

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Международный государственный экологический
университет имени А.Д.Сахарова»



Факультет мониторинга окружающей среды

Кафедра энергоэффективных технологий

А. И. Ерошов

**ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
И ИННОВАЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ**

Часть II

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Минск
2012

УДК 001.8 (075.8)
ББК 73.я 73
Е76

*Рекомендовано к изданию НМС МГЭУ им. А.Д.Сахарова
(протокол № 6 от 15 февраля 2011 г.)*

Автор:

А. И. Ерошов, профессор кафедры энергоэффективных технологий
МГЭУ им. А. Д. Сахарова, д.б.н., профессор

Рецензенты:

зав. кафедрой теоретической механики и теории механизмов и машин
УО «БГАТУ», д.т.н., профессор *Орда А. Н.*;
зав. кафедрой физики и высшей математики УО «МГЭУ им. А.Д.Сахарова»,
д.ф.-м.н., профессор *Кузьмин В. С.*

Е76 Ерошов, А. И.

Основы научных исследований и инновационной деятельности: учеб.-метод. пособие : в 2 ч. / А. И. Ерошов. – Минск: МГЭУ им. А.Д.Сахарова, 2012. – Ч. II. – 104 с.

ISBN 978-985-551-037-7. (часть II)
ISBN 978-985-551-038-4.

В пособии излагаются общие понятия научного знания и определения научных проблем, даются методы, используемые на теоретическом и эмпирическом уровнях исследования, логико-психологический анализ процесса решения технических задач, сравнения и измерения, эксперимент и экспериментально-аналитические методы. Представлено моделирование как средство отражения свойств материальных объектов.

Предназначено для студентов, изучающих курс «Основы научных исследований и инновационной деятельности». Будет полезно преподавателям и специалистам, связанным с инновационной и изобретательской деятельностью, созданием объектов интеллектуальной собственности.

**УДК 001.8 (075.8)
ББК 73.я 73**

**ISBN 978-985-551-037-7. (часть II)
ISBN 978-985-551-038-4.**

© Ерошов А. И., 2012
© Международный государственный
экологический университет
имени А.Д.Сахарова, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
Глава 6. Методы обработки результатов наблюдений при совместных и совокупных измерениях.....	5
6.1. Разновидности классификации измерений	5
6.2. Структурные элементы измерений	8
6.3. Основные этапы измерений.....	15
6.4. Содержание и этапы обработки данных при измерении. Методы инженерной геометрии для обработки комплексных измерений на объект	21
6.5. Моделирование как средство отражения материальных объектов.....	29
6.6. Постановка задач обработки данных при совместных измерениях и условия применения метода наименьших квадратов	31
Глава 7. Проведение экспериментальных исследований.....	45
7.1. Эксперимент	45
7.2. Обработка результатов экспериментальных исследований	47
7.3. Экспериментальные измерения.....	48
7.4. Методы определения случайных ошибок. Определение связи между ошибками	49
7.5. Основы номографии.....	57
Глава 8. Обработка данных детерминированного и стохастического экспериментов	64
8.1. Термины и условные обозначения.....	64
8.2. Обработка данных детерминированного эксперимента.....	66
8.3. Обработка данных стохастического эксперимента. Одна выборка	76
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	85
Литература.....	86
Приложение 1 Критерий Смирнова-Граббса.....	88
Приложение 2 Критерий Стьюдента	89
Приложение 3 Критерий Пирсона	91
Приложение 4 Критерий Фишера.....	93
Приложение 5 Критерий Кохрена.....	95
Приложение 6 Показатели преломления.....	96
Приложение 7 Физические константы	97
Приложение 8 Греческий алфавит (24 буквы).....	98
Приложение 9 Задание раздела научного обеспечения государственной программы	99
Приложение 10 Этапы выполнения задания раздела научного обеспечения государственной программы.....	100
Приложение 11 Карта технического уровня нового вида изделия (технологического процесса).....	101
Приложение 12 Калькуляция стоимости работ, выполняемых за счет средств республиканского бюджета.....	102
Приложение 13 Калькуляция Расчет затрат на приобретение материалов, покупных полуфабрикатов и комплектующих изделий, финансируемых за счет средств республиканского бюджета.....	103

ВВЕДЕНИЕ

В первой части учебно-методического пособия «Основы научных исследований и инновационная деятельность» приведены сведения, необходимые для общего понимания творческого труда начинающего исследователя. Как сказал один из классиков, творчеству не только можно, но и обязательно нужно учить. Описанные методы и способы в какой-то мере будут стимулировать творческую активность студентов в разных областях науки и техники. На разных этапах в инновационном творчестве человек может проявить свои интеллектуальные способности для достижения поставленной цели.

Во вторую часть пособия включены главы по методике обработки результатов наблюдений, проведению экспериментальных исследований, алгоритмы решения прикладных задач, материалы для самостоятельной работы, лабораторных и практических занятий.

В приложениях № 1–5 приведены критерии оценки достоверности экспериментальных данных разных авторов. В приложениях № 9–13 приведены разделы по оценке научного обеспечения государственных программ (задания, этапы, технико-экономическое обоснование, карта технического уровня нового вида изделия – технологического процесса, калькуляция стоимости выполняемых работ и другие материалы).

Глава 6. Методы обработки результатов наблюдений при совместных и совокупных измерениях

6.1. Разновидности классификации измерений

Измерения традиционно разделяются по многим классификационным признакам. Задача разработки согласованных разновидностей классификации выходит за рамки этой работы. Следует лишь заметить, что подобная классификация должна основываться на рассмотрении структурных элементов измерения в их взаимосвязи. Ниже рассмотрены наиболее существенные для обработки данных разновидности классификации по традиционным признакам.

Наиболее громоздкой, естественно, является классификация измерений по измеряемой физической величине, поскольку в настоящее время насчитывается около двух тысяч величин.

Одна из наиболее детально разработанных классификаций такого рода содержит пять ступеней: области, виды, отрасли, подвиды и разновидности.

Классификация неявно опирается на следующие разделы физики: механику, термодинамику, электромагнетизм, оптику, молекулярную физику и атомную физику.

По этим разделам группируются области измерений, т. е. измерения групп величин: пространства и времени, механических, акустических, температуры и тепловых, электрических, магнитных, электромагнитных, применяемых в химии, световых, оптических, ионизирующих излучений и ядерной физики.

Виды измерений определяются непосредственно измеряемыми величинами или группами однородных величин. Примеры видов измерений: измерения скорости, теплопроводности, коэффициента модуляции, молекулярных объема и массы, энергии и потока энергии ионизирующего излучения.

Примерами **отраслей** являются: температуры высокие и сверхвысокие – более 3000 К; температуры средние – 273...3000 К; температуры низкие и сверхнизкие – менее 273 К. Подвиды измерений возникают при разделении видов (каждого диапазона вида) на подмножества по особенностям объектов исследования, явлений или условий измерений.

Примерами **подвидов** измерений длины служат измерения расстояний в астрономии, расстояний в приземном слое атмосферы, в море и под водой (для сверхбольших длин); измерения линейных размеров объектов и расстояний в строительстве (для больших длин); измерения толщины пленок и покрытий, деформации объектов, диаметров отверстий и валов, амплитуды вибраций (для малых длин); измерения параметров шероховатости и смещения частиц (для сверхмалых длин).

Разделение подвидов измерений на **подмножества по особенностям измеряемой величины приводит к разновидностям измерений**. Примеры разновидностей измерений **напряжения электрического**: измерения постоянных, переменных низкочастотных, переменных высокочастотных и импульсных напряжений (для высоких напряжений); измерения постоянных,

переменных гармонических низкочастотных, переменных гармонических высокочастотных и импульсных напряжений (для средних напряжений).

По режиму использования средства измерений делят на статические и с использованием в динамическом режиме.

Под **динамическим** понимают такой режим использования средств измерений, при котором изменения условий (факторов) измерения во время его проведения оказывают существенное влияние на результат и погрешность измерения.

К условиям (факторам) измерения относят **информативные и неинформативные** параметры входного сигнала, влияющие величины, помехи, структуру средств измерений. Существенность влияния указанных факторов определяется относительно требуемой точности измерений. Признаком динамического режима использования меры и измерительного устройства служит переменный выходной сигнал.

В соответствии с количеством элементарных измерительных актов – наблюдений выделяют измерения с **однократными и многократными наблюдениями**. Слово «**однократный**» в данном случае нельзя понимать буквально: на практике к однократным относятся измерения с числом наблюдений не более трех.

Граница между измерениями с однократными и многократными наблюдениями определяется характером преобладающих погрешностей и, соответственно, целесообразностью и возможностью использования статистических методов при обработке данных.

При измерениях с однократными наблюдениями их повторяют небольшое число раз, чтобы удостовериться, что единичное наблюдение не содержало грубой ошибки и что верно априорное предположение об отсутствии существенной случайной составляющей погрешности (случайного разброса результатов).

Если измерения основаны на наблюдениях основных величин и использовании значений физических констант, то они называются абсолютными, в противном случае – относительными. Абсолютными по существу являются измерения производной величины в прямом соответствии с ее размерностью. Измерение основной величины может быть только абсолютным.

В отношении полноты (тщательности) оценивания точности обычно выделяют три категории измерений: с **точной апостериорной, приближенной апостериорной и априорной оценкой погрешностей**.

К **первой категории** относятся измерения, проводимые при метрологических исследованиях, а также особо ответственные измерения, осуществляемые с помощью рабочих средств. При этом обработка данных выполняется наиболее точно, с учетом индивидуальных свойств используемых средств измерений и результатов дополнительных измерений, выполняемых для контроля условий измерений.

Измерения с априорной оценкой погрешностей, называемые техническими, проводят по стандартизованным методикам. При этом обработка экспериментальных данных бывает минимальной, а погрешность измерения оценивают заранее, в рамках аттестации методики выполнения измерений.

Средняя категория – **измерения с приближенной оценкой погрешностей по экспериментальным данным** – включает в себя многие контрольно-поверочные измерения, а также часть измерений по стандартизированным методикам, если один или несколько существенных факторов не удовлетворяют требованиям методики. При этом обработка данных может быть более сложной, чем при технических измерениях, с учетом сведений о типовых свойствах средств измерений и приближенных оценок основных влияющих величин.

Важнейшим для обработки экспериментальных данных является разделение измерений на прямые, косвенные, совместные и совокупные. При этом основным признаком является вид уравнения измерения, связывающего измеряемую и непосредственно наблюдаемые величины.

При прямом измерении измеряемая величина Q пропорциональна непосредственно наблюдаемой X :

$$Q = cX, \quad (6.1)$$

где c – заданный коэффициент.

При косвенном измерении величина Q является известной функцией от непосредственно наблюдаемых аргументов $X_1, \dots, X_m$:

$$Q = f(X_1, \dots, X_m). \quad (6.2)$$

При совместных измерениях находят функциональную зависимость $Y = f(X)$ между переменными величинами X и Y путем измерений ряда величин $X_1, \dots, X_m$ и соответствующих им величин $Y_1, \dots, Y_m$:

$$Y_i = f(X_i). \quad (6.3)$$

При совокупных измерениях значения набора одноименных величин $Q_1, \dots, Q_k$, как правило, определяют путем измерений сумм или разностей этих величин в различных сочетаниях:

$$Y_i = \sum_{j=1}^k c_{ij} Q_j, \quad (6.4)$$

где коэффициенты c_{ij} принимают значения ± 1 или 0 .

Отметим, что такое разделение не является вполне строгой классификацией. Например, если считать основным признаком при разделении пересчет экспериментальных данных (результатов наблюдений) в результат измерения, то к косвенным следовало бы отнести измерения с многократными наблюдениями одной величины.

Аналогичные затруднения возникают и для других разновидностей временных сложных измерений.

Например, **динамические измерения** можно отнести к **совместным** в соответствии с их определением. Однако в динамическом режиме можно проводить прямые измерения величин с целью нахождения значения величины, связанной с измеряемыми известной зависимостью. В итоге имеем косвенные динамические измерения. Таким образом, усложнение измерений, приводящее к образованию противоречивых (на терминологическом уровне) комбинаций, побуждает к уточнению понятий об исходных четырех категориях измерений.

В последнее время предложены расширенные толкования **понятия косвенного измерения**. В частности, предлагается охватить этим понятием случаи, когда по результату прямого измерения величины находят (рассчитывают) значение другой величины, не одноименной с измеряемой. В соответствии с таким подходом к косвенным следует отнести измерение веса тела путем его взвешивания и умножения полученной массы на значение ускорения свободного падения.

Если же косвенным назвать «измерение, при котором входной измерительный сигнал содержит информацию о физических величинах, функционально связанных с физической величиной, подлежащей измерению в соответствии с поставленной задачей», то ваттметр окажется средством для косвенных измерений.

Несмотря на отмеченные недостатки, разделение измерений на четыре категории общепризнано и широко используется. Причина состоит в том, что различия между категориями существенны и обуславливают специфику измерений и прежде всего – особенности обработанных данных. Целесообразно рассматривать указанные категории как основные элементы, из которых могут складываться в различных сочетаниях другие категории измерений, такие как, например, **прямые и косвенные динамические измерения**.

Приведем несколько примеров различных категорий измерений, которые далее будут использованы для иллюстрации методов обработки данных.

Измерение падения напряжения на участке цепи с помощью вольтметра, измерение массы тела путем взвешивания на пружинных весах **относятся к прямым измерениям**.

Измерение мощности, выделяемой током в резисторе, путем измерения действующей силы тока и активного сопротивления резистора, измерение плотности твердого тела путем измерения его массы и объема, а также измерение сопротивления участка цепи путем измерений силы тока и падения напряжения **относятся к косвенным измерениям**.

Многочисленные примеры совместных измерений дают задачи построения градуировочных характеристик средств измерений, т. е. зависимостей $Y = f(X)$, связывающих величину X на входе с величиной Y на выходе средства измерений.

Например, вспомним линейную градуировочную характеристику вольтметра переменного тока и квадратичную вольт-амперную характеристику воздушного термопреобразователя. Примерами совокупных измерений являются задачи калибровки наборов мер (например, наборов гирь или магазинов сопротивлений), а также калибровки углов многогранных призм.

6.2. Структурные элементы измерений

Рассмотрим подробнее основные структурные элементы измерений.

Измеряемая величина – одно из центральных понятий метрологии, поскольку измеряются только физические величины [17, 26].

При этом понятия физической величины и измерения неразрывно связаны: **измерить можно только физическую величину, а физическую величину можно только измерить.**

Первый аспект этой связи (измерить можно только физическую величину) ограничивает измерение нахождением значения величины. Предполагается, естественно, что величина может быть выражена количественно с помощью определенного числа принятых единиц. Следовательно, имеется единица, а значит, и возможность ее воспроизведения. Таким образом, речь идет об «измерениях, приводимых к эталону».

Второй аспект (физическую величину можно только измерить) требует уточнения в том смысле, что речь идет о реализованной (овеществленной) величине. Конечно, не отрицается возможность воспроизведения величин. Что касается употребительного выражения «преобразование величины», то оно является неточным. Преобразование предполагает замену одного объекта другим. При измерительном преобразовании, например, перемещения в частоту воспроизводится (генерируется) электрическое напряжение, частота которого известным образом связана с перемещением, которое никуда не исчезает и ничем не заменяется.

