.
3. $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$.
4. $y^4\,(2y' + y) = x$.
5. $\cos^3 x\,dx + \frac{1}{\cos y}dy = 0$.
6. $y' = \frac{y}{\sqrt{\ln y}}$.
7. $y = \frac{x}{x'} + \frac{1}{y'^2}$.

Вариант № 10

1. $(x+xy)\,dx + (y+xy)\,dy = 0$.
2. $x^2y' + (1-4x)\,y = x^4$.
3. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.
4. $y' = 2y - 1$.
5. $x\cos x\,dx = \sin^3 y\,dy$.
6. $y' + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$.
7. $2yy' = x\left(y'^2 + 4\right)$.

Вариант № 11

1. $2xy' - y = -y^3\sin x$.
2. $y' = x\sqrt{x^2+1}$.
3. $y' + y\cos x = \sin 2x$.
4. $x^2y' + (xy-2)^2 = 0$.
5. $\mathrm{e}^{x+y}\,dx + \mathrm{e}^{-x-y}\,dy = 0$.
6. $y = x\,(1+y') + y'^2$.
7. $y' = \frac{x^2+1}{x^2-4x+3}$.

Вариант № 12

1. $y' = 1 - 10y$.
2. $x^5\ln x\,dx = \mathrm{e}^y\sqrt{1+\mathrm{e}^y}dy$.
3. $y' = \frac{2xy}{1+x^2}$.
4. $y' + 2y\,\mathrm{e}^x - y^2 = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x$.
5. $x^2y' - y = x^2\,\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}$.
6. $y' = \cos(2-5x)$.
7. $x^3y' = 3yx^2 - y^3$.

Вариант № 13

1. $\left(y^2+xy^2\right)dy + \left(x^2-yx^2\right)dx = 0$.
2. $y' = 2x\left(x^2+y\right)$.
3. $\mathrm{e}^{-3x+1}\,dx + 3^{3y}dy = 0$.
4. $y' = \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2$.
5. $4y' + y = xy^4$.
6. $y' = y^2 - \frac{12}{x^2}$.
7. $y = -xy' + y'^2$.

Вариант № 14

1. $y' = 1 - \cos y$.
2. $2\,\mathrm{e}^{2x}\,y' = \mathrm{e}^x\,y^2 + x^3$.
3. $3y^2y' + y^3 = x + 1$.
4. $y' = x\ln(x-1)$.
5. $x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx - \cos(2-5y)\,dy = 0$.
6. $y'\sin x\cos x = y + \sin^3 x$.
7. $3\,\mathrm{e}^x\sin y dx + (1-\mathrm{e}^x)\cos y dy = 0$.

Вариант № 15

1. $y' = 2y^2+9.$
2. $y' \sin x = y\cos x - y^3.$
3. $y' = \arcsin x.$
4. $\frac{\sin^4 y}{\cos^2 y}dy = \sqrt{2x+1}dx.$
5. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$
6. $(y+1)\,y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + xy.$
7. $y' + 2y\,\mathrm{e}^x = y^2 + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x\,.$

Вариант № 16

1. $x^2y' = x^2y^2+xy+1.$
2. $y\,\mathrm{e}^{x+3y^2}\,dy = x^2dx.$
3. $x\,(y'-y) = \mathrm{e}^x\,.$
4. $y\sin y\cos y\,dy + \mathrm{e}^{2x}\,dx = 0.$
5. $2y' - y\cos x = y^{-1}\cos x.$
6. $y' = \sqrt{4-y^2}.$
7. $y = xy' + \frac{1}{y'}.$

Вариант № 17

1. $\sqrt{1+x^2}dx = (5-y)^{10}\,dy.$
2. $x\,dy - 2y\,dx = x^3\ln x\,dx.$
3. $\left(x^2y+y\right)^2 y' = x^2y+y+x^2+1.$
4. $2y\,(y'+2) = xy'^2.$
5. $y' = y\,(y-1).$
6. $\mathrm{e}^{3x}\,y' = 3y\,\mathrm{e}^{3x} - y^2.$
7. $y' = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x + x}\,.$

Вариант № 18

1. $\left(1-x^2\right) y' - xy = xy^3.$
2. $y' - \frac{2}{x^2}y = \frac{3}{x^2}y^{-1}.$
3. $x^2y' = x^2y^2+xy+1.$
4. $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0.$
5. $\mathrm{e}^{-y}\,dx - (2y + x\,\mathrm{e}^{-y})\,dy = 0.$
6. $y' = \frac{y^2+4}{x^2+25}.$
7. $y' = 1 + \sin y.$

Вариант № 19

1. $y' = (\mathrm{e}^x + 1)^3\,.$
2. $2xy' - y = \ln y'.$
3. $y' = \cos^4 y.$
4. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2.$
5. $x^2y' = 1 + \cos 2y.$
6. $xy' = x^2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - y.$
7. $(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y})^2\,dy + \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx = 0.$