Физическую величину вводят, указывая уравнение, ее определяющее, модель физического объекта, описываемого указанным уравнением, метод ее измерений.

Определяющее уравнение представляет физический закон, связывающий вводимую величину с другими величинами. Физический закон есть выражение количественных соотношений, полученных опытным путем. Модель объекта, которой ставится в соответствие определяющее уравнение, позволяет однозначно его интерпретировать. Метод измерений обеспечивает возможность достижения конечной цели – получения оценки величины.

Физическая величина, которая отражает интересующее исследователя (экспериментатора) свойство объекта, и **измеряемая величина** – в общем случае не тождественные понятия. Если «свойство» объекта распределено во времени и (или) пространстве, то соответствующая физическая величина представляет собой функцию времени, длины или пространственных координат. При этом измеряемой может быть действующая величина («энергетический» параметр), мгновенная величина, соответствующая определенному значению аргумента, средняя величина и т. д. Измеряемая величина вводится как параметр модели конкретного объекта.

Значение параметра, которое можно было бы получить в результате абсолютно точного измерения (с учетом возможного масштабного преобразования), принимают за истинное значение измеряемой величины. Истинное значение справедливо в рамках принятой модели объекта. Уточнение модели влечет за собой переопределение измеряемой величины и ее истинного значения.

Формулирование понятия измеряемой величины опирается на разделение физических величин на **активные** и **пассивные**. Активная физическая

величина способна создавать воздействие на средство измерений, вызывая на его входе измерительный сигнал.

Метод измерений определяется как совокупность приемов использования принципов и средств измерений. Это определение является весьма абстрактным и не содержит упоминания о цели использования принципов и средств измерений – решении измерительной задачи.

С этой точки зрения более удачно определение: «Метод измерений – совокупность правил и приемов использования средств измерений, позволяющая решить измерительную задачу».

Основным для выделения разновидностей этого понятия является вопрос об источнике измерительной информации: прибор, или мера, или их совокупность. Учитывая, что измерение по существу есть сравнение с мерой (единицей), можно определить метод измерений как совокупность правил и приемов использования средств измерений для сравнения измеряемой величины с величиной, воспроизводимой мерой.

Стандартизированы две разновидности понятия метода измерений: **метод непосредственной оценки и метод сравнения с мерой (эталоном)**. Эти названия, как и некоторые другие, например, метод прямого преобразования и метод сравнения, неудачны, поскольку наводят на мысль о возможности измерения без сравнения. Представляется более правильным говорить о непосредственном и опосредованном сравнении с мерой. При этом непосредственным или опосредованным сравнение может быть как во времени, так и в отношении физической природы величин.

Так, например, измерение массы с помощью рычажных весов осуществляется путем непосредственного (во времени) сравнения с мерой – гирей или набором гирь. В то же время это измерение опосредовано в отношении физической природы величин, поскольку непосредственно сравниваются воздействующие на средство измерений силы, а не массы. Если игнорировать это обстоятельство, то возникает погрешность, обусловленная различным гравитационным потенциалом в точках приложения сил.

Указанная погрешность пренебрежимо мала на достижимом в настоящее время уровне точности, однако принципиально важно, что она обусловлена различной природой измеряемой и сравниваемых величин. Пример опосредованного во времени сравнения с мерой – измерение массы на циферблатных весах; речь идет о сравнении с образцовой гирей, использованной для градуировки весов.

При прямом измерении ускорения с помощью акселерометра оно сравнивается (опосредованно во времени) непосредственно с ускорением, воспроизводимым с помощью образцовой меры – центрифуги, которая использована для градуировки акселерометра. При косвенном измерении ускорения путем измерения перемещения и его двойного дифференцирования оно сравнивается с мерой (единицей) опосредованно, через единицы длины и времени.

Отметим, что в измерительной практике метод измерений часто отождествляют с принципом действия средства измерений.

Так, например, говорят о термоэлектрическом методе измерений электрической мощности на СВЧ, электродинамическом методе измерений силы тока, оптическом методе измерений высоких температур, кондуктометрическом методе измерений концентрации, индукционном методе измерений расхода. Такой подход не конструктивен, с точки зрения пользователя средствами измерений, который озабочен не тем, каков принцип действия прибора, а тем, как правильно и эффективно его использовать для решения измерительной задачи.

Можно предложить определение метода измерений как совокупности физического и метрологического принципов измерений. Это определение естественным образом объединяет обе указанные выше трактовки.

Методы измерений можно классифицировать по различным признакам. Прежде всего, следует отметить классификацию по основным измерительным операциям. Она тесно связана с техническими устройствами, реализующими эти операции: измерительными преобразователями, мерами и компараторами. Эта классификация ориентирована на структурное описание средств измерений и поэтому важна для приборостроительных целей, а также для метрологии измерительных систем и измерительно-вычислительных комплексов.

Для общеметрологического анализа более важными являются традиционные классификации, основанные на следующих признаках:

- физический принцип, положенный в основу измерения;
- режим взаимодействия средства измерений с объектом;
- вид применяемых средств измерений;
- вид хранителя единицы физической величины.

По первому признаку все методы измерений делятся на электрические, магнитные, акустические, оптические и т. д. По режиму взаимодействия их можно разделить на статические и динамические, по виду применяемых средств измерений – на аналоговые и цифровые.

Наиболее разработана классификация методов по виду хранителя единицы. При реализации метода непосредственной оценки хранителем единицы выступает измерительный прибор прямого действия или измерительная система, а для метода сравнения с мерой хранителем единицы служит мера.

Основные разновидности метода сравнения: метод противопоставления (в том числе нулевой и метод неполного уравнивания), дифференциальный метод, методы совпадений и замещения.

Однако в настоящее время эти методы редко встречаются в чистом виде, поскольку рост требований к точности измерений и усложнение условий измерений побуждает к разработке новых сложных модификаций и совокупностей указанных основных методов.

Примерами могут служить современные методы измерений на переменном токе, в частности метод, реализованный в дифференциальном вольтметре переменного тока с автоматической коррекцией погрешности.

Общепринятое определение **средства измерений** не вполне удачно, т. к. основано на внешнем, «вторичном» признаке, а также ограничено стандарти-

зированными средствами измерений. Для снятия этого ограничения необходимо уточнить определение: «Средство измерений – техническое средство, предназначенное для измерений физических величин и имеющее известные с определенной точностью метрологические характеристики».

По существу же представляется целесообразным понимать под средством измерений (СИ) техническое средство, предназначенное для измерений и позволяющее решить измерительную задачу путем сравнения измеряемой величины с единицей или шкалой величины.

К **средствам измерений** относят меры, измерительные преобразователи и измерительные приборы. Кроме них, при измерениях могут быть использованы другие технические средства, которые вместе со средствами измерений в совокупности носят название «измерительная аппаратура». К измерительной аппаратуре относят комплексы средств измерений: измерительные устройства и измерительные системы.

Традиционно средства измерений совершенствуют по направлениям повышения точности и быстродействия, расширения диапазонов. Кроме того, для современного приборостроения характерна тенденция к усложнению средств измерений, в первую очередь за счет включения в их состав средств вычислительной техники, в частности микропроцессоров. Это позволяет создавать средства для системных, комплексных исследований объектов, а также средства, позволяющие управлять измерительным экспериментом по заданной программе и (или) оперативно.

Усложнение средств измерений сопровождается расширением номенклатуры их нормируемых метрологических характеристик и изменением способов их установления. Так, сквозные метрологические характеристики каналов системных комплексных исследований объектов, как правило, рассчитывают на основе нормированных метрологических характеристик их компонентов.

Комплексы нормируемых метрологических характеристик специфичны для различных категорий средств измерений. Выбор нормируемых метрологических характеристик средств измерений имеет целью решение двух задач: обеспечения единообразия средств измерений по типу и получения сведений, необходимых для правильного применения средств по назначению, для обработки данных и получения результата измерения и оценки его погрешности.

По-видимому, целесообразно рассматривать как обязательные для нормирования лишь те метрологические характеристики, **которые обеспечивают единообразие средств измерений**. Характеристики, необходимые для применения средств и обработки данных, могут быть указаны в эксплуатационной документации на средства измерений.

Форма представления метрологических характеристик в нормативно-технической документации очень важна для целей обработки. Так, например, нормирование номинальной метрологической характеристики и пределов допускаемых отклонений от нее в общем случае предпочтительнее указания предельных метрологических характеристик.

Условия измерений, которые влияют на точность результатов, характеризуют с помощью влияющих величин. В соответствии с установленными для конкретных ситуаций диапазонами значений влияющих величин различают **нормальные и рабочие условия применения средств измерений**. Для оценки воздействия влияющих величин вводят функции влияния, которые позволяют рассчитать дополнительные погрешности средств измерений.

Условия измерений могут быть контролируруемыми или неконтролируемыми. Такое разграничение условно: с одной стороны, невозможно полностью контролировать все условия проведения измерительного эксперимента, а с другой – невозможно осуществить измерение в условиях, полностью не контролируемых. Таким образом, можно говорить о неконтролируемости условий в определенных пределах, которые обусловлены требуемой точностью измерений.

Контроль условий может осуществляться двумя способами. Во-первых, можно стабилизировать условия с помощью технических средств так, чтобы влияющие величины находились в требуемых границах. Это гарантирует достижение требуемой точности измерений. Такой путь предпочтителен, однако не всегда возможен. В первую очередь это связано с характером и управляемостью объекта исследований. Если объект является природным, то, как правило, управление измерений и их стабилизация невозможны.

Во-вторых, контролировать условия можно путем измерений влияющих величин с использованием результатов этих измерений при обработке данных.

При особо точных и ответственных измерениях контроль их проведения осуществляют комбинированным способом: насколько возможно, стабилизируют условия и достаточно точно измеряют влияющие величины, что позволяет ввести соответствующие поправки в результаты.

Результат измерения выражает собой конечную цель спланированного и подготовленного измерительного эксперимента и непосредственную цель обработки данных. Можно говорить о результатах измерений в узком и широком смысле. В узком смысле результат любого измерения есть значение физической величины, т. е. именованное число. Это непосредственно следует из постулата о постоянстве измеряемой величины. В широком смысле можно говорить о результатах определенной совокупности измерений, связанных единой целью.

Так, результатом **совокупных измерений** можно считать совокупность значений одноименных величин, которые получены путем решения системы уравнений вида (6.4). Результат **динамических измерений** изменяющейся во времени величины есть совокупность значений величины с указанием моментов времени, которым соответствуют эти значения. Результатом **совместных измерений** можно считать найденную зависимость между величинами.

Поскольку все категории измерений в основе своей сводятся к прямым, то можно сказать, что результатом прямого статического измерения является число, а результаты других категорий измерений определяются их целью и

совокупностью измеряемых величин: одноименных для различных объектов, разноименных, мгновенных и т. д.

Качество результата измерения определяется степенью близости его к истинному значению измеряемой величины. Оно может проявляться и описываться по-разному.

Например, результат может не превосходить истинного значения или быть не меньше его (отклонение с односторонним пределом), может отличаться от истинного значения в ту или иную сторону на ограниченную величину (отклонение с двусторонними пределами, в т. ч. симметричными); наконец, результат может иметь некоторое (известное или неизвестное) вероятностное распределение по множеству мыслимых измерений одной и той же величины, проводимых в одинаковых условиях.

Качество результата может быть охарактеризовано с помощью показателей: положительного – точности и отрицательного – погрешности. Естественно, эти показатели связаны обратной зависимостью.

Погрешность результата измерения определена как отклонение результата от истинного значения измеряемой величины. Истинное значение и результат принадлежат не к ряду реальностей, а к ряду отражений (моделей). Вследствие принципиальной неадекватности любой модели отражаемой реальности невозможно, оперируя реальными объектами и приборами в реальных условиях, обеспечить тождественность полученного результата измерения и истинного значения измеряемой величины. Иными словами, невозможно точно определить погрешность измерения, т. к. в противном случае, введя в результат поправку, можно было бы найти истинное значение.

Поэтому в метрологии ставится задача оценивания погрешности измерения, а не ее точного определения. Эта задача решается по-разному для систематических и случайных погрешностей. **Систематическими называют погрешности**, которые остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных наблюдениях одной и той же величины. **Случайные погрешности** в указанных условиях изменяются непредсказуемо.

Довольно давно было высказано предложение о замене понятия «погрешность» понятием «неопределенность», которая может быть выражена интервалом. В последнее время это предложение получило поддержку.

Аргументация сторонников такого подхода базируется на том, что погрешность принципиально невозможно определить точно в эксперименте, что является следствием невозможности абсолютно точного измерения. Однако этот факт есть выражение основного диалектического противоречия в области измерительного дела между потребностями практики и объективными возможностями их удовлетворения. Разрешение этого противоречия составляет содержание метрологической деятельности. **Погрешность** характеризует степень разрешения указанного противоречия и потому представляет собой одно из основополагающих понятий метрологии.

Кроме того, термин «неопределенность» неприменим по семантическим соображениям к результату измерения, положение которого на числовой оси

точно определено. Неопределенным является лишь взаимное положение результата и истинного значения измеряемой величины.

Что касается выражения неопределенности с помощью интервала, то следует заметить, что идея замены величин интервалами представляет интерес для метрологии, в которой оперируют не просто числами, а экспериментальными полученными данными, которые неточны. Поэтому к операциям над ними применимы **методы интервальной арифметики**.

6.3. Основные этапы измерений

Измерение, направленное на изучение определенного свойства объекта, представляет собой познавательную процедуру. В ней естественно выделить три этапа: подготовку, измерительный эксперимент, обработку экспериментальных данных.

Содержанием этапа подготовки является формулирование измерительной задачи (включая определение понятия измеряемой величины и установление формы представления результата), планирование измерений (включая выбор метода и средств измерений и их размещение), обеспечение требуемых условий проведения измерений.

Измерительный эксперимент состоит в поддержании требуемых условий, осуществлении взаимодействия средства измерений с объектом исследования в соответствии с выбранным методом и фиксации экспериментальных данных – результатов наблюдений.

Обработка данных сводится к их логическим и математическим преобразованиям с целью получения результата измерения и оценки его точности.

Подготовка к измерению длины объекта состоит в построении его геометрической модели, на которой определяется параметр, представляющий измеряемую длину. Модель строится на основе априорной информации об объекте, а параметр конкретизируется, исходя из цели измерения.

До измерения должен быть известен диапазон, в котором находится измеряемая величина, что позволит выбрать, например, линейку нужной длины. Требуемая точность измерения определит необходимую цену деления линейки. Длина и цена деления полностью определяют выбор линейки, которым завершается этап подготовки.

Этап эксперимента, как указано выше, сводится к совмещению выбранных в соответствии с моделью точек объекта с отметками линейки и при необходимости – интерполяции деления, на котором оказался конец объекта. Обработка данных предусматривает лишь конкретизацию доли деления, которая выражает неопределенность положения конца объекта в пределах деления, а также фиксацию результата измерения и оценки его погрешности.

Подготовка к взвешиванию на рычажных весах сводится к выбору набора гирь и весов, согласованных по метрологическим характеристикам с требуемыми диапазоном и точностью измерений, а также к правильной установке весов. Эксперимент состоит в уравнивании весов, а обработка дан-

ных – в расчете уравнивающей массы и оценке погрешности результата измерения. Погрешность складывается из остаточной неуравновешенности, обусловленной дискретностью массы гирь (методическая составляющая), порога реагирования (погрешности нуля) весов и погрешности гирь (инструментальная составляющая), а также неточности фиксации положения равновесия весов (личная составляющая).

Подготовка к взвешиванию на пружинных весах заключается в выборе прибора с требуемым диапазоном; эксперимент осуществляется тривиально, а обработка данных предполагает лишь интерполяцию деления, в пределах которого остановился указатель, и фиксацию результата и оценки погрешности.

Подготовка к измерению напряжения и соответствующий эксперимент аналогичны предыдущему примеру, за исключением того, что при обработке данных необходимо учесть влияние входной цепи вольтметра на источник измеряемого напряжения.

Рассмотрим подробнее этапы измерительной процедуры.

Первый этап целесообразно разделить на две части: постановку измерительной задачи и планирование измерительного эксперимента.

Постановка измерительной задачи осуществляется в такой последовательности:

- уточнение данных об условиях измерения и исследуемой физической величине;
- формирование модели объекта и определение измеряемой величины;
- постановка измерительной задачи на основе принятой модели объекта;
- выбор конкретных величин, на основе которых будет находиться значение измеряемой величины (например, при косвенных измерениях – выбор измеряемых прямым образом аргументов);
- формулирование уравнения измерения.

Наиболее важным является формирование модели, особенно при решении сложных измерительных задач и исследовании сложных объектов.

Модель объекта формируется на основе априорных данных. Измеряемая величина определяется с помощью принятой модели объекта как пример или характеристика объекта. Выбор измеряемой величины может быть неоднозначным, даже при фиксированной модели объекта.

Неизбежная идеализация объекта при построении его модели приводит к несоответствию измеряемой величины как параметра модели исследуемому свойству реального объекта – так называемому пороговому несоответствию.

В простых случаях, при измерениях невысокой точности модель в явном виде не выделяется, а пороговое несоответствие пренебрежимо мало. Однако при усложнении измерительной задачи и повышении точности используемых средств измерений выбор модели становится весьма важным, а пороговое несоответствие существенным.

В результате измерений может оказаться, что принятая модель неудовлетворительна: например, при построении модели пренебрегли вероятност-

ными эффектами, а разброс опытных данных оказался недопустимо большим. В таком случае необходимо уточнить модель и переопределить понятие измеряемой величины. Уточнение, в частности, может представлять собой усложнение модели путем введения дополнительных параметров; сложная модель, конечно, должна включать в себя простую как частный случай.

В рамках принятой модели объекта исследователь может формально поставить измерительную задачу, что дает возможность планировать измерение.

Планирование измерения в зависимости от вида и сложности задачи выполняется в такой последовательности:

- выбор методов измерений непосредственно измеряемых величин (аргументов), возможных типов средств измерений;
- априорная оценка погрешности измерения;
- выбор средств измерений в соответствии с указанными требованиями;
- выбор параметров измерительной процедуры: числа наблюдений для каждого аргумента, моментов времени и точек выполнения наблюдений;
- подготовка средств измерений к выполнению экспериментальных операций;
- обеспечение требуемых условий или создание возможности их контроля.

Некоторые задачи удастся формализовать и использовать математические методы; это относится прежде всего к выбору параметров, где используются методы **теории планирования эксперимента**. Однако во многих случаях решение основано на практическом опыте выполнения измерений и неформальных соображениях.

Отметим, что для многих видов массовых измерений разрабатывают методики выполнения измерений. Планирование измерений составляет существенную часть разработки такой методики.

Теория планирования измерений как раздел теории измерений в настоящее время недостаточно разработана. Причина состоит в том, что при планировании измерений необходимы учет метрологических требований, которые слабо формализованы, и обоснование использования математических методов планирования эксперимента.

Следует подчеркнуть принципиальную важность этапов подготовки, которые предопределяют конкретное содержание других измерений. Подготовка измерения осуществляется на основе априорной информации; качество подготовки определяется тем, в какой мере она использована.

В целом эффективная подготовка является необходимым, но, разумеется, не достаточным, условием достижения цели измерения. Ошибки, допущенные при подготовке измерений, с трудом обнаруживаются и корректируются в дальнейшем. Например, ошибки в формулировании измерительной задачи часто проявляются лишь при использовании результата измерения в дальнейшей деятельности.

Измерительный эксперимент представляет собой измерение в узком смысле. В общем случае трудно выделить четкую последовательность его

выполнения, поскольку объекты и средства измерений весьма разнообразны и процессы их взаимодействия могут быть очень сложными. Тем не менее, можно выделить основные измерительные операции, из которых состоит конкретная измерительная процедура, а именно: измерительные преобразования, включая первичное и промежуточные преобразования; воспроизведение физической величины заданного размера; сравнение величин.

Экспериментальный этап измерения представляет собой совокупность таких операций, выполняемых в определенной последовательности. В соответствии с этим можно определить метод измерения как алгоритм использования основных операций с целью нахождения значения измеряемой величины.

При проведении измерительного эксперимента может быть учтена часть априорной информации, не использованная при подготовке. Эксперимент связан с целевой установкой измерения опосредованно, через формулировку измерительной задачи; результат эксперимента – опытные данные – отделен от результата этапом обработки.

Вследствие промежуточного положения измерительного эксперимента среди других этапов измерения в его рамках отсутствуют объективные критерии правильности его проведения. Последствия ошибок, допущенных при проведении измерительного эксперимента, обычно выявляют лишь при анализе результата измерения или при обработке данных наблюдений. Например, неконтролируемое изменение условий может привести к увеличению разброса результатов наблюдений сверх ожидаемого уровня, что выявляется при обработке, а может стать причиной систематического сдвига результатов, который невозможно обнаружить в рамках данного метода измерения.

Как видно из изложенного, измерение представляет собой сложную процедуру, содержание которой не сводится к получению экспериментальных данных. Тем не менее, измерительный эксперимент представляет собой центральный (во времени и по значению) этап измерений.

Измерительный эксперимент естественным образом распадается на однородные части, каждая из которых характеризуется получением одного значения измеряемой величины. Важность этой «элементарной» измерительной процедуры подчеркнута тем, что за ней закреплен отдельный термин «наблюдение при измерении», или просто «наблюдение». Имеются возражения против использования этого термина, однако они представляются необоснованными, поскольку основаны на семантике слова «наблюдение» как общезыкового понятия.

Действительно, семантические возражения можно выдвинуть против многих метрологических терминов, таких, например, как «величина», «абсолютная погрешность», «правильность измерений», «мера», «чувствительность измерительного прибора». Термин «наблюдение» позволяет разделить измерение и его часть, избежать противоречивых словесных конструкций, таких, например, как «многократное измерение». Таким образом, этот термин необходим, хотя, возможно, его выбор лексически не вполне удачен.

Этап обработки данных также можно представить как последовательность определенных действий. Отметим роль этапа обработки в измерении.

При рассмотрении измерения как процесса преобразования измерительной информации его содержание описывается алгоритмом преобразования (измерения). В алгоритме измерения естественно выделить две части, различающиеся по методам и средствам реализации.

Одна часть – преобразование измерительного сигнала, представляющего измеряемую физическую величину, в совокупность экспериментальных данных (данных наблюдений). Эта часть реализуется с помощью средства измерений.

Вторая часть алгоритма – преобразование совокупных данных (априорных и данных наблюдений) в совокупность результата измерения и оценки его погрешности. Эта часть реализуется путем обработки данных, при необходимости – с помощью средств вычислительной техники.

Точность преобразования числовых данных при обработке, как правило, существенно выше точности «аппаратурных» преобразований измерительных сигналов. Поэтому стремление к повышению точности измерений обуславливает тенденцию сужения аппаратурной и расширения вычислительной частей алгоритма.

Противоположную тенденцию вызывает стремление к упрощению процедуры измерения. Такое упрощение чаще всего достигается за счет некоторого сужения области применения средства измерений: уменьшения диапазона измерений, повышения требований к условиям измерений, увеличения требуемой априорной информации об объекте.

Противоречие между указанными тенденциями снимается за счет включения в состав средств измерений вычислительных устройств. При этом характерным является переход от косвенных измерений к прямым. Этот переход сопровождается сокращением (иногда ликвидацией) этапа обработки данных за счет усложнения средства измерений.

Примером служит измерение мощности с помощью ваттметра взамен использования амперметра и вольтметра. Очевидно, что обработка данных в первом случае проще, чем во втором. Использование микропроцессорной техники облегчает этот переход.

Очень важно подчеркнуть, что задача обработки данных подчинена цели измерения и после выбора средства измерений однозначно выходит из измерительной задачи.

Таким образом, задача обработки является вторичной. Она тесно связана с планированием измерения. При планировании могут быть решены некоторые вопросы обработки, связанные с преобразованием априорных данных об объекте и условиях измерения, а также со свойствами средств измерений.

Наиболее важный пример частичного решения задачи обработки при планировании и подготовке измерения представляет априорная оценка погрешности измерения или одной из ее составляющих – инструментальной погрешности. В частности, при подготовке измерения априорно может быть оценена динамическая погрешность средства измерений (СИ).

Часть алгоритма измерения, остающаяся за рамками аппаратурной реализации, выполняется на этапе обработки. Важной особенностью его содер-

жания является то, что он включает в себя корректирующие процедуры. Они направлены на учет отклонений реальных свойств, средств и условий измерения от свойств моделей. Необходимые сведения для коррекции должны быть получены в ходе измерительного эксперимента.

Возможности повышения точности с помощью корректирующих процедур принципиально ограничены достижимой точностью описания структурных элементов измерения их моделями.

При планировании измерения можно предусмотреть действия, позволяющие скорректировать отдельные составляющие погрешности измерения. Так, например, за счет многократных наблюдений может быть скорректирована случайная погрешность средства измерений. Следует подчеркнуть, что неточность постановки (формулировки) измерительной задачи принципиально не может быть скорректирована путем обработки данных.

Корректирующие процедуры могут охватывать как результат, так и оценку его погрешности. Коррекцию результата осуществляют путем введения в него поправки на систематическую погрешность или пересчета (изменения) статистики, служащей в качестве результата при измерениях с многократными наблюдениями. Погрешность корректируют путем уточнения (пересчета, изменения) ее характеристик. Цель коррекции результата – сужение зоны его неопределенности, цель коррекции погрешности – уменьшение степени «размытости» границ указанной зоны.

Примером коррекции результата служит внесение поправки в результат измерения длины металлического стержня с помощью металлической линейки при повышенной температуре. Поправка рассчитывается как произведение разности температурных коэффициентов материалов стержня и линейки на отклонение рабочей температуры от номинальной.

Коррекция погрешности в указанном случае состоит в исключении систематической составляющей, равной расширению линейки при повышении температуры, до уровня рабочей и добавлении составляющей, обусловленной неточностью фиксации рабочей температуры.

Выделение этапов измерения имеет непосредственное практическое значение – способствует своевременному осознанному выполнению всех действий. В свою очередь, это позволяет избежать серьезных методологических ошибок, связанных с переносом проблем одного этапа на другой.

Самой распространенной ошибкой такого рода является уточнение (конкретизация) измерительной задачи, в частности понятия измеряемой величины и результата измерения, после получения экспериментальных данных.

Такая ошибка связана с тем, что формально возможно по одному и тому же набору экспериментальных данных по-разному вычислить результат измерения. Так, например, при прямом измерении с многократными наблюдениями в качестве результата могут быть приняты различные статистики (функционалы от выборки) в зависимости от характеристик случайной погрешности и требуемой точности измерения. Благодаря этому может возник-

нуть представление, что, прежде всего, при измерении необходимо получить данные наблюдений (выборку), а затем определять понятия результата.

Указанный подход принципиально не верен, поскольку выбор метода и средства измерений и осуществление измерительного эксперимента при отсутствии определения результата измерения, строго и обоснованно связанного с понятием измеряемой величины, могут привести к снижению эффективности использования средств измерений.

6.4. Содержание и этапы обработки данных при измерении. Методы инженерной геометрии для обработки комплексных измерений на объект

Обработка данных при измерении представляет собой заключительный этап измерительной процедуры, на котором по экспериментальным данным, полученным на предыдущем этапе, с помощью математических методов получают искомый результат измерения и показателя его погрешности.

Содержание и объем обработки данных могут быть различными в зависимости от категории и вида, объема и свойств экспериментальных данных, наличия априорной информации и требований к точности измерений. Однако всегда наиболее существенным действием является вычисление результата измерения и показателей его погрешности согласно определенному алгоритму; это и является обработкой данных в узком смысле [26].

Алгоритм обработки данных во многих случаях бывает задан. Однако при измерениях высшей точности часто алгоритм заранее не известен. Тогда необходимо предусмотреть выбор рационального алгоритма из нескольких возможных или даже построение нового алгоритма для заданной задачи. Для многих измерений необходимы также предварительный анализ имеющейся информации и введение возможных поправок на систематические погрешности. Кроме того, для точных или аттестационных измерений важен анализ полученных результатов обработки.

Таким образом, в общем случае обработка данных осуществляется в последовательности, которая отражает логику решения измерительной задачи:

- предварительный анализ информации, полученной на предыдущих этапах измерения;
- вычисление и внесение возможных поправок на систематические погрешности;
- формулирование и анализ математической задачи обработки данных;
- построение или уточнение возможных алгоритмов обработки данных, т. е. алгоритмов вычисления результата измерения показателей его погрешности;
- анализ возможных алгоритмов обработки и выбор одного из них на основании известных свойств алгоритмов, априорных данных о погрешностях и предварительного анализа экспериментальных данных;
- проведение вычислений согласно принятому алгоритму; в итоге получают значение измеряемой величины и показатели погрешности измерения;

- анализ содержания полученных результатов;
- запись результата измерения и показателей погрешности в соответствии с установленной формой представления.

Отметим, что отсутствие некоторых из перечисленных пунктов в конкретных задачах означает, что они были выполнены заранее, при разработке методик выполнения измерений либо общих методик обработки данных для определенных групп задач.

Поясним подробнее содержание перечисленных выше пунктов.