Вариант № 20

1. $y' = x\sin x\cos x.$
2. $y' - y = xy^2.$
3. $y' = \cos^2 5y.$
4. $x^2y' + (xy-2)^2 = 0.$
5. $x^2(1+y)dx + (x^3-1)(y-1)dy = 0.$
6. $\frac{y'}{x-\sqrt{y}} = x + \sqrt{y}.$
7. $(\sin x - \cos x)^2 = \cos^2 y\, y'.$

Вариант № 21

1. $xy'(y'+2)=y.$
2. $y'=\frac{x^3}{x+1}.$
3. $y^2\,\mathrm{e}^{-y^3}dy-\sqrt{1-5x}dx=0.$
4. $y'=y^2+9.$
5. $y'=3x^2+2xy-2x^4.$
6. $3x^2y\,dx+2\sqrt{4-x^3}dy=0.$
7. $x^2y'+xy+x^2y^2=4.$

Вариант № 22

1. $y'\cos x+y\sin x=1.$
2. $\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)y^2y'=\mathrm{e}^x.$
3. $y'=y^2-\frac{12}{x^2}.$
4. $xy'+2y+x^5y^3\,\mathrm{e}^x=0.$
5. $y'=x\cos^2 x.$
6. $\cos^4 x\,dx=\sin^4 y\,dy.$
7. $y'=(3-4y)^3.$

Вариант № 23

1. $y'=\sqrt{1-4y}.$
2. $y\cos y^2dy+(3x+2)^{11}dx=0.$
3. $y'=x\sin^2 x.$
4. $y'-\frac{1}{x}y=\frac{1}{2}y^{-1}.$
5. $y'+y^2-\frac{2}{x^2}=0.$
6. $y=xy'-y'^2.$
7. $(2y-xy')\,x=8.$

Вариант № 24

1. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\sin^2 x}.$
2. $y'+2y\,\mathrm{e}^x=y^2+\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x.$
3. $\left(1+x^2\right)y'+y\sqrt{1+x^2}=xy.$
4. $xy'+(x+1)\,y=3x^2\,\mathrm{e}^{-x}.$
5. $y'=\sin y\cos y.$
6. $\ln x\,dx-\sin^3 y\,dy=0.$
7. $y'=x^5\ln x.$

Вариант № 25

1. $y'=\frac{\sin^3 x}{\cos x}.$
2. $x+xy+y'\,(y+xy)=0.$
3. $2y'^2\,(y-xy')=1.$
4. $x^2y'=2xy-y^2.$
5. $5^{3x}dx=3^{5y}dy.$
6. $y'=\sqrt{y+1}-\sqrt{y}.$
7. $y'-\left(x-x^3\right)\mathrm{e}^{x^2}=2xy.$

Вариант № 26

1. $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y.$
2. $(5y-3)^5\,dy+x\sin x^2dx=0.$
3. $y'=1+\mathrm{e}^y.$
4. $y'+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}.$
5. $y=xy'+\sqrt{1-y'^2}.$
6. $y'=2\sqrt{y}\ln x.$
7. $3y'+y^2+\frac{2}{x^2}=0.$

Вариант № 27

1. $\left(y+x^2y\right)y' = 1+y^2$.
2. $y' = \left(e^x+1\right)^3$.
3. $xy'+y-1 = \ln x$.
4. $y' = \cos^4 y$.
5. $\left(e^y - e^{-y}\right)^2 dy + e^{\sqrt{x}}\,dx = 0$.
6. $y' - \frac{2}{x^2}y = \frac{3}{x^2}y^{-1}$.
7. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.

Вариант № 28

1. $\left(x^2-1\right)y' + 2xy^2 = 0$.
2. $y' + 2xy = 2x^3y^3$.
3. $\left(x^2y - x^2 + y - 1\right)dx - \frac{x}{\ln(y-1)}dy = 0$.
4. $x\cos x^2 dx + y^2 \sin y^3 dy = 0$.
5. $xy' + y - 1 = \ln x$.
6. $x\sqrt{x^2+1}dx = (3-4y)^3\,dy$.
7. $y' = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Вариант № 29

1. $\left(xy + x^2y^3\right)y' = 1$.
2. $2xy' - y = \sin y'$.
3. $\left(2x + y + 3x^2 \sin y\right)\ dx + \left(x + x^3 \cos y + 2y\right)\ dy = 0$.
4. $y\,dx - \left(4x^2y + x\right)dy = 0$.
5. $(2x+1)\,y' = 4x + 2y$.
6. $y' = y^2 + \frac{1}{2x^2}$.
7. $2x^3y' = y\left(2x^2 - y^2\right)$.

Вариант № 30

1. $y' = \frac{x-y+2}{2x-3y-1}$.
2. $y' = \frac{y-3x^2}{4y-x}$.
3. $x^2y' + xy + 1 = 0$.
4. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$.
5. $xy' + y = y^2 \ln x; \quad y(1) = 1$.
6. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.
7. $xy' - (2x+1)\,y + y^2 = -x^2$.

Контрольная работа № 2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Решите уравнения, выбрав оптимальный метод определения частного решения.

Вариант № 1

1. $y'''-5y''+8y'-4y=0.$
2. $y''-y=x^2-x+1.$
3. $y''+4y'+4y=\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{x^3}.$
4. $-20y-y'+y''=\mathrm{e}^{-4x}.$
5. $\begin{cases} -5y-4y'+y''=7, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1. \end{cases}$

Вариант № 2

1. $y^{(4)}+10y''+9y=0.$
2. $y''+5y'+6y=3.$
3. $y''-2y'+y=x^{-2}\cdot\mathrm{e}^x.$
4. $y'+y''=-\mathrm{e}^{-x}.$
5. $\begin{cases} -3y+2y'+y''=-9\cos 7x, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=1. \end{cases}$

Вариант № 3

1. $y'''-3y''+3y'-y=0.$
2. $y''-4y'+5y=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\cos x}.$
3. $y''+y=4\,\mathrm{e}^x.$
4. $9y-6y'+y''=10+5x.$
5. $\begin{cases} 32y+8y'+y''=7\,\mathrm{e}^{2x}, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0. \end{cases}$

Вариант № 4

1. $y^{(4)}+y=0.$
2. $y''-2y'+y=4\,\mathrm{e}^x.$
3. $y''-2y'+y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{4-x^2}}.$
4. $-20y+y'+y''=-2\,\mathrm{e}^{4x}.$
5. $\begin{cases} 25y+6y'+y''=4, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$

Вариант № 5

1. $y'''-7y''+16y'-12y=0.$
2. $y''-3y'+2y=3\,\mathrm{e}^{2x}+2x^2.$
3. $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}\ln x.$
4. $41y-10y'+y''=-7+8x.$
5. $\begin{cases} 34y+10y'+y''=8+8x, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=1. \end{cases}$

Вариант № 6

1. $y^{(5)}+8y'''+16y'=0.$
2. $y'''+6y''+12y'+8y=3\,\mathrm{e}^{-2x}.$
3. $y''-4y'+4y=\sin x\cdot\cos 2x.$
4. $41y-10y'+y''=3\cos 4x.$
5. $\begin{cases} 8y+4y'+y''=-5+10x, \\ y(0)=2, \quad y'(0)=0. \end{cases}$

Вариант № 7

1. $y'''-6y''+12y'-8y=0.$
2. $y'''-y''=-3x+1.$
3. $2y''+5y'=\cos^2 x.$
4. $34y+6y'+y''=6+8x.$
5. $\begin{cases} 13y-4y'+y''=-2+6x, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=2. \end{cases}$

Вариант № 8

1. $y^{(4)}+2y''-8y'+5y=0.$
2. $y''-4y'=-12x^2+6x-4.$
3. $y''-3y'+2y=3x+5\sin 2x.$
4. $y''+10y'+29y=-3\sin 2x\,\mathrm{e}^{-5x}.$
5. $\begin{cases} 4y-5y'+y''=-2\,\mathrm{e}^{5x}, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0. \end{cases}$

Вариант № 9

1. $y^{(5)}-6y^{(4)}+9y'''=0.$
2. $y''+y'=3.$
3. $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}.$
4. $20y-8y'+y''=\mathrm{e}^{4x}.$
5. $\begin{cases} -y'+y''=-6\,\mathrm{e}^{-6x}, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$

Вариант № 10

1. $y^{(5)}+8y'''+16y'=0.$
2. $y''-y=4\,\mathrm{e}^{x}.$
3. $y''+y=\mathrm{e}^{x}+\cos x.$
4. $34y+10y'+y''=2\sin 3x\,\mathrm{e}^{-5x}.$
5. $\begin{cases} 8y-4y'+y''=-8+10x, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=2. \end{cases}$

Вариант № 11

1. $y'''-5y''+4y=0.$
2. $y''-2y'-3y=-4\,\mathrm{e}^{x}+3.$
3. $y''-2y'+y=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^2+1}.$
4. $-8y-2y'+y''=10.$
5. $\begin{cases} 9y+6y'+y''=3\,\mathrm{e}^{-10x}, \\ y(0)=3, \quad y'(0)=0. \end{cases}$

Вариант № 12

1. $y^{(4)}-y=0.$
2. $y''+4y=\sin 2x.$
3. $y''-y'=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}.$
4. $-3y-2y'+y''=-7+3x.$
5. $\begin{cases} -10y-3y'+y''=3, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=2. \end{cases}$

Вариант № 13

1. $y^{(5)}+y^{(4)}+2y'''+2y''+y'+y=0.$
2. $y''-3y'+2y=x^2\,\mathrm{e}^{3x}.$
3. $y''-y'=\mathrm{e}^{2x}\cdot\cos x.$
4. $-2y'+y''=3.$
5. $\begin{cases} -12y-y'+y''=4\cos 9x-\sin 9x, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0. \end{cases}$

Вариант № 14

1. $y'''-5y''+8y'-4y=0.$
2. $y''+5y'+6y=3.$
3. $y''-4y'+5y=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\cos x}.$
4. $-4y-3y'+y''=2\,\mathrm{e}^{4x}.$
5. $\begin{cases} -8y+2y'+y''=3\cos 2x, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0. \end{cases}$

Вариант № 15

1. $y^{(4)}+10y''+9y=0.$
2. $y''-y=x^2-x+1.$
3. $y''-2y'+y=x^{-2}\,\mathrm{e}^x\,.$
4. $2y-2y'+y''=5+x.$
5. $\begin{cases} -12y-y'+y''=7, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=3. \end{cases}$