1. Сначала выделяют и анализируют всю имеющуюся информацию, которая является исходной для обработки (как априорную, так и полученную на предыдущих этапах измерения), в первую очередь:

а) соотношения между искомой (измеряемой) величиной Q и непосредственно измеряемыми аргументами $X, Y, \dots$:

$$\varphi_i(Q, X_i, Y_i, \dots) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.5)$$

принятые за исходные при постановке измерительной задачи и планировании измерения;

б) метрологические характеристики используемых средств измерения (СИ), в частности, градуированные характеристики (индивидуальные или типовые), показатели погрешности СИ или их нормы, динамические характеристики СИ и т. п., а также сведения о погрешностях градуированных и динамических характеристик;

в) результаты наблюдений $x_i, y_i, i = 1, \dots, m$, т. е. отдельные значения непосредственно измеряемых величин, которые получены при выполнении экспериментальных операций и подлежат дальнейшей обработке для получения конечного результата измерения;

г) результаты дополнительных измерений, которые выполняются с целью контроля или уточнения условий измерения: $u, v, \dots$, а также сведения об их погрешностях;

д) сведения о свойствах алгоритмов обработки данных, пригодных для решения задач данного типа, а также о вычислительных устройствах, имеющих в распоряжении исследователя;

е) априорные оценки погрешностей (до проведения эксперимента), если таковые получены на этапе планирования измерения; если априорная оценка ранее не выполнена, то ее целесообразно выполнить на начальном этапе обработки.

Перечисленные исходные данные условно делятся на три группы в соответствии с тем, на каких этапах измерения они получены.

К первой группе относится априорная информация (до проведения эксперимента), выделенная на подготовительных этапах измерения (пп. а, б). Результаты наблюдений и дополнительных измерений (пп. в, г), т. е. основные данные для обработки, получают на экспериментальном этапе измерения. Наконец, при выборе алгоритмов обработки используют также сведения об алгоритмах (п. д) и априорные оценки погрешностей (п. е).

Кроме выделения и анализа априорной информации, обычно целесообразен предварительный анализ экспериментальных данных. При этом используются простейшие математические методы, быстрые и наглядные, часто – графические, причем не обязательно основанные на статистических моделях.

Напомним, что к точности вычисления поправок предъявляются столь же высокие требования, как и к точности вычисления результатов измерения.

При формулировании математической задачи обработки данных исходными являются соотношения, которые конкретизируются с учетом сведений о погрешностях измерения, а также критериев качества оценок.

Как правило, для решения сформулированной математической задачи имеется несколько возможных алгоритмов обработки данных.

Задание алгоритма в данном случае следует понимать в широком смысле: не только сформулировать в явном виде последовательность алгебраических и логических операций, в итоге выполнения которых по исходным данным будут получены результаты измерения и оценка его погрешности, но и указать основные характеристики алгоритма, которые позволят обосновать его применение для решения конкретной задачи.

Нужно отметить, что для простых и широко распространенных задач возможные алгоритмы обработки хорошо известны и необходимо лишь учитывать их область применения. Для более сложных задач необходимо специально строить алгоритмы, используя один из известных математических методов. Это может быть довольно сложной математической задачей.

Если для решения данной задачи можно использовать несколько алгоритмов, то необходимо выбрать наиболее подходящий из них. На практике алгоритм, как правило, выбирают из соображения простоты и удобства.

Однако при выполнении измерений высокой точности (и при плохо известных условиях измерений) целесообразно выбирать алгоритмы обработки на основе объективных характеристик алгоритмов, математической модели измерения и априорных сведений о погрешностях.

Проведение вычислений согласно выбранному алгоритму является важнейшим этапом обработки данных, который и является обработкой в узком смысле. При этом на первый план выступают чисто вычислительные проблемы, особенно в сложных задачах обработки и при больших массивах данных. Однако при измерениях высокой точности для эффективного выполнения вычислений необходим также большой объем предварительного метрологического анализа. Если пренебречь этим, то значительные затраты на получение экспериментальных данных и проведение вычислений могут быть напрасны.

В настоящее время наблюдается существенная диспропорция в проработке метрологических вопросов, предшествующих вычислениям, и собственно вычислительных проблем. Вычислительные методы и математическое обеспечение разработаны сравнительно хорошо для широкого круга прикладных задач, включая измерительные.

С другой стороны, чисто метрологические вопросы проработаны значительно меньше, хотя они являются решающими; ошибки в их решении нельзя

скорректировать на вычислительном этапе. Поэтому в данной работе сосредоточено внимание на метрологических аспектах задач обработки, что, разумеется, не снижает значимости вычислительных проблем.

После проведения вычислений необходимо проверить «правильность» полученных результатов и прежде всего осуществить:

- проверку результатов на их соответствие исходным требованиям, предъявляемым к результатам измерения, по диапазону, точности и др. (на основе содержательного физического анализа результатов);
- проверку адекватности результатов принятой математической модели измерения (с помощью соответствующих критериев согласия).

Если при проверке некоторые требования оказались не выполненными, то необходимо вернуться к предыдущим этапам процедуры измерения: например, уточнить модель объекта или измерения или скорректировать план измерения, выбрать другие СИ, выполнить дополнительные измерения.

Отметим, что проверка основных (или даже всех) требований может быть включена в состав алгоритма обработки данных; это особенно важно при автоматизированной обработке больших массивов данных. Однако для удобства метрологического анализа такую проверку целесообразно выделить как самостоятельную задачу. Последовательность выполнения обработки данных представлена в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Моделирование структуры объекта

Элементы измерений	Исходные данные при обработке	Действия при обработке данных	Промежуточные результаты обработки
Объект исследований и физическая величина Q	Соотношения между величиной Q и аргументами X, Y	Выделение и анализ исходных данных	Исходная математическая модель. Начальные приближения или область значений Q
Средства измерений (СИ)	Метрологические характеристики средств измерений. Результаты наблюдений x_i, y_i . Результаты дополнительных измерений	Априорное оценивание погрешностей. Вычисление и внесение поправок. Формулирование математической задачи	Априорные оценки погрешностей. Исправленные результаты наблюдений. Уточненная математическая модель
Алгоритм обработки данных	Показатели алгоритма обработки	Выбор рационального алгоритма обработки	Рациональный алгоритм обработки
Вычислительные устройства	Сведения о вычислительных устройствах	Вычисления согласно алгоритму. Анализ результатов обработки. Запись результатов в установленной форме	Результаты измерения и показатели погрешности измерения

Хотя запись результата сравнительно менее трудоемка, чем предыдущие действия, она важна тем, что обеспечивает единообразие представления результатов измерения и возможность сопоставления различных результатов.

Подробная схема, отражающая структуру обработки данных и ее взаимосвязи с элементами измерений, полезна тем, что дает наглядную картину всего измерения в целом, а также иллюстрирует возможности формализованного описания и пути оптимизации отдельных действий и всего измерения. Поэтому такую схему целесообразно использовать при решении задач оптимизации измерений.

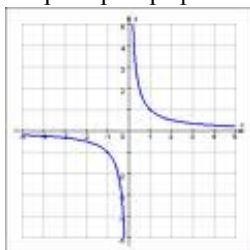
6.4.1. Методы инженерной геометрии для обработки комплексных измерений

После проведения измерений их требуется обработать: выбрать или рассчитать искомое значение интересующей нас величины, оценить погрешность измерения, выяснить, какую функциональную зависимость представляет собой связь между разными измерениями. В этом нам поможет совмещение алгебраических и геометрических методов. Использование геометрического метода начинается с построения **графика, гистограммы, круговой, линейчатой, точечной** либо **другой диаграммы**.

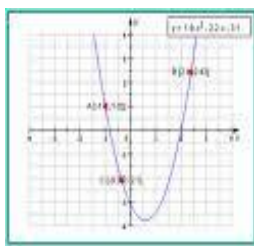
Здесь будем описывать использование самого привычного для нас геометрического построения – **графика**. Из алгебраических методов нас интересуют, в первую очередь, методы таких дисциплин, как теория вероятностей и математическая статистика, т. к. именно они занимаются научным прогнозированием предстоящего и оценкой уже проведенного исследования на основе множества значений искомой величины.

График функции – множество точек, у которых абсциссы являются допустимыми значениями аргумента x , а ординаты – соответствующими значениями функции y . Обычно рассматриваются графики вещественных скалярных функций одной вещественной переменной, которые являются множеством точек плоскости. Другими словами, если мы изучаем зависимость величины y от величины x , то каждому значению x будет соответствовать определенное значение y , и это соответствие будет выражено в точке на графике.

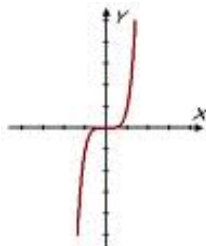
Примеры графиков:



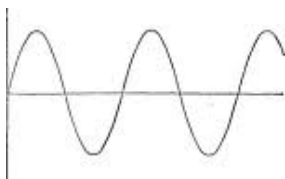
Обратная пропорциональность (гипербола) $y = 1/x$



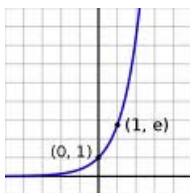
Квадратная функция (парабола) $y = x^2$



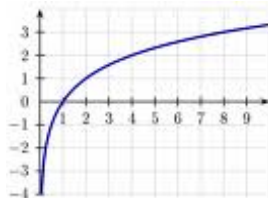
Кубическая функция (кубическая парабола) $y = x^3$



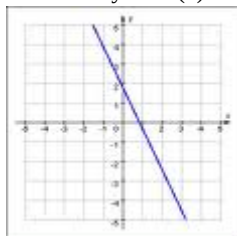
Функция синус (синусоида)
 $y = \sin(x)$



Экспонента $y = e^x$



Логарифм $y = \log_a x$



Самым простым видом графика является график линейной функции, которая задается уравнением вида: $y = kx + b$. График линейной функции представляет прямую линию, располагающуюся относительно координатных осей различным образом, в зависимости от постоянных коэффициентов k и b , которые могут принимать положительные или отрицательные значения или быть равными нулю.

Угловым коэффициентом k имеет в инженерной геометрии особое значение. Он численно равен тангенсу угла (составляющего наименьший поворот от оси Ox к оси Oy) между положительным направлением оси абсцисс и данной прямой линией. Тангенс угла может рассчитываться как отношение противолежащего катета к прилежащему. k всегда равен производной уравнения прямой по x . Когда мы строим линейную зависимость одной переменной величины от другой, коэффициент k является постоянным множителем.

Аппроксимация, или приближение, – научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным, но более простыми. Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны). В геометрии рассматриваются аппроксимации кривых ломаными. Некоторые разделы математики в сущности целиком посвящены аппроксимации, например, теория приближения функций, численные методы анализа.

Наиболее интересный нам вид аппроксимации – интерполяция.

Интерполяция, интерполирование – в вычислительной математике способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений. Многим из тех, кто сталкивается с научными и инженерными расчетами, часто приходится оперировать наборами значений, полученных экспериментальным путем или методом случайной выборки.

Как правило, на основании этих наборов требуется построить функцию, на которую могли бы с высокой точностью попадать другие получаемые значения. Такая задача называется **аппроксимацией кривой**. Интерполяцией называют такую разновидность аппроксимации, при которой кривая построенной функции проходит точно через имеющиеся точки данных.

Существует также близкая к интерполяции задача, которая заключается в аппроксимации какой-либо сложной функции другой, более простой функцией. Если некоторая функция слишком сложна для производительных вычислений, можно попытаться вычислить ее значение в нескольких точках, а по ним построить, т. е. интерполировать, более простую функцию.

Разумеется, использование упрощенной функции не позволяет получить такие же точные результаты, какие давала бы первоначальная функция. Но в некоторых классах задач достигнутый выигрыш в простоте и скорости вычислений может перевесить получаемую погрешность в результатах.



Одним из инструментов интерполяции является линия тренда. **Линия тренда** — элемент аппарата математического анализа, используемый для выявления тенденций изменения зависимой величины на всем протяжении исследования вне зависимости от скачков в одном конкретном измерении. Линия тренда представляет собой геометрическое отображение средних значений анализируемых показателей, полученное

с помощью какой-либо математической функции. Выбор функции для построения линии тренда обычно определяется характером изменения данных.

Статистика — отрасль знаний, в которой излагаются общие вопросы сбора, измерения и анализа массовых статистических (количественных или качественных) данных. Существует несколько видов статистики, но нас интересует только прикладная статистика, к которой и относятся теория вероятностей и математическая статистика.

Прикладная статистика — это наука о том, как обрабатывать данные произвольной природы. Описание вида данных и механизма их порождения — начало любого статистического исследования. Для описания данных применяют как детерминированные, так и вероятностные методы. С помощью детерминированных методов можно проанализировать только те данные, которые имеются в распоряжении исследователя. Перенести полученные результаты на более широкую совокупность, использовать их для предсказания и управления можно лишь на основе вероятностно-статистического моделирования. Поэтому в математическую статистику часто включают лишь методы, опирающиеся на теорию вероятностей.

В простейшей ситуации статистические данные — это значения некоторого признака, свойственного изучаемым объектам. Значения могут быть количественными или представлять собой указание на категорию, к которой можно отнести объект.

Во втором случае говорят о качественном признаке. Поскольку часто результатов измерений много, поэтому для упрощения и ускорения решения задачи составляется выборка из всех результатов измерений, которая отражает общую тенденцию опыта.

Одним элементом выборки, т. е. одним измерением, может быть и функция в целом. Например, описывающая динамику показателя, т. е. его изменение во времени, – электрокардиограмма большого или амплитуда биений вала двигателя. Тогда выборка состоит из набора функций. Элементами выборки могут быть и иные математические объекты. Например, бинарные отношения. В зависимости от регламента экспертного исследования элементами выборки могут быть различные виды бинарных отношений (упорядочения, разбиения, толерантности), множества, нечеткие множества и т. д.

Математическая природа элементов выборки в различных задачах прикладной статистики может быть самой разной. Однако можно выделить два класса статистических данных – **числовые и нечисловые**. Соответственно прикладная статистика разбивается на две части – **числовую статистику и нечисловую**.

Числовые статистические данные – это числа, вектора, функции. Их можно складывать, умножать на коэффициенты. Поэтому в числовой статистике большое значение имеют разнообразные суммы. Математический аппарат анализа сумм случайных элементов выборки – это классические законы больших чисел и центральные предельные теоремы.

В прикладных исследованиях используют статистические данные различных видов. Это связано, в частности, со способами их получения. Например, если испытания некоторых технических устройств продолжаются до определенного момента времени, то получаем так называемые **цензурированные данные**, состоящие из набора чисел – продолжительности работы ряда устройств до отказа, и информации о том, что остальные устройства продолжали работать в момент окончания испытания. Цензурированные данные часто используются при оценке и контроле надежности технических устройств.

Еще одна задача статистики – оценка погрешности измерений. Полная погрешность состоит из частей: погрешности прибора и случайной погрешности. **Погрешность прибора всегда известна и составляет половину его шкалы деления**. А вот для оценки случайной погрешности нам требуются именно статистические методы.

На практике вместо истинного значения используют действительное значение величины, т. е. значение физической величины, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него.

Такое значение обычно вычисляется как среднестатистическое значение, полученное при статистической обработке результатов серии измерений. Это полученное значение не является точным, а лишь наиболее вероятным. Поэтому в измерениях необходимо указывать, какова их точность. Для этого вместе с полученным результатом указывается погрешность измерений. Например, запись $T = 2,8 \pm 0,1$ с означает, что истинное значение величины T лежит в интервале от 2,7 до 2,9 с некоторой оговоренной вероятностью.