Вариант № 16

1. $y'''-3y''+3y'-y=0.$
2. $y''+y=4\,\mathrm{e}^x\,.$
3. $y''+4y'+4y=\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{x^3}.$
4. $8y-6y'+y''=9\,\mathrm{e}^{4x}\,.$
5. $\begin{cases} -8y+2y'+y''=7+5x, \\ y(0)=2, \quad y'(0)=0. \end{cases}$

Вариант № 17

1. $y'''-7y''+16y'-12y=0.$
2. $y'''+6y''+12y'+8y=3\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$
3. $y''-2y'+y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{4-x^2}}.$
4. $16y+y''=10\cos 4x+8\sin 4x.$
5. $\begin{cases} 26y-10y'+y''=7x, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=1. \end{cases}$

Вариант № 18

1. $y^{(5)}+8y'''+16y'=0.$
2. $y''-2y'+y=4\,\mathrm{e}^x\,.$
3. $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}\ln x.$
4. $10y-2y'+y''=9.$
5. $\begin{cases} 29y-4y'+y''=8, \\ y(0)=3, \quad y'(0)=1. \end{cases}$

Вариант № 19

1. $y'''-6y''+12y'-8y=0.$
2. $y''-4y'=-12x^2+6x-4.$
3. $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}.$
4. $25y+8y'+y''=5x.$
5. $\begin{cases} 10y+6y'+y''=4+5x, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$

Вариант № 20

1. $y^{(5)}-7y'''+6y''=0.$
2. $y''+y'=3.$
3. $y''-3y'+2y=3x+5\sin 2x.$
4. $9y+y''=-10+10x.$
5. $\begin{cases} 10y+6y'+y''=-4\,\mathrm{e}^{-9x}, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0. \end{cases}$

Вариант № 21

1. $y^{(5)}-6y^{(4)}+9y^{(3)}=0.$
2. $y'''-y''=-3x+1.$
3. $2y''+5y'=\cos^2 x.$
4. $16y+y''=-\cos 4x+\sin 4x.$
5. $\begin{cases} -9y+y''=7x, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=1. \end{cases}$

Вариант № 22

1. $y^{(5)}+8y'''+16y'=0.$
2. $y''-2y'-3y=-4\,\mathrm{e}^x+3.$
3. $y''-y'=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$
4. $29y+4y'+y''=-3\cos 5x\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$
5. $\begin{cases} -8y+2y'+y''=-10+3x, \\ y(0)=2, \quad y'(0)=0. \end{cases}$

Вариант № 23

1. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0.$
2. $y'' - y = 4\,\mathrm{e}^x\,.$
3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}.$
4. $20y - 4y' + y'' = 7x.$
5. $\begin{cases} -12y - y' + y'' = 9, \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 24

1. $y^{(4)} - y = 0.$
2. $y'' - 3y' + 2y = x^2\,\mathrm{e}^{3x}\,.$
3. $y'' + y = \mathrm{e}^x + \cos x.$
4. $25y + 10y' + y'' = -9 + 3x.$
5. $\begin{cases} 4y + 5y' + y'' = -5\cos x + 8\sin x, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

Вариант № 25

1. $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y'' + y' + y = 0.$
2. $y'' + 4y = \sin 2x.$
3. $y'' - y' = \mathrm{e}^{2x}\cos \mathrm{e}^x\,.$
4. $4y + 4y' + y'' = -4 + 5x.$
5. $\begin{cases} 25y - 6y' + y'' = 2\cos x + 4\sin x, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 26

1. $y^{(4)} - 2y''' - y'' + 2y' = 0.$
2. $y'' + 3y' - 10y = -7\cos 8x + 5\sin 8x.$
3. $41\,y - 10\,y' + y'' = \sin^2 2x.$
4. $26y - 10y' + y'' = 5\sin x.$
5. $\begin{cases} 25y + y'' = 5\,\mathrm{e}^{-2x}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 27

1. $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 3y''' - 4y'' - 4y' = 0.$
2. $17y + 2y' + y'' = 8\sin 5x.$
3. $32\,y - 8\,y' + y'' = \cos^2 2x.$
4. $-25y + y'' = 6\,\mathrm{e}^{5x}\,.$
5. $\begin{cases} 20y + 9y' + y'' = -2\,\mathrm{e}^{-3x}, \\ y(0) = 1/2, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

Вариант № 28

1. $y^{(5)} + 3y^{(4)} - y^{(3)} - 11y'' - 12y' - 4y = 0.$
2. $5y - 4y' + y'' = -7 + 8x.$
3. $-15\,y + 2\,y' + y'' = x + \mathrm{e}^{3x}\,.$
4. $-25y + y'' = 7x^2.$
5. $\begin{cases} 20y + 4y' + y'' = 2\cos 2x, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

Вариант № 29

1. $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0.$
2. $41y + 8y' + y'' = -9 + 3x.$
3. $29\,y + 4\,y' + y'' = \sin 5x + 1.$
4. $y'' - 4y' - 5y = 4\,\mathrm{e}^{-x}\,.$
5. $\begin{cases} -3y' + y'' = 4\,\mathrm{e}^{2x}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 30

1. $y^{(4)} + 5y''' + 5y'' - 5y' - 6y = 0.$
2. $26y + 10y' + y'' = 8\,\mathrm{e}^{-3x}\,.$
3. $10\,y - 7\,y' + y'' = \sin^2 2x.$
4. $8y + 4y' + y'' = -7 + 2x.$
5. $\begin{cases} 17y + 8y' + y'' = -9\,\mathrm{e}^{3x}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$

Контрольная работа № 3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Решите системы уравнений.