6.5. Моделирование как средство отражения материальных объектов

Классификация моделирования

Наиболее известной является классификация по характеру моделей. **Согласно ей различают следующие пять видов моделирования.**

Предметное моделирование, при котором модель воспроизводит геометрические, физические, динамические или функциональные характеристики объекта. Например, модель моста, плотины, модель крыла самолета и т. д.

Аналоговое моделирование, при котором модель и оригинал описываются единым математическим соотношением. Примером могут служить электрические модели, используемые для изучения механических, гидродинамических и акустических явлений.

Знаковое моделирование, при котором в роли моделей выступают схемы, чертежи, формулы. Роль знаковых моделей особенно возросла с расширением масштабов применения ЭВМ при построении знаковых моделей.

Со знаковым тесно связано мысленное моделирование, при котором модели приобретают мысленно наглядный характер. Примером может в данном случае служить модель атома, предложенная в свое время Н. Бором.

Наконец, особым видом моделирования является включение в эксперимент не самого объекта, а его модели, в силу чего последний приобретает характер модельного эксперимента. Этот вид моделирования свидетельствует о том, что нет жесткой грани между методами эмпирического и теоретического познания.

Предметным называется моделирование, в ходе которого исследование ведется на модели, воспроизводящей основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики «оригинала». На таких моделях изучаются процессы, происходящие в оригинале – объекте исследования или разработки (изучение на моделях свойств строительных конструкций, различных механизмов, транспортных средств и т. п.). Если модель и моделируемый объект имеют одну и ту же физическую природу, то говорят о физическом моделировании.

Явление (система, процесс) может исследоваться и путем опытного изучения какого-либо явления иной физической природы, но такого, что оно описывается теми же математическими соотношениями, что и моделируемое явление. Например, механические и электрические колебания описываются одними и теми же дифференциальными уравнениями; поэтому с помощью механических колебаний можно моделировать электрические и наоборот.

Такое **«предметно-математическое»** (аналоговое) моделирование широко применяется для замены изучения одних явлений изучением других, более удобных для лабораторного исследования, в частности потому, что они допускают измерение неизвестных величин. Например, электрическое моделирование позволяет изучать на электрических моделях механические, гидродинамические, акустические и другие явления. Электрическое моделирование лежит в основе аналоговых вычислительных машин (сейчас, правда, практически не использующихся).

При знаковом моделировании моделями служат знаковые образования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы, графы, слова и предложения в некотором алфавите (естественного или искусственного языка).

Важнейшим видом знакового моделирования является **математическое (логико-математическое) моделирование**, осуществляемое средствами языка математики и логики.

Знаковые образования и их элементы всегда рассматриваются вместе с определенными преобразованиями, операциями над ними, которые выполняет человек или машина (преобразования математических, логических, химических формул, преобразования состояний элементов цифровой машины, соответствующих знакам машинного языка и др.). Современная форма «материальной реализации» знакового (прежде всего, математического) моделирования – это моделирование на цифровых электронных вычислительных машинах, универсальных и специализированных. Такие машины – это своего рода «чистые бланки», на которых в принципе можно зафиксировать описание любого процесса (явления) в виде его программы, т. е. закодированной на машинном языке системы правил, следуя которым машина может «воспроизвести» ход моделируемого процесса.

Действия со знаками всегда в той или иной мере связаны с пониманием знаковых образований и их преобразований: формулы, математические уравнения и прочие выражения применяемого при построении модели научного языка определенным образом интерпретируются (истолковываются) в понятиях той предметной области, к которой относится оригинал. Поэтому реальное построение знаковых моделей или их фрагментов может заменяться мысленно-наглядным представлением знаков и операций над ними. Эта разновидность знакового моделирования иногда называется **мысленным моделированием**. Впрочем, этот термин часто применяют для обозначения «интуитивного» моделирования, не использующего никаких четко фиксированных знаковых систем, а протекающего на уровне «модельных представлений». Такое моделирование есть непременное условие любого познавательного процесса на его начальной стадии.

Таким образом, можно прежде всего различать «материальное» (предметное) «идеальное» моделирование; первое можно трактовать как «экспериментальное», второе – как «теоретическое» моделирование, хотя такое противопоставление, конечно, весьма условно не только в силу взаимосвязи и обоюдного влияния этих видов моделирования, но и наличия таких «гибридных» форм, как «мысленный эксперимент».

«Материальное» моделирование подразделяется, как было сказано выше, на физическое и предметно-математическое, а частным случаем последнего является аналоговое моделирование.

Далее, «идеальное» моделирование может происходить как на уровне самых общих, быть может даже не до конца осознанных и фиксированных, «модельных представлений», так и на уровне достаточно детализированных

знаковых систем; в первом случае говорят о мысленном (интуитивном) моделировании, во втором – о знаковом моделировании (важнейший и наиболее распространенный его вид – логико-математическое моделирование). Наконец, моделирование на ЭВМ является «предметно-математическим по форме, знаковым по содержанию».

По характеру той стороны объекта, которая подвергается моделированию, уместно различать моделирование структуры объекта и моделирование его поведения (функционирования протекающих в нем процессов и т. п.). Это различие сугубо относительно для химии или физики, но оно приобретает четкий смысл в науках о жизни, где различие структуры и функции систем живого принадлежит к числу фундаментальных методологических принципов исследования, и в кибернетике, делающей акцент на моделирование функционирования изучаемых систем.

6.6. Постановка задач обработки данных при совместных измерениях и условия применения метода наименьших квадратов

Совместные измерения выполняются с целью определить функциональную зависимость между физическими величинами:

$$Y = f(X_1, \dots, X_k). \quad (6.6)$$

При этом совместно измеряют значения аргументов ($X_{1i}, \dots, X_{ki}$) и соответствующие значения величины Y : $Y_i = f(X_{1i}, \dots, X_{ki})$; по полученным экспериментальным данным ($x_{1i}, \dots, x_{ki}, y_i$) строят функциональную зависимость (6.6). Наиболее важной для практики является зависимость величины Y только от X :

$$Y = f(X). \quad (6.7)$$

Именно этот случай подробно рассматривается далее, однако большинство методов прямо переносится на зависимость от нескольких аргументов.

Возможны два основных варианта реализации совместных измерений величин X и Y : активный и пассивный эксперимент. В активном (или планируемом) эксперименте значения аргумента $x_1, \dots, x_m$ выбирают заранее и последовательно воспроизводят эти значения, выполняя при каждом фиксированном значении аргумента x_i измерение соответствующей величины Y_i . В этом случае X называют контролируемой переменной. Поскольку значения аргумента x_i воспроизводятся с погрешностями δ'_{xi} , истинные значения X_i при этом неизвестны: $X_i = x_i + \delta'_{xi}$. Истинные значения величины Y соответствуют $Y = f(X_i)$, а в результате измерений получают

$$y_i = f(X_i) + \delta_{yi}. \quad (6.8)$$

В пассивном (непланируемом) эксперименте значения аргумента заранее не выбирают, а измеряют те значения X_i , которые заданы каким-либо образом или произвольно выбраны из числа возможных; получают результаты измерений: $x_i = X_i + \delta_{xi}$, где δ_{xi} – погрешности измерения. При тех же значениях X_i измеряют также соответствующие величины Y_i и получают результаты (6.8).

Во многих случаях активный эксперимент является предпочтительным, поскольку за счет рационального выбора значений x_i можно получить более точные оценки зависимостей, а для обработки можно применять более широкий класс оценок. Однако на практике это не всегда можно реализовать.

Искомая зависимость (6.7), которая строится по набору экспериментальных данных (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, может быть подставлена в различном виде: аналитически (формулой), графически или в виде таблицы. Выбор способа представления зависит от функционального вида и сложности зависимости, а также от способа ее дальнейшего использования на практике. Обычно предпочитают задавать ее в аналитическом виде формулой:

$$Y = f(X; a_1, \dots, a_k), \quad (6.9)$$

поскольку такая форма представления наиболее компактна и позволяет решать широкий круг практических задач. Однако в тех случаях, когда зависимость нельзя достаточно аппроксимировать просто функцией или аналитическое построение оказывается слишком трудоемким, приходится задавать ее с помощью графика и таблицы.

Способ задания зависимости определяет обработку данных при ее построении. Если зависимость задается таблицей (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, то при ее составлении лишь выполняют обработку результатов наблюдений x_{ij} , y_{ij} в каждой точке отдельно согласно обычным правилам обработки данных при прямых или косвенных измерениях. Если зависимость задается аналитически, то в дополнение к этому необходима обработка всего набора данных в целом. При этом задают определенный функциональный вид зависимости и вычисляют оценки ее параметров.

Для графического способа задания зависимости возможны два варианта, близкие к одному из приведенных выше случаев. Если график строится поточечно (без сглаживания), то выполняется лишь обработка данных в каждой из точек; в промежутках между ними зависимость определяется, например, путем интерполяции. Если график строят со сглаживанием, ориентируясь на определенный функциональный вид зависимости, то обработка выполняется, как и при аналитическом представлении.

Далее рассматривается преимущественно построение зависимостей в аналитическом виде, однако для линейных зависимостей приводятся также простые графические методы. На практике наиболее распространены линейные зависимости, которые являются наиболее простой и удобной аппроксимацией (по крайней мере, на определенных интервалах изменения аргумента).

При построении зависимости в аналитическом виде следует придерживаться следующего порядка действий.

1. Определить функциональный вид зависимости. Вид зависимости может быть приближенно известен либо из физических закономерностей, описывающих данное явление, либо на основе предыдущего опыта и предварительного анализа данных. Иногда он бывает задан заранее как желательный или требуемый.

2. Выбрать метод построения зависимости по экспериментальным данным. При этом следует учитывать выбранный вид зависимости и априорные сведения о погрешностях измерения δ_{x_i} и δ_{y_i} .

3. Вычислить оценки параметров зависимости выбранного вида.

4. Оценить погрешности построенной зависимости. При этом используются известные характеристики случайных и систематических погрешностей измерения x_i и y_i .

5. Проверить правильность выбора вида зависимости либо оценить степень отклонения истинной зависимости от выбранного вида. В некоторых случаях необходимо также проверить согласие построенной зависимости с некоторой заданной или ранее построенной. Например, **при проверке** средств измерений (СИ) сравнивают построенную градуированную характеристику с номинальной или ранее построенной. Если расхождение двух зависимостей допустимо, то средство измерений считают годным, в противном случае его бракуют.

Задачи построения функциональных зависимостей по экспериментальным данным часто встречаются в различных прикладных областях; в современной математике разработаны многочисленные методы решения таких задач, прежде всего – статистические методы, основанные на вероятностных моделях для погрешностей измерений. Наиболее распространенным из них является **классический метод наименьших квадратов (МНК)**.

В этом методе оценки параметров зависимости определяют из условия, что сумма квадратов отклонений расчетных значений от экспериментальных значений y_i минимальна. Применительно к зависимости вида

$$Y = \sum_{j=1}^k a_j \varphi_j(X).$$

Это означает:

$$Q = \sum_{i=1}^k [y_i - \sum_{j=1}^k a_j \varphi_j(X_i)]^2. \quad (6.10)$$

Условие минимизации Q приводит к системе уравнений:

$$\frac{dQ}{da_l} = -2 \sum_{i=1}^k [y_i - \sum_{j=1}^k a_j \varphi_j(X_i)] \varphi_l(X_i) = 0, \quad (6.11)$$

из которой получается линейная система относительно коэффициентов a_j :

$$\sum_{j=1}^k a_j b_{jl} = g_l, \quad l = 1, \dots, k, \quad (6.12)$$

где

$$b_{jl} = \sum_{i=1}^k \varphi_i(X_i) \varphi_l(X_i); \quad g_l = \sum_{i=1}^k y_i \varphi_l(X_i). \quad (6.13)$$

В результате решения этой системы и получают оценки МНК.

При обосновании метода наименьших квадратов в математической статистике предполагается, что результаты измерений (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$ удовлетворяют следующим условиям:

1. значения аргументов X_i известны точно;

2. результаты измерений y_i содержат лишь случайные погрешности, которые независимы, имеют средние 0 и одинаковые дисперсии δ^2 ;

3. погрешности y_i имеют нормальное распределение.

При этих условиях МНК дает несмещенные оценки коэффициентов зависимости, имеющие минимальные дисперсии. При выполнении только первого и второго условий МНК-оценки несмещены и имеют минимальные дисперсии среди линейных оценок коэффициентов.

Однако на практике перечисленные условия выполняются далеко не всегда; вместо них часто встречаются следующие:

а) погрешности измерения аргументов X_i существенны;

б) погрешности измерения величин y_i содержат систематические составляющие;

в) погрешности измерения y_i могут быть зависимы или иметь различные дисперсии;

г) распределения случайных погрешностей измерения y_i отличны от нормальных.

Рассмотрим возможности применения МНК при этих условиях.

а – наличие погрешностей измерения аргументов X_i приводит к появлению существенных смещений оценок параметров зависимости, т. е. оценки не являются несмещенными и состоятельными. Однако для планируемого эксперимента при построении линейной зависимости все же можно применять МНК с соответствующими уточнениями при оценке погрешностей. Для непланируемого эксперимента необходимо применять методы **конфлюентного анализа**, в которых учитывается наличие погрешностей X_i . Конфлюентные методы весьма разнообразны. Некоторые из них очень близки к МНК и опираются на предположение о нормальном распределении погрешностей, другие существенно отличаются от МНК.

б – наличие систематических погрешностей измерений y_i приводит к тому, что МНК не является строго оптимальным, однако это не препятствует к его применению. Оценка систематических погрешностей полученных результатов достаточно проста и обычно не вызывает затруднений.

в – наличие зависимостей или неоднородность дисперсий также не является препятствием для использования МНК; если корреляционная матрица погрешностей известна (хотя бы приближенно), то можно использовать обобщенный МНК с весами, который дает оптимальные оценки. Однако часто она не известна, и тогда используют обычный МНК, который дает смещенные, но не самые эффективные оценки.

г – если распределения случайных погрешностей y_i резко отличаются от нормальных, то формальное применение МНК может привести к значительным погрешностям зависимостей; к этому же приводит и наличие грубых погрешностей (промахов) в экспериментальных данных. Поэтому следует при использовании МНК проверять гипотезу о нормальном распределении погрешностей либо использовать один из робастных методов, которые мало-

чувствительны к указанным отклонениям. Последний путь часто предпочтительнее, тем более, что простейший робастный (устойчивый) метод может заключаться в применении МНК и отбрасывании резко выделяющихся точек.

Из перечисленных нарушений условий применения МНК наиболее существенны изложенные в пп. а и г; они приводят к необходимости использования двух групп параметров – конфлюентных и робастных (или устойчивых), которые в соответствующих случаях являются корректными. Такие методы изложены далее, рассматривается применение МНК, когда выполнены условия пп. 1 и 3, но может нарушаться условие п. 2, т. е. при наличии систематических погрешностей y_i и возможной их неравноточности.

Построение линейных зависимостей методом наименьших квадратов.