- Для задачи 1 характеристическое уравнение составьте матричным методом.
- Для задачи 2 постарайтесь подобрать интегрируемую комбинацию или покажите, что такой подбор невозможен (в последнем случае найдите решение иным способом).
- Задачу 3 решайте сведением к уравнению второго порядка.

Вариант № 1

1. $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x(0) = 1, \\ y(0) = 2. \end{array} \right.$

2. $\begin{cases} x' = 4x + y - \mathrm{e}^{2t}, \\ y' = y - 2x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -3x + 6y - \sin 2t, \\ y' = -4x + 7y. \end{cases}$

Вариант № 2

1. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - 4x. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x(0) = 2, \\ y(0) = 3. \end{array} \right.$

2. $\begin{cases} x' = y - 5\cos t, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = x + 4y - 5\,\mathrm{e}^{-2t}, \\ y' = -4x - 7y. \end{cases}$

Вариант № 3

1. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x(0) = 4, \\ y(0) = 2. \end{array} \right.$

2. $\begin{cases} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + 3\,\mathrm{e}^{t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -7x + 6y + 6 + 9t, \\ y' = -15x + 12y. \end{cases}$

Вариант № 4

1. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -x + y. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x(0) = 1, \\ y(0) = 5. \end{array} \right.$

2. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = y - 2x + 18t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -2x + y - 9\sin t, \\ y' = -x - 4y. \end{cases}$

Вариант № 5

1. $\begin{cases} x' + x + 5y = 0, \\ y' - x - y = 0. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x(0) = 2, \\ y(0) = 1. \end{array} \right.$

2. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 2y - x - 5\,\mathrm{e}^t\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -7x + 5y - 9 - 9t, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$

Вариант № 6

1. $\begin{cases} x' = 5x + 3y, \\ y' = -3x - y. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x(0) = 3, \\ y(0) = 3. \end{array} \right.$

2. $\begin{cases} x' = 3x - 4y + \mathrm{e}^{-2t}, \\ y' = x - 2y - 3\,\mathrm{e}^{-2t}\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = +5y - 9\cos 2t, \\ y' = -x + 2y. \end{cases}$

Вариант № 7

1. $\begin{cases} x' - 5x - 3y = 0, \\ y' + 3x + y = 0. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x(0) = 1, \\ y(0) = 4. \end{array} \right.$

2. $\begin{cases} x' = -x - 2y + 2\,\mathrm{e}^{-t}, \\ y' - 3x - 4y = \mathrm{e}^{-t}\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -7x + y - 4 + 8t, \\ y' = -25x + y. \end{cases}$

Вариант № 8

1. $\begin{cases} x' = 2y - 3x, \\ y' = y - 2x. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x(0) = 2, \\ y(0) = 5. \end{array} \right.$

2. $\begin{cases} x' = y - \cos t, \\ y' = -x + \sin t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -8x + 9y + 9\cos 3t, \\ y' = -10x + 10y. \end{cases}$

Вариант № 9

1. $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x - y. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x(0) = 6, \\ y(0) = 1. \end{array} \right.$

2. $\begin{cases} x' = x - 2y + 3, \\ y' = x - y + 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x + 5y - 6 - \sin 3t, \\ y' = -4x - 7y. \end{cases}$

Вариант № 10

1. $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 4x - y. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x(0) = 2, \\ y(0) = 4. \end{array} \right.$

2. $\begin{cases} x' = 2x + 4y - 8, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -7x + 8y - 4\cos 2t, \\ y' = -2x + y. \end{cases}$

Вариант № 11

1. $\begin{cases} x' = 4x + 5y, \\ y' = -4x - 4y. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x(0) = 1, \\ y(0) = 3. \end{array} \right.$

2. $\begin{cases} x' = y - \cos t, \\ y' = -x + \sin t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -x + 2y - 7\cos t, \\ y' = -4x + 3y. \end{cases}$

Вариант № 12

1. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4y - x. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x(0) = 3, \\ y(0) = 2. \end{array} \right.$

2. $\begin{cases} x' = 4x + 5y - 8 - 15t, \\ y' = -x + 2y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 7x + 5y - \mathrm{e}^{2t}, \\ y' = -9x - 5y. \end{cases}$

Вариант № 13

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = x - 2y, \\ y' = x - y. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 2, \\ y(0) = 4. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = -3x + 5y - 2 - \sin(3\,t), \\ y' = -2x - y. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = -6x + 8y - 7\cos 2t, \\ y' = -2x + 2y. \end{array}\right.$