Рассмотрим наиболее важный для практики случай построения линейной функции

$$Y = a + bX. \quad (6.14)$$

Предполагается, что значения X_i точно известны; при выполнении изменений Y_i целесообразно выделить два основных варианта:

- равноточные (однократные и многократные) наблюдения:

$$y_i = Y_i + \delta_{ij}, j = 1, \dots, n_i, \quad (6.15)$$

неравноточные измерения y_i с весами ω_i .

Формально второй случай является более общим, т. к. равноточным наблюдениям соответствуют веса $\omega_i = n_i$, поэтому формулы приводятся преимущественно для второго случая.

Веса результатов ω_i иногда заранее известны либо известна зависимость дисперсии погрешности y_i от аргумента: $\delta_i^2 = \delta^2 h(X_i)$, и тогда $\omega_i = 1 / h(X_i)$. Если таких сведений нет, то веса оценивают по многократным наблюдениям y_{ij} в точках X_i :

$$\omega_i = n_i / S_i^2, S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2.$$

При наличии условно постоянных систематических погрешностей их также следует учитывать при назначении весов

$$\omega_i = \left[\frac{S_i^2}{n_i} + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^l \theta_{ij}^2 \right]^{-1}.$$

Отметим, что использовать веса целесообразно лишь в том случае, когда они существенно различаются и их введение приводит к заметному повышению точности оценок параметров.

Приведем основные расчетные формулы, а также оценки погрешностей для указанных случаев. При построении МНК-оценок искомую линейную функцию удобнее представить в виде

$$Y = a_0 + b(X - \bar{X}), \quad (6.16)$$

где $\bar{X}$ – среднее значение X_i , которое вычисляется по формулам:

$$\underline{X} = \sum_1^m n_i X_i / N, \quad N = \sum_1^m n_i,$$

$$\underline{X} = \sum_1^m \varphi_i X_i / \sum_1^m \omega_i.$$

МНК-оценки коэффициентов линейной функции имеют вид:

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_1^m n_i y_i', \quad (6.17)$$

$$b = \sum_1^m n_i y_i' (X_i - X') / \sum_1^m n_i (X_i - X')^2,$$

$$a_0 = \sum_1^m \omega_i y_i / \sum_1^m \omega_i,$$

$$b = \sum_1^m \omega_i y_i (X_i - X') / \sum_1^m \omega_i (X_i - X')^2.$$

Эти оценки не смещены и не коррелированы между собой. Дисперсии случайных погрешностей коэффициентов имеют вид:

$$D_{a_0} = \frac{\delta^2}{N}; \quad D_b = \frac{\delta^2}{\sum_1^m n_i (X_i - X')^2}, \quad (6.18)$$

$$D_{a_0} = \frac{\delta^2}{\sum_1^m \omega_i}; \quad D_b = \frac{\delta^2}{\sum_1^m \omega_i (X_i - X')^2}.$$

Расчетное значение в точке X : $\hat{Y} = a_0 + Db(X - X')^2$, является несмещенной оценкой истинного значения функции $Y = \alpha + \beta X$, а дисперсия его случайной погрешности:

$$D\hat{Y}(X) = Da_0 + Db(X - X')^2.$$

Для сопоставления приведенных дисперсий с другими характеристиками погрешностей удобнее записать их в виде:

$$D_{a_0} = \delta^2 V_a^2; \quad D_{b_0} = \delta^2 V_b^2; \quad D\hat{Y}(X) = \delta^2 V^2(X),$$

где $V^2(X) = V_a^2 + (X_i - X')^2 V_b^2$,

$$V_a^2 = \frac{1}{\sum_1^m \omega_i}; \quad V_b^2 = \frac{1}{\sum_1^m \omega_i (X_i - X')^2}.$$

Для практической оценки среднего квадратичного отклонения (СКО) погрешностей и построения доверительных границ необходимо оценить СКО результатов наблюдений δ . При равноточных наблюдениях это можно сделать либо на основе общей суммы квадратов отклонений:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \hat{Y}_i)^2}, \quad (6.19)$$

либо когда все $n_i > 1$ – по отклонениям внутри групп:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - y'_i)^2}. \quad (6.20)$$

При известных весах ω_i , когда $\delta_i^2 = \delta^2 / \omega_i$, параметр δ также можно оценить по отклонениям:

$$S = \sqrt{\frac{1}{m-2} \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{Y}_i)^2 \omega_i}. \quad (6.21)$$

С учетом этих оценок получаются оценки СКО случайных погрешностей коэффициентов и расчетных значений:

$$S(a_0)=SV_a, S(b)=SV_b, S(X)=SV(X).$$

Для нормальных распределений случайных погрешностей наблюдений доверительные интервалы для коэффициентов и расчетных значений вычисляются по формулам:

$$\Psi(a_0)=t_p SV_a, \Psi(b)=t_p SV_b, \Psi(X)=t_p SV(X), \quad (6.22)$$

где t_p – коэффициент Стьюдента с числом степеней свободы f , соответствующим используемой оценке S .

В общем случае погрешности расчетных значений имеют вид

$$\delta(X) = \sum_1^m \omega_i [V_a^2 + (X_i - X')V_b^2] \delta_{yi}. \quad (6.23)$$

Точно так же выглядят и выражения для случайной и систематической погрешностей (при замене δ_{yi} на ξ_{yi} или $\tilde{v}_{yi}$). На их основе можно получить оценки для общих и систематических погрешностей результатов. При этом следует рассмотреть два варианта в соответствии с известными характеристиками погрешностей исходных данных x_i и y_i : известны общие границы Δy погрешностей δ_{yi} ; известны границы систематических погрешностей θ_y и оценка СКО случайных погрешностей S_y .

Если известны лишь границы погрешностей Δy , то получают границы погрешностей расчетных значений:

$$\Delta(X) = \Delta_y R(X), \quad (6.24)$$

где

$$R(X) = 1 + |X_i - X'| \sum_1^m \omega_i |X_i - X'| V_b^2.$$

Приведенные «арифметические» границы обычно оказываются завышенными, однако уменьшить их можно только при наличии дополнительной информации относительно поведения погрешностей δ_{yi} и $\tilde{v}_{yi}$.

В практике измерений наиболее распространенным является случай, когда погрешности δ_{yi} изменяются нерегулярным образом, оставаясь в заданных границах $\pm \Delta y$. Это условие кажется довольно естественным, если вспомнить, что погрешности δ_{yi} соответствуют различным точкам диапазона измерений. В этом случае получаются приближенные доверительные границы, аналогичные (6.22):

$$\Delta(X) = z_p \Delta_y V(X) / \sqrt{3}. \quad (6.25)$$

Если заданы характеристики случайных и систематических погрешностей ξ_{yi} и $\tilde{v}_{yi}$, то отдельно оценивают СКО и границы случайных и систематических погрешностей, а затем – общие границы погрешностей результатов.

Выражения для дисперсий случайных погрешностей коэффициентов и расчетных значений приведены выше. При оценке доверительных границ

в выражении (6.22) принимается число степеней свободы f , которое равно $N - 2$, если используется оценка СКО вида (6.19); $N - m$, если используется оценка (6.20); $m - 2$, если используется формула (6.21); если СКО оценивается по n дополнительным наблюдениям, то $f = n - 1$.

Систематические погрешности $\tilde{v}(X)$, аналогично расчету по формуле (6.24), можно оценить границами $\theta(X) = \theta_y R(X)$.

Если дополнительно известно, что систематические погрешности $\tilde{v}_{yi}$ нерегулярно изменяются в заданных границах $\pm\theta_y$, то приближенные доверительные границы систематических погрешностей вычисляются по формуле, аналогичной (6.25):

$$\theta(X) = z_p \theta_y V(X) / \sqrt{3}.$$

После вычисления доверительных границ для случайных и систематических погрешностей приближенные доверительные границы для суммарных погрешностей вычисляются согласно общей формуле:

$$\Delta(X) = K[\Psi(X) + \theta(X)],$$

где K принимается равным 0,8 при $P = 0,95$ и 0,85 при $P = 0,99$.

Наиболее важными частными случаями равноточных наблюдений являются наблюдения равной кратности ($n_i = n$) и однократные ($n_i = 1$). Подчеркнем, что при наличии систематических погрешностей типичными и наиболее предпочтительными оказываются именно наблюдения равной кратности. Поэтому при планировании измерений следует стремиться принимать $n_i = n$ во всех точках.

В заключение рассмотрим два частных случая.

При планировании измерений с равноточными наблюдениями одинаковой кратности целесообразно выбирать значения X_i равномерно по диапазону измерений: $X_{i+1} = X_i + h$. Тогда оценка принимает особенно простой вид:

$$b = \frac{6}{m(m-1)h} \left[\frac{2}{m+1} \sum_1^m i y'_i - \sum_1^m y'_i \right]. \quad (6.26)$$

Соответственно упрощаются и оценки СКО случайных погрешностей:

$$S_b = \frac{2\delta\sqrt{3}}{h\sqrt{mn(m^2-1)}}, \quad (6.27)$$

$$S(X) = \frac{\delta}{\sqrt{mn}} \sqrt{1 + \frac{(X_i - X')^2 + 12}{h^2(m^2-1)}}. \quad (6.28)$$

Иногда из физических соображений бывает известно, что искомая прямая проходит через начало координат: $Y = bX$. Тогда коэффициент b оценивается по более простой формуле:

$$b = \sum_1^m y_i \omega_i X_i / - \sum_1^m \omega_i X_i^2. \quad (6.29)$$

Соответственно упрощаются также оценки погрешностей:

$$S_b = \frac{\delta}{\sqrt{\sum_1^m \omega_i X_i^2}}. \quad (6.30)$$

Отметим существенное отличие данного частного случая от прямой общего вида при наличии постоянной систематической погрешности. При построении линейной функции общего вида (6.14) такая погрешность не влияет на коэффициент b , а лишь приводит к сдвигу: $\delta(a_0) = \bar{v}_0$. При построении прямой $Y = bX$ постоянная составляющая существенно влияет на коэффициент b ; границы погрешностей коэффициента b и расчетного значения вычисляют по формулам:

$$\theta(b) = \frac{\theta_0 |\sum_1^m X_i|}{\sum_1^m X_i^2}; \quad \theta(X) = |X| \theta(b). \quad (6.31)$$

В остальных случаях сохраняют силу формулы для оценки погрешностей, приведенные для линейной зависимости общего вида.

Важной практической задачей является сравнение зависимости, построенной МНК, с другой зависимостью, которая может быть точно задана (получена теоретически) или же построена по другой группе экспериментальных данных.

Рассмотрим сравнение эмпирической функции $Y = f(X)$ и теоретической $Y = f_0(X)$. Критерий, основанный на дисперсионном отношении, применим при произвольном функциональном виде f и f_0 , если погрешности измерений δ_{y_i} приближенно нормально распределены. Вычисляют взвешенные суммы квадратов отклонений экспериментальных значений y_i от построенной функции

$$Q = \sum_1^m \omega_i (y_i - f_0(X_i))^2 \quad (6.32)$$

и от заданной функции

$$Q_0 = \sum_1^m \omega_i (y_i - f_0(X_i))^2, \quad (6.33)$$

где ω_i – веса, соответствующие результатам y_i .

Вычисляют дисперсионное отношение:

$$v^2 = \frac{m-k}{k} \frac{Q_0 - Q}{Q}, \quad (6.34)$$

где k – число параметров построенной функции, и сравнивают его с критическим значением $F_q(k, m-k)$, полученным для выбранного уровня значимости q по таблицам распределения Фишера с k и $m - k$ степенями свободы. Если $v^2 < F_q(k, m-k)$, то построенная функция удовлетворительно аппроксимирует заданную $f_0(X)$.

В частности, если построена линейная зависимость $Y = f(X)$, то $k = 2$.

Если построенная экспериментально и заданная функции имеют один и тот же функциональный вид (линейный относительно коэффициентов)

$$f(X) = \sum_1^k a_j \varphi_j(X); \quad f_0(X) = \sum_1^k a_{j0} \varphi_j(X), \quad (6.35)$$

то для их сравнения можно использовать коэффициенты a_j . Проверяют k гипотез H_j : можно ли коэффициенты a_j считать оценками a_{j0} , $j = 1, \dots, k$; для этого используют доверительные границы, построенные для погрешностей коэффициентов a_j .

Точные доверительные границы построены для случая, когда погрешности измерения δ_{yi} являются случайными и имеют нормальные распределения. Однако можно построить приближенные доверительные границы и с учетом систематических погрешностей. Соответствующие границы приведены выше для линейных функций.

Пусть q – выбранный уровень значимости при проверке гипотезы; обычно $q = 0,05$. Если $\Delta(a_j)$ – доверительные границы погрешностей коэффициентов a_j при доверительной вероятности $P = 1 - q$ (с учетом систематических погрешностей), то проверяют условия $|a_j - a_{j0}| < \Delta(a_j)$, $j = 1, \dots, k$. Если все эти условия выполнены, то построенную функцию f можно считать экспериментально полученным приближением для заданной функции f_0 .

Рассмотрим подробнее сравнение двух линейных функций, построенных МНК по двум независимым группам экспериментальных данных:

$$(X_i, y_{ij}), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n_i; Y = a + bX,$$

$$(X'_i, y'_{ij}), i = 1, \dots, m', j = 1, \dots, n'_i; Y = a_1 + b_1X.$$

Проверяется гипотеза: можно ли истинную функцию считать одной и той же, т. е. объясняется ли различие между построенными функциями полностью погрешностями измерений.

Предположим, что измерения неравноточны, но известна весовая функция h (одна и та же для двух групп), т. е. дисперсии имеют вид:

$$\delta_i^2 = \delta^2 h(X_i); \quad \delta_{1i}^2 = \delta_1^2 h(X'_i).$$

В этом случае сначала проверяют, правильно ли задана функция $h(X)$; для этого критерий Бартлетта применяют сначала для проверки однородности m групп отклонений:

$$(y_{ij} - \hat{Y}_i) / \sqrt{h(X_i)}, \quad j = 1, \dots, n_i.$$

А затем m' групп:

$$(y'_{ij} - \hat{Y}_{1i}) / \sqrt{h(X'_i)}, \quad j = 1, \dots, n'_i.$$

Далее проверяют равенство дисперсий с помощью дисперсионного отношения

$$v^2 = S^2 / S_1^2.$$

Критическое значение $F_q(N-2, N'-2)$ находят по таблицам распределения Фишера с $N-2$ и $N'-2$ степенями свободы; при $v^2 < F_q(N-2, N'-2)$ считают различие дисперсий незначимым.

Если оценки дисперсий различаются незначимо, то вычисляют объединенную оценку дисперсии

$$S_0^2 = \frac{1}{N + N' - 4} [(N-2)S^2 + (N'-2)S_1^2].$$

Гипотезу о равенстве коэффициентов b и b_1 принимают, если

$$|b - b_1| < t_{N+N'-4} S_0 \sqrt{\sum x_i^{-2} + \sum x_{1i}^{-2}}, \quad (6.36)$$

где

$$\sum_x^2 = \sum n_i (X_i - X')^2, \quad \sum_{1x'}^2 = \sum n'_i (X'_i - X'')^2.$$

Если это условие выполнено, то проверяют две оценки коэффициентов:

$$b_0 = (NS^2b + N'S_1^2b_1) / (\Sigma_x^2 + \Sigma_{x1}^2),$$

$$b' = (y' - y'') / (X' - X'').$$

Если выполнено условие

$$|b - b_0| < tS_0 \sqrt{1/(\Sigma_x^2 + \Sigma_{x1}^2) + (N+N')/NN'(X'-X'')^2}, \quad (6.37)$$

то оценки a и a_1 также различаются незначимо.

Таким образом, если выполнены условия (6.36 и 6.37), то две полученные функции можно считать приближениями для одной и той же истинной линейной функции.

Метод является точным при случайных погрешностях с нормальным распределением, однако его можно использовать как приближенный и в общем случае, как при наличии систематических погрешностей. При этом оценки дисперсий S^2 и S_1^2 вычисляют с учетом систематических погрешностей, а вместо коэффициентов Стьюдента t можно использовать z_p , соответствующие нормальному распределению.

Если оценки дисперсий S^2 и S_1^2 различаются значимо, то можно использовать следующий приближенный метод сравнения функций. Обозначим $u = S^2/\Sigma_x^2$ и $u_1 = S_1^2/\Sigma_{x1}^2$. Гипотезу равенства b и b_1 принимают, если

$$|b - b_1| < t\sqrt{u + u_1},$$

где t – квантиль распределения Стьюдента с $r = \max(N-2, N'-2)$ степенями свободы. Если условие выполнено, то вычисляют оценки

$$b_0 = (bu_1 + b_1u) / (u + u_1); \quad b' = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Если выполнено условие

$$|b_0 - b'| < \frac{z_p \sqrt{\left(\frac{S^2}{N} + \frac{S_1^2}{N'}\right)}}{(x' - x'')^2} + \frac{uu_1}{u + u_1},$$

то коэффициенты a и a_1 также различаются. Следовательно, две функции являются приближениями одной и той же прямой.

Отметим, что при равнооточных наблюдениях ($\omega_i = 1$) проверка равенства функций упрощается, поскольку все оценки проще и не надо применять критерий Бартлетта для сравнения дисперсий групп в точках. Сравнение упрощается также, когда число наблюдений для одной фракции (или двух) велико; тогда для приближенного сравнения можно использовать дисперсионное отношение (6.26).

Дисперсионное отношение при многократных наблюдениях можно использовать также для проверки правильности выбора функционального вида

построенной зависимости. При этом сравнивают оценки дисперсий, построенные по отклонениям результатов измерения $y_i' = \sum y_{ij}/n_i$ от расчетных значений $\hat{Y}_i$ и по рассеиванию внутри групп наблюдений. Вычисляют дисперсионное отношение:

$$v^2 = \frac{N-m \sum_1^m n_i (y_i' - \hat{Y}_i)^2 / h(X_i)}{m-k \sum_1^m n_i (y_{ij} - y_i')^2 / h(X_i)},$$

где k – число оцениваемых параметров функции: $Dy_{ij} = \delta^2 h(X_i)$.

Вид зависимости выбран правильно, если вычисленное значение $v^2 < F_q(m-k, N-m)$, где F_q – квантиль распределения Фишера с $m-k$ и $N-m$ степенями свободы. Если же $v^2 > F_q(m-k, N-m)$, то гипотезу отвергают и пытаются аппроксимировать данные функции другого вида.

В измерительной практике построение функциональных зависимостей наиболее распространено при индивидуальной градуировке средств измерений. Измерительному прибору или преобразователю соответствует функциональная зависимость $Y = f_n(X)$ между входной X и выходной Y величинами. Определяя экспериментально указанную зависимость, получают градуированную характеристику $Y = f(X)$ исследуемого (поверяемого) средства измерений. Наиболее распространенными на практике являются линейные градуированные характеристики.

Пример 1. Необходимо построить и исследовать линейную градуированную характеристику вольтметра переменного тока.

Рассмотрим экспериментальные данные, полученные при исследовании вольтметра переменного тока.

На входе устанавливалось напряжение переменного тока с погрешностью не более $\pm 0,002\%$; $x_i = i \times 0,2$ В, $i = 1, \dots, 5$; напряжение постоянного тока на выходе измерялось с погрешностью, характеризуемой пределом $0,005\%$. Измерения выполнялись с многократными наблюдениями; полученные результаты измерений y_i' , а также число наблюдений n_i и оценка дисперсий погрешностей $S_i'^2$ в точке X_i приведены в табл. 6.2.

В зависимости от целей исследования и априорной информации о зависимости $Y = f(X)$ могут быть поставлены различные задачи обработки; их решение далее иллюстрируется на приведенных данных.

Пусть требуется построить линейную функцию общего вида (6.14). Величина X в данном случае является контролируемой переменной (на входе устанавливается заранее заданное значение X_i), поэтому для построения линейной зависимости можно использовать МНК. Вычисление оценок a и b по МНК также приведено в табл. 6.2; веса принимались равными $n_i / S_i'^2$. Получены оценки:

$$b = \frac{\sum \omega_i y_i' (X_i - \bar{X}')}{\sum \omega_i (X_i - \bar{X}')^2} = \frac{2,86424}{2,86411} = 1,00004;$$

$$a = y' - b\bar{X}' = 0,76443 - 1,00004 * 0,76440 = 0.$$

В итоге получена функция $Y = 1,00004X$. Расчетные значения $\hat{Y}_i = bX_i$ сопоставляются с данными y_i в табл. 6.3.

Пусть заранее известно, что прямая проходит через начало координат: $Y = bX$; требуется найти коэффициент b , который оценивается по формуле

$$b = \sum \omega_i y'_i X_i / \sum \omega_i X_i^2,$$

при этом получается то же значение: $b = 1,00004$.

Таблица 6.2

Результаты вычисления оценок а и b по МНК

i	x_i	n_i	$S_i^2 \times 10^{10}$	y'_i	n_i/S_i^2	$\omega_i x_i$	$\omega_i y'_i$	$\omega_i (x_i - \bar{x})^2$	$\omega_i y_i (x_i - \bar{x})^2$
1	0,2	25	8,55	0,199946	2,924	0,584795	0,584637	0,931421	-0,329968
2	0,4	25	4,46	0,400023	5,605	2,242152	2,242282	0,744319	-0,817084
3	0,6	25	4,31	0,600071	5,800	3,480273	3,480690	0,156769	-0,572221
4	0,8	25	2,82	0,800062	8,865	7,091198	7,092748	0,011239	0,252508
5	1,0	50	2,72	1,000024	18,382	18,382352	18,382793	1,020369	4,331004
Сум- мы сред- ние	—	—	—	—	41,577	31,781775	31,783149	2,864109	2,864239
						0,76440	0,76443	—	—

Таблица 6.3

Сравнительные данные по вычислению оценок а и b по МНК

i	x_i	y_i	$\hat{Y}_i$	$z_i \times 10^5$	$\omega_i z_i \times 10^{10}$	Y_{j0}	$u_i \times 10^5$	$\omega_i u_i \times 10^{10}$
1	0,2	0,199946	0,200008	-6,2	112	0,2	-5,4	85
2	0,4	0,400023	0,400017	0,6	2	0,4	2,3	29
3	0,6	0,600071	0,600026	4,5	117	0,6	7,1	292
4	0,8	0,800062	0,800035	2,7	64	0,8	6,2	340
5	1,0	1,000024	1,000044	-0,2	73	1,0	2,4	106
Сум- мы		—	—		368	—		852

Для данного средства измерений желательно иметь коэффициент (номинальный) преобразования $b_0 = 1$, т. е. $Y = X$.

Проверим, значимо ли отличается от номинальной построенная линейная функция.

Для этого убедимся в том, что коэффициенты b и b_0 различаются незначимо. Поскольку из предварительных исследований известно, что погрешности измерений имеют распределение, близкое к нормальному, то для этого проверяют условие:

$$|b - b_0| < \frac{tS}{\sqrt{\sum \omega_i (X_i - \bar{X}')^2}} = \Psi(b),$$

где t – квантиль распределения Стьюдента с $m - 2$ степенями свободы; оценка:

$$S = \sqrt{\frac{1}{m - 2} \sum \omega_i (y'_i - \hat{Y}_i)^2}.$$

Вычисление отклонений $z_i = y'_i - \hat{Y}_i$ и соответствующих сумм приведено в табл. 6.3 в результате получено:

$$S^2 = 123 * 10 - 10; \sum \omega_i (X_i - X')^2 = 2,86;$$

$$S / \sqrt{\sum \omega_i (X_i - X')^2} = 6,56 * 10^{-5}.$$

Принимая уровень значимости $q = 0,05$, получаем $t = 3,18$. Поскольку $|b - b_0| = 4 * 10^{-5} < \Psi(b) = 21 * 10^{-5}$, гипотеза о согласии прямых принимается.

Согласие экспериментальных данных с номинальной функцией $Y = f_0(X)$ можно проверить и без предварительного предположения о линейности истинной зависимости. Для этого используются отклонения u_i от расчетных значений $\hat{Y}_i = bX_i$ и $\hat{Y}_{i0} = b_0X_{i0}$, полученных согласно построенной и номинальной функции:

$$z_i = y'_i - \hat{Y}_i, u_i = y'_i - \hat{Y}_{i0}.$$

Такие разности, а также суммы их квадратов приведены в табл. 6.3, в результате дисперсионное отношение:

$$v^2 = \frac{\sum \omega_i u_i^2 - \sum \omega_i z_i^2}{\sum \omega_i z_i^2} \frac{m-2}{2} = \frac{852 - 368}{368} \frac{3}{2} = 1,97.$$

Критическое значение определяется по таблицам распределения Фишера с 2 и 3 степенями свободы; при уровне значимости 0,05 получаем $F_{0,05}(2,3) = 9,55$. Поскольку вычисленное значение $v^2 = 1,97 < 9,55$, то гипотеза о согласии данных с номинальной функцией принимается.

Глава 7. Проведение экспериментальных исследований

С момента возникновения философии человек размышляет о возможностях и границах познания. Философские размышления велись главным образом либо в русле эксперимента, либо в русле рационализма, который не учитывал практики как критерия истины, как основы, отправной точки и цели познания.

Развитие общества в значительной степени определяется уровнем научных технологий, многочисленные направления которых основаны на достижениях соответствующих отраслей естествознания. Современное естествознание обладает большим многообразием методов исследований, среди которых эксперимент – наиболее эффективное и действенное средство познания.

7.1. Эксперимент

Для эксперимента сегодняшнего дня характерны три основные особенности.

Возрастание роли теоретической базы эксперимента. Во многих случаях эксперименту предшествует теоретическая работа, концентрирующая громадный труд большого числа теоретиков и экспериментаторов.

Сложность технического оснащения эксперимента. Техника эксперимента, как правило, насыщена многофункциональной электронной аппаратурой, прецизионными механическими устройствами, высокочувствительными приборами, высокоточными преобразователями и т. п. Большинство экспериментальных установок представляет собой полностью замкнутую систему автоматического регулирования, в которой технические средства обеспечивают заданные условия эксперимента с вполне определенной точностью, регистрируют промежуточные экспериментальные результаты и производят последовательную их обработку.

Масштабность эксперимента. Некоторые экспериментальные установки напоминают сложные объекты крупных масштабов. Строительство и эксплуатация таких объектов стоит больших финансовых затрат. Кроме того, экспериментальные объекты могут оказать активное действие на окружающую среду.

Эксперимент базируется на практическом воздействии субъекта на исследуемый объект и часто включает операции наблюдения, приводящие не только к качественным, описательным результатам, но и к количественным, требующим дальнейшей математической обработки. С этой точки зрения эксперимент – разновидность практического действия, предпринимаемого с целью получения знания. В процессе экспериментального естественнонаучного исследования в контролируемых и управляемых условиях изучаются многообразные свойства и явления природы.

В естественнонаучном эксперименте часто прибегают к **физическому моделированию** как исследуемого объекта, так и различных управляемых условий, в которых находится объект. Для этого создаются специальные установки

и устройства: барокамеры, термостаты, магнитные ловушки, ускорители и т. п. С их помощью создаются сверхнизкие и сверхвысокие температуры и давления, вакуум и другие условия. В некоторых случаях моделирование исследуемого объекта – единственное средство реализации эксперимента.

Многие экспериментальные исследования направлены не только на обоснование естественнонаучной истины, но и на обработку технологий изготовления новых видов разнообразной высококачественной продукции. Именно в этом наиболее сильно проявляется практическая направленность эксперимента как прямого пути совершенствования любого технологического цикла.

Экспериментальные средства по своей сути не однородны. Их можно разделить на три основные, отличающиеся функциональным назначением, системы:

- содержащую исследуемый объект с заданными свойствами;
- обеспечивающую воздействие на исследуемый предмет;
- сложную приборную измерительную систему.

В зависимости от экспериментальной задачи данные системы играют разную роль. Например, при определении магнитных свойств вещества результаты эксперимента во многом зависят от чувствительности приборов. В то же время при проведении экспериментов с веществом, не встречающимся в природе при обычных условиях, да еще и при низкой температуре, все системы экспериментальных средств играют важную роль.

Чем сложнее экспериментальная задача, тем острее стоит вопрос чистоты эксперимента и достоверности полученных результатов.

Можно назвать четыре пути решения данного вопроса:

- многократное повторение измерений;
- совершенствование технических систем и приборов, повышение их точности, чувствительности, разрешающей способности;
- более строгий учет основных и не основных факторов, влияющих на исследуемый объект;
- предварительное планирование эксперимента, позволяющее наиболее полно учесть специфику исследуемого объекта и возможности приборного обеспечения.

Чем чище поставлен эксперимент, тем тщательнее предварительно проанализированы все особенности исследуемого объекта, и чем чувствительнее приборы, тем точнее экспериментальные результаты и тем ближе они соответствуют естественнонаучной истине.

В любом естественнонаучном эксперименте можно выделить три основных этапа:

- подготовительный;
- получение экспериментальных данных;
- обработка результатов эксперимента и их анализ.

Подготовительный этап обычно включает теоретическую проработку проведения эксперимента, его планирование, подготовку исследуемого объекта, конструирование и создание технической базы, включающей приборное обес-

печение. На хорошо подготовленной экспериментальной базе полученные данные, как правило, легче поддаются сложной математической обработке.

Анализ результатов эксперимента позволяет оценить тот или иной параметр исследуемого объекта и сопоставить его либо с соответствующим теоретическим значением, либо с экспериментальным значением, полученным другими техническими средствами, что очень важно при определении правдивости и степени достоверности полученных результатов.

7.2. Обработка результатов экспериментальных исследований

После получения первых экспериментальных результатов процедура эксперимента продолжается. Во-первых, как правило, разовый эксперимент не дает ответа на поставленный вопрос. Во-вторых, полученные экспериментальные результаты нуждаются в логической доработке, превращающей их в научный факт, т. е. в то, в истинности чего не возникает сомнений.

Представление о фактах как проявлениях действительности, непосредственно фиксируемых в формах чувственного отражения, сложилось в науке на ранней стадии зарождения естествознания. Практика современного естествознания показывает, что не все факты непосредственно воспринимаются, чаще всего факты не являются тем, что сразу бросается в глаза и может быть зафиксировано всеми.

Факты в естествознании не просто собираются, а активно формируются естествоиспытателями, что отнюдь не снижает их объективности. В равной мере и теория, несмотря на проявление творческой активности субъекта, не утрачивает своей объективности, если она истинна.

Отдельные экспериментальные данные, полученные на начальной стадии эмпирического исследования, сами по себе не становятся фактами науки. В них могут содержаться ошибки, связанные с некорректной постановкой эксперимента, неправильными показаниями измерительных приборов, отклонениями в функционировании органов чувств и т. п. Поэтому в естествознании, как правило, проводится не один, а серия экспериментов. Уточняются и проверяются результаты эксперимента, собираются недостающие сведения, проводятся дополнительные эксперименты. Затем полученные в серии экспериментов данные подвергаются математической обработке.

При кажущейся простоте получения и обработки первичных экспериментальных данных, т. е. результатов наблюдений и измерений, математическая обработка, обладая определенной спецификой, производится в рамках строгой теории ошибок, на основании которой количественно определяется достоверность окончательных результатов. Какими бы точными ни были наблюдения и измерения, погрешности неизбежны. Задача естествоиспытателя состоит в том, чтобы приблизить экспериментальные данные к объективным значениям определяемых величин, т. е. уменьшить интервал неточности. Для этого каждый исследователь должен иметь представление обо всех ошибках, встречающихся в практике экспериментального исследования. Современная

теория ошибок вооружает экспериментаторов надежными средствами корректировки экспериментальных данных.

Статистическая обработка – не только эффективное средство уточнения экспериментальных данных, отсеивания случайных ошибок, но и первый шаг обобщения их в процессе формирования научного факта. Разумеется, статистическая обработка – необходимая, но не достаточная операция при переходе от эмпирических данных к естественнонаучным фактам.

После уточнения экспериментальных результатов начинается следующая стадия – сравнение и обработка. Если в результате сравнения и обобщения готовится материал для последующих обобщений, то в науке фиксируется новое явление. Однако это не означает завершения процесса формирования научного факта. Вновь зафиксированное явление становится научным фактом после его интерпретации.

Таким образом, научный факт, полученный в эксперименте, представляет собой результат обобщения совокупности выводов, основанных на наблюдениях и измерениях характеристик исследуемого объекта при предсказании их в виде гипотезы.

7.3. Экспериментальные измерения

Любому материальному объекту присущи вполне определенные свойства, большинство из которых характеризуется численными величинами. Например, для куска медного провода можно определить следующие величины: диаметр, длину, массу, электропроводность, температурный коэффициент расширения, электрическое сопротивление и др.

Некоторые свойства объектов, явления природы труднее поддаются количественному описанию. К ним можно отнести, например, цвет, блеск, способность противостоять многократным изгибам. Однако даже в таких случаях необходимо определить соответствующие данным свойствам количественные характеристики, без знания которых невозможно описать объект для достаточно точного его воспроизведения.

Для определения численной характеристики какого-либо свойства выбранного объекта необходимо знать, во сколько раз искомая характеристика больше или меньше другого объекта, **принятого за эталон**. Операция сравнения определяемой величины для исследуемого объекта с соответствующей величиной эталона называется **измерением**. Например, за единицу длины принят метр. В результате измерения некоторой длины отрезка определяется, сколько метров в нем содержится. В основе этих измерений лежит метр эталона – расстояние между штрихами, нанесенными на стержне из особого стойкого сплава. Точно так же при измерении массы некоторого тела устанавливается, во сколько раз измеряемая масса превосходит массу эталонного образца в один килограмм.

Разумеется, очень редко пользуются сравнением измеряемых величин с величинами эталонов, хранящихся в государственных метрологических

учреждениях. В основном пользуются различного рода измерительными устройствами и приборами, тем или иным способом сверенными с эталонами. Это относится в одинаковой мере как к устройствам и приборам для измерения длины (различные линейки, микрометр, измерительный микроскоп и т. п.), так и к многообразным измерителям времени, массы и к электроизмерительным, оптическим и многим другим приборам.

Принято различать два вида экспериментальных измерений – **прямые и косвенные**.

При **прямом измерении** определяемая величина сравнивается с единицей измерения непосредственно при помощи измерительного прибора. Измерение длины рулеткой либо штангенциркулем, измерение промежутков времени секундомером, измерение силы тока амперметром и т. п. – все это примеры прямых измерений, при которых измеряемая величина отсчитывается непосредственно по шкале прибора.

При **косвенном измерении** определяемая величина вычисляется по формуле, включающей результаты прямых измерений. К косвенным измерениям относятся, например, определение площади прямоугольника по измеренным двум его сторонам, определение сопротивления участка цепи по силе тока и напряжению, определение концентрации примесей по интенсивности ее спектральных линий и т. п.

Независимо от способа измерения той или иной физической величины сопровождается **ошибкой**, показывающей, насколько искомая величина отличается от ее истинного значения.

7.4. Методы определения случайных ошибок. Определение связи между ошибками

Никакое измерение не может быть выполнено абсолютно точно. Другими словами, при измерении какой-либо величины любым способом абсолютное значение ее недостижимо, а это означает, что результат измерения содержит некоторую погрешность – **ошибку измерений**.

Такой вывод следует из одного из критериев теории естественно научного познания действительности – любое научное знание относительно.

Ограниченные возможности измерительных приборов, несовершенство органов чувств, неоднородность измерительных объектов, внешние и внутренние факторы, влияющие на объект и т. п., – вот основные причины недостижимости абсолютного значения измеряемой величины.

Точность измерений возрастает по мере увеличения чувствительности измерительного прибора. Однако при любом количестве измерений чувствительным прибором нельзя сделать ошибку измерений меньше ошибки измерительного прибора. Например, если линейка позволяет измерить длину с относительной ошибкой 0,1 %, что соответствует 1 мм на метровой линейке, то, применяя ее для измерений длины любых объектов, нельзя определить длину с ошибкой меньше 0,1 %.

Абсолютное значение является идеальным, недостижимым на практике. Чем точнее поставлен эксперимент, чем современнее измерительная техника и т. п., тем ближе измеряемая величина к абсолютной.

Одна из важных целей экспериментатора – приблизить получаемые экспериментальные данные к их абсолютным величинам.

По отношению к истинному значению различают абсолютную и относительную ошибки измерений.

С учетом причин, порождающих ошибки, обычно выделяют **систематические, случайные и приборные ошибки**.

При такой классификации не учитываются грубые ошибки, вызванные невниманием при снятии показаний приборов, неправильной записью измеряемых данных, ошибками при вычислениях и т. п. Такие ошибки не подчиняются какому-либо закону и устраняются при промежуточной оценке результатов измерений.

Систематические ошибки обуславливаются факторами, действующими одинаково при многократном повторении измерений. Возникают они чаще всего при неисправности измерительных приборов, неточности метода измерений и при использовании для расчетов неточных данных.

Если, например, стрелка амперметра изогнута или смещен «нуль» прибора, то при измерении таким прибором всегда получится ошибочная величина. Сколько бы раз ни проводились измерения, как бы тщательно ни записывались показания прибора, в измерениях всегда будет одна и та же ошибка. Для устранения систематической ошибки, вызванной неисправностью прибора, необходимо ввести соответствующие поправки, полученные при сравнении показания неисправного прибора с заведомо исправным.

Систематическая ошибка всегда смещает результат измерений в одну и ту же сторону, а часто и на одну и ту же величину. Следовательно, даже полное совпадение ряда измеренных величин не является условием отсутствия систематической ошибки – ее нельзя выявить при повторных измерениях.

Сущность систематических ошибок, обусловленных методом измерений, можно пояснить на примере определении электрического сопротивления. При этом определении возникает систематическая ошибка, вызванная электрическим сопротивлением соединительных проводов в цепи измерительной схемы. Для устранения ее нужно ввести поправки на неучтенное сопротивление.

Иногда для устранения систематических ошибок требуется тщательная проверка всех измерительных приборов и кропотливый анализ метода измерений.

Случайные ошибки вызываются факторами, действующими неодинаковым, непредсказуемым образом в каждом отдельном измерении. Они возникают при совокупном действии многих факторов и остаются при устранении грубых и систематических ошибок.

Можно назвать многочисленные объективные и субъективные причины случайных ошибок: изменение напряжения в сети при электрических измерениях, неоднородность вещества при определении плотности, изменение

условий окружающей среды (температура, давление), возбужденное состояние экспериментатора и др.

Подобные причины приводят к тому, что несколько измерений одной и той же величины дают различные результаты. К случайным ошибкам, кроме того, следует отнести все те ошибки, многочисленные причины которых неизвестны или неясны.

Вследствие непредсказуемых обстоятельств случайные ошибки могут как увеличивать, так и уменьшать значения измеряемой величины. Обычно случайные ошибки не устраняются – их нельзя избежать в каждом из результатов измерений.

Случайные ошибки подчиняются законам **теории вероятности**, установленным для случайных явлений. С помощью методов теории вероятности можно уменьшить влияние случайных ошибок на результат эксперимента.

Широко известен нормальный закон распределения случайных ошибок (**закон Гаусса**), из которого следуют важные выводы:

- малые по модулю ошибки встречаются чаще;
- равные по модулю случайные ошибки разных знаков встречаются одинаково часто;
- с возрастанием точности (уменьшением интервала разброса измеренных значений) плотность случайных ошибок возрастает.

Теория случайных ошибок позволяет определить наиболее вероятные значения измеряемых величин и возможные отклонения от них. Однако следует отметить, что выводы теории вероятности справедливы только для достаточно большого числа случайных событий. Поэтому применение теории случайных ошибок целесообразно только к сравнительно большому числу измерений. На практике же часто ограничиваются 5–10 измерениями, хотя следует помнить, что увеличение числа измерений уменьшает влияние случайных ошибок. В каждом конкретном случае устанавливается необходимое число измерений для получения заданной точности.

Приборные ошибки обуславливаются конструктивными особенностями измерительных приборов. Приборную ошибку иногда называют точностью измерительного прибора. По величине ошибок, которые могут вносить при измерении электроизмерительные приборы, различают семь классов точности приборов, которые обозначаются цифрами: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 4,0. Цифра класса точности показывает величину относительной ошибки в процентах при отклонении стрелки прибора последнего деления шкалы.

Абсолютная ошибка прибора при любом отклонении стрелки одинакова. Поэтому при меньших отклонениях стрелки относительная ошибка больше. Например, если у прибора класса точности 0,5 вся шкала содержит 150 делений, то относительная ошибка при отклонении на все 150 делений составляет 0,5 %, а абсолютная ошибка равна 0,75 деления. При отклонении стрелки на 25 делений абсолютная ошибка та же – 0,75 деления, а относительная ошибка – 3 %.

Для получения возможно меньших относительных ошибок при пользовании измерительными приборами нужно добиваться достаточно большого отклонения стрелки, не меньше, чем на половину шкалы. Для этого нужно выбирать прибор с достаточной чувствительностью или переходить к меньшим пределам измерений многопредельного прибора.

Измерительные приборы. Большинство приборов, предназначенных для измерения разных физических величин, содержит линейные, угловые или круговые шкалы. Показание того или иного прибора соответствует длине отрезков прямой или дуги. Чем больше точность прибора, тем больше должно быть число делений, на которые разбита шкала. Для одной и той же шкалы с увеличением числа делений расстояние между штрихами уменьшается.

В некоторых приборах для повышения точности измерений применяются различные приспособления, позволяющие отсчитывать доли деления шкалы. Наиболее широко распространены нониусы и микрометрические винты, они обычно применяются в приборах для измерения длины или угла, в которых части прибора перемещаются относительно друг друга.

На одной из частей наносится основная шкала, а на другой – **нониус**, представляющий собой небольшую дополнительную шкалу, передвигающуюся при измерении вдоль основной шкалы. Удобство отсчета с применением нониуса заключается в том, что человеческий глаз легко различает, является ли один штрих продолжением другого или они сдвинуты друг относительно друга.

Иногда для отсчета долей деления применяется специальный циферблат, указатель которого связан с перемещением измерительного устройства механической передачей. В оптических приборах современных конструкций наносятся микроскопические цифры около каждого штриха шкалы, и показание отсчетов снимается при помощи отсчетного микроскопа, в поле зрения которого видна только одна необходимая цифра и дополнительная шкала для отсчета долей деления.

Для измерения электрических величин применяются электроизмерительные приборы. Принцип действия их основан на превращении электрической энергии в другие виды энергии, например, механическую, тепловую, магнитную и т. д.

Каждый электрический прибор состоит из двух частей: **электрического и отсчетного механизмов.**

Отсчетный механизм большинства приборов содержит шкалу и указатель. Указатель определяет точку шкалы, соответствующую отсчету измеренной величины. Обычно указатель представляет собой тонкую стрелку или световое пятно. В современных электроизмерительных приборах отсчетным устройством служит электронное табло с цифровой индикацией, очень удобной при снятии показаний прибора.

Электроизмерительные приборы широко применяются и для измерения неэлектрических величин: температуры, давления, скорости движения, освеще-

щенности и т. п. Принцип действия таких приборов основан на связи между электрическими и другими физическими явлениями. Такая связь обуславливает возникновение термотоков, фототоков, электромагнитной индукции и т. п.

В измерительной практике часто встречаются косвенные измерения, в основу которых положены законы или закономерности, устанавливающие зависимость между различными физическими величинами. Например, электрическое сопротивление проводника можно определить, измерив падение напряжения на нем и силу тока.

Электрические измерения можно производить **двумя способами**:

- сравнением измеряемой величины с ее соответствующими эталонами – ЭДС сопротивления, емкости, индуктивности и др.;
- с помощью приборов, показывающих численные значения измеряемой величины.

По своему назначению основные электроизмерительные приборы можно классифицировать следующим образом:

- амперметры и миллиамперметры – измерители силы тока;
- вольтметры и милливольтметры – измерители напряжения;
- ваттметры – приборы для измерения электрической мощности;
- счетчики электрической энергии – приборы для измерения электрической энергии;
- омметры – приборы для измерения электрического сопротивления;
- частотомеры – приборы для измерения частоты переменного тока;
- приборы для измерения емкости и т. п.

По принципу действия электроизмерительные приборы подразделяются на магнитоэлектрические, электромагнитные, электродинамические, тепловые, индукционные, электронные и др.

Одна из основных характеристик электроизмерительного прибора – **чувствительность**, определяемая отношением линейного или углового перемещения указателя к изменению измеряемой величины при отклонении на одно деление.

Примеры обработки результатов экспериментальных исследований **Порядок обработки результатов измерений**

При практической обработке результатов измерений можно последовательно выполнить следующие операции:

1. Записать результаты измерений:

$$a = 1/n \sum_{i=1}^n a_i.$$

2. Вычислить среднее значение из n измерений.

3. Определить погрешности отдельных измерений $V_i = a - a_i$.

4. Вычислить квадраты погрешностей отдельных измерений V_i^2 .

5. Если несколько измерений резко отличаются