Вариант № 14

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 1, \\ y(0) = 6. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = y - 5\cos t, \\ y' = 2x + y. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = -x + y - 5 - 6t, \\ y' = -13x + 3y. \end{array}\right.$

Вариант № 15

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = x - y, \\ y' = y - 4x. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 3, \\ y(0) = 2. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + 3\,\mathrm{e}^{t}. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = -3x + 4y + 6\,\mathrm{e}^{-2t}, \\ y' = -5x + 6y. \end{array}\right.$

Вариант № 16

1. $\left\{\begin{array}{l} x' + x + 5y = 0, \\ y' - x - y = 0. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 5, \\ y(0) = 2. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = 3x - 4y + \mathrm{e}^{-2t}, \\ y' = x - 2y - 3\,\mathrm{e}^{-2t}. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = -6x + 6y + 9\,\mathrm{e}^{-2t}, \\ y' = -3x + 3y. \end{array}\right.$

Вариант № 17

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = 3x + 2y, \\ y' = -x + y. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 1, \\ y(0) = 2. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x - y, \\ y' = y - 2x + 18t. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = -x + 8y + 6\cos 2t, \\ y' = -x + 3y. \end{array}\right.$

Вариант № 18

1. $\left\{\begin{array}{l} x' - 5x - 3y = 0, \\ y' + 3x + y = 0. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 3, \\ y(0) = 1. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = y - \cos t, \\ y' = -x + \sin t. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = 6x + 6y - 9\cos t, \\ y' = -12x - 11y. \end{array}\right.$

Вариант № 19

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = 2y - 3x, \\ y' = y - 2x. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 2, \\ y(0) = 2. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = -x - 2y + 2\,\mathrm{e}^{-t}, \\ y' = 3x + 4y + \mathrm{e}^{-t}. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x + 2y - 3\sin 2t, \\ y' = -10x - 7y. \end{array}\right.$

Вариант № 20

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = x - 2y, \\ y' = x - y. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 1, \\ y(0) = 3. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = x - 2y + 3, \\ y' = x - y + 1. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = 8x + 8y - 7\,\mathrm{e}^{2t}, \\ y' = -9x - 9y. \end{array}\right.$

Вариант № 21

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = 4x + 5y, \\ y' = -4x - 4y. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 2, \\ y(0) = 3. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x + 4y - 8, \\ y' = 3x + 6y. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = -7x + 4y - 7 - 10t, \\ y' = -9x + 6y. \end{array}\right.$

Вариант № 22

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = 3x - y, \\ y' = 4x - y. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 1, \\ y(0) = 4. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = y - \cos t, \\ y' = -x + \sin t. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = -5x + 5y - 4 - \sin 2t, \\ y' = -x - y. \end{array}\right.$

Вариант № 23

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = x - 2y, \\ y' = x - y. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 3, \\ y(0) = 2. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = -5x + 2y + \mathrm{e}^{t}, \\ y' = x + 6y + \mathrm{e}^{-2t}. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = 6x + 8y + 2\,\mathrm{e}^{-2t}, \\ y' = -7x - 9y. \end{array}\right.$

Вариант № 24

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x + y, \\ y' = 4y - x. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 2, \\ y(0) = 5. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = y + 2\,\mathrm{e}^{t}, \\ y' = x + t^2. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = -x + y - 4 - 6t, \\ y' = x - y. \end{array}\right.$

Вариант № 25

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = -8x + 3y, \\ y' = -14x + 5y. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 1, \\ y(0) = 4. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = 4x + y - \mathrm{e}^{2t}, \\ y' = y - 2x. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = -x + y + 5\,\mathrm{e}^{3t}, \\ y' = -13x + 5y. \end{array}\right.$

Вариант № 26

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = -5x + y, \\ y' = -26x + 5y. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 2, \\ y(0) = 1. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = -4x + y - 4 - 12t, \\ y' = -2x - 2y. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = -7x + 2y + 3 - 12t, \\ y' = -12x + 3y. \end{array}\right.$

Вариант № 27

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = -x + 6y, \\ y' = -3x + 5y. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 1, \\ y(0) = 3. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = 4x + 7y - 5\,\mathrm{e}^{3t}, \\ y' = -x - 4y. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = 7x + y - 9\sin 3t, \\ y' = -20x - 2y. \end{array}\right.$

Вариант № 28

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = -2x + y, \\ y' = 3x. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x(0) = 2, \\ y(0) = 4. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = -5x + 7y + 8 + 12t, \\ y' = -5x + 7y. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = x + 4y - 6\cos t, \\ y' = -4x - 7y. \end{array}\right.$

Вариант № 29

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = x + 4y, \\ y' = -x + 5y. \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} x(0) = 4, \\ y(0) = 1. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = 7x + 5y + 2\,\mathrm{e}^{3t}, \\ y' = -8x - 5y. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = 9x + 9y - 7 - \sin 3t, \\ y' = -4x - 3y. \end{array}\right.$

Вариант № 30

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = 7x + 5y, \\ y' = -4x - 2y. \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} x(0) = 1, \\ y(0) = 2. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x + 4y + 3\cos 2t, \\ y' = -2x - 4y. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x' = 8x + 5y + 7\,\mathrm{e}^{t}, \\ y' = -20x - 12y. \end{array}\right.$

Контрольная работа № 4. Устойчивость, уравнения в частных производных

1. Определить тип точки покоя в зависимости от значения параметра a. Построить фазовую диаграмму.
2. Решить уравнение.
3. Решить систему с учетом начальных условий.

Вариант № 1

1. $(-1+2a-a^2)y+y''=0.$

2. $x\frac{\partial u}{\partial z}+2\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+2\frac{\partial u_1}{\partial x}-8\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ -3\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}+7\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x+2, \\ u_2(x,0)=1-x. \end{cases}$

Вариант № 2

1. $(-a+a^2)y-2ay'+y''=0.$

2. $\frac{\partial u}{\partial z}+x\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}-3\frac{\partial u_1}{\partial x}+6\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ 5\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-4\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=2x-1, \\ u_2(x,0)=x+4. \end{cases}$

Вариант № 3

1. $a^3y-(a+a^2)y'+y''=0.$

2. $z\frac{\partial u}{\partial z}+x\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}-16\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-11\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x-3, \\ u_2(x,0)=1-2x. \end{cases}$

Вариант № 4

1. $(2+a-a^2)y-3y'+y''=0.$

2. $zx\frac{\partial u}{\partial z}+yz\frac{\partial u}{\partial y}+xy\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+4\frac{\partial u_1}{\partial x}+72\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-14\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x+5, \\ u_2(x,0)=x-4. \end{cases}$

Вариант № 5

1. $(1-a^2)y+y''=0.$
2. $2\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+5\frac{\partial u_1}{\partial x}+66\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ -2\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-18\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=3x, \\ u_2(x,0)=x+3. \end{cases}$

Вариант № 6

1. $(1-a^2)y-2y'+y''=0.$
2. $x\frac{\partial u}{\partial z}+x\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}-5\frac{\partial u_1}{\partial x}-12\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ 2\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}+6\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x-2, \\ u_2(x,0)=2-x. \end{cases}$

Вариант № 7

1. $2a^2y-2ay'+y''=0.$
2. $z\frac{\partial u}{\partial z}+x\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}-5\frac{\partial u_1}{\partial x}+2\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ 5\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}+4\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=2x+1, \\ u_2(x,0)=2x-1. \end{cases}$

Вариант № 8

1. $(a-a^2)y-y'+y''=0.$
2. $z\frac{\partial u}{\partial z}+y\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+4\frac{\partial u_1}{\partial x}-6\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ -4\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x+1, \\ u_2(x,0)=4-2x. \end{cases}$

Вариант № 9

1. $(a-2a^2)y-(1-a)y'+y''=0.$
2. $2\frac{\partial u}{\partial z}+3\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+3\frac{\partial u_1}{\partial x}+14\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ 2\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}+6\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=3x+2, \\ u_2(x,0)=x. \end{cases}$

Вариант № 10

1. $(-4+a^2)y+y''=0.$
2. $z\frac{\partial u}{\partial z}+z\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial x}+45\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-13\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=2-x, \\ u_2(x,0)=2x. \end{cases}$

Вариант № 11

1. $(2-a-a^2)y-3y'+y''=0.$
2. $\frac{\partial u}{\partial z}+z\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+2\frac{\partial u_1}{\partial x}-5\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ -4\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-6\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=2x+2, \\ u_2(x,0)=1-2x. \end{cases}$

Вариант № 12

1. $(a+a^2)y-(1+2a)y'+y''=0.$
2. $z\frac{\partial u}{\partial z}+z\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}-4\frac{\partial u_1}{\partial x}-40\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}+9\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x+3, \\ u_2(x,0)=2-3x. \end{cases}$

Вариант № 13

1. $(-a+4a^2)y-4ay'+y''=0.$
2. $y\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+5\frac{\partial u_1}{\partial x}+6\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}+4\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=2x-1, \\ u_2(x,0)=3x+2. \end{cases}$

Вариант № 14

1. $(-a+2a^2)y-(-1+3a)y'+y''=0.$
2. $2\frac{\partial u}{\partial z}+2\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}-10\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ 2\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-10\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=1-3x, \\ u_2(x,0)=3x. \end{cases}$

Вариант № 15

1. $(-1-a)y+y''=0.$
2. $z\frac{\partial u}{\partial z}+x\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+4\frac{\partial u_1}{\partial x}-3\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ -4\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}+8\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x-3, \\ u_2(x,0)=1-2x. \end{cases}$

Вариант № 16

1. $(3a-a^2)y-3y'+y''=0.$
2. $x\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}-3\frac{\partial u_1}{\partial x}-3\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ -3\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}+5\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=3x, \\ u_2(x,0)=5x. \end{cases}$

Вариант № 17

1. $(-2+a+a^2)y-(1+2a)y'+y''=0.$
2. $y\frac{\partial u}{\partial z}+z\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}-2\frac{\partial u_1}{\partial x}+2\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ 3\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x+2, \\ u_2(x,0)=1-2x. \end{cases}$

Вариант № 18

1. $(4a-2a^2)y-(2+a)y'+y''=0.$
2. $z\frac{\partial u}{\partial z}+x\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}-3\frac{\partial u_1}{\partial x}+78\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}+16\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=2x+1, \\ u_2(x,0)=2x-4. \end{cases}$

Вариант № 19

1. $(-1+a)y+y''=0.$
2. $\frac{\partial u}{\partial z}+y\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+3\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ 3\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}+7\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x+5, \\ u_2(x,0)=2x+5. \end{cases}$

Вариант № 20

1. $(4-a^2)y-4y'+y''=0.$
2. $y\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+2\frac{\partial u_1}{\partial x}-60\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-14\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x-3, \\ u_2(x,0)=1-3x. \end{cases}$

Вариант № 21

1. $(-2a+2a^2)y-(-1+3a)y'+y''=0.$
2. $y\frac{\partial u}{\partial z}+x\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+4\frac{\partial u_1}{\partial x}-11\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ -4\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-3\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x+6, \\ u_2(x,0)=2-x. \end{cases}$

Вариант № 22

1. $(-1+a^2)y-2ay'+y''=0.$
2. $z\frac{\partial u}{\partial z}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}-3\frac{\partial u_1}{\partial x}+28\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-6\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=2x+4, \\ u_2(x,0)=3x. \end{cases}$

Вариант № 23

1. $(-4+a^2)y-2ay'+y''=0.$

2. $x\frac{\partial u}{\partial z}+x\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+2\frac{\partial u_1}{\partial x}-3\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ 3\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-8\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=-2x, \\ u_2(x,0)=x+7. \end{cases}$

Вариант № 24

1. $(-a-a^2)y-y'+y''=0.$

2. $y\frac{\partial u}{\partial z}+y\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}-2\frac{\partial u_1}{\partial x}-4\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ 3\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}+5\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x+3, \\ u_2(x,0)=2-3x. \end{cases}$

Вариант № 25

1. $(a^2-2a)y+(2-2a)y'+y''=0.$

2. $z\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+5\frac{\partial u_1}{\partial x}+7\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x+2, \\ u_2(x,0)=4-x. \end{cases}$

Вариант № 26

1. $(1-a)y-2y'+y''=0.$

2. $z\frac{\partial u}{\partial z}+z\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+4\frac{\partial u_1}{\partial x}+6\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ 4\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-6\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x+1, \\ u_2(x,0)=5-2x. \end{cases}$

Вариант № 27

1. $(-2+3a-a^2)y+y'+y''=0.$

2. $\frac{\partial u}{\partial z}+x\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}-3\frac{\partial u_1}{\partial x}-4\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ 3\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}+5\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=4x, \\ u_2(x,0)=1-x. \end{cases}$

Вариант № 28

1. $-(ay)+y''=0.$

2. $y\frac{\partial u}{\partial z}+z\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}-2\frac{\partial u_1}{\partial x}+5\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ -4\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}+7\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=5-2x, \\ u_2(x,0)=x. \end{cases}$

Вариант № 29

1. $(1-a^2)y-2y'+y''=0.$

2. $2z\frac{\partial u}{\partial z}+y\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+5\frac{\partial u_1}{\partial x}-2\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ -3\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}+4\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=x+3, \\ u_2(x,0)=x+4. \end{cases}$

Вариант № 30

1. $y''-a^2y=0.$

2. $x\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

3. $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+5\frac{\partial u_1}{\partial x}-9\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}-5\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ u_1(x,0)=1-4x, \\ u_2(x,0)=2x+1. \end{cases}$

Литература

[1] Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц.— М.: Эдиториал УРСС, 2000.— 320 с.

[2] Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке.— М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976.— 576 с.

[3] Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке.— М.: Наука, 1966.— 260 с.

[4] Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников.— М.: Физматлит, 2005.— 256 с.

[5] Смирнов, В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов.— М.: Гостехиздат, 1974.— Т. II.— 656 с.

[6] Матвеев, Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н. М. Матвеев.— СПб: Лань, 2002.— 432 с.

[7] Альсевич, Л. А. Практикум по дифференциальным уравнениям / Л. А. Альсевич, Л. П. Черенкова.— Минск: Вышэйшая школа, 1990.— 320 с.

[8] Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов.— Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.— 1976 с.

[9] Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц.— М.: Физматлит, 2001.— Т. III.— 662 с.

Учебное издание

ЗЕЛЕНКОВ Вадим Исаакович
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Пособие по решению задач

Редактор Курбыко С. М.
Корректоры Курбыко С. М., Зеленков В. И.
Компьютерная верстка Зеленков В. И.

Подписано в печать 22 июня 2011 г. Формат 60x90 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Ризография.
Усл. п.л. 5. Уч.-изд. л. 2,5.
Тираж 70 экз. Заказ №164.

Издатель и полиграфическое исполнение
учреждение образования «Международный государственный
экологический университет имени А. Д. Сахарова»
ЛИ № 02330/0131580 от 28.07.2005 г.
Республика Беларусь, 220070, г. Минск, ул. Долгобродская, 23,
E-mail: info@iseu.by
http://www.iseu.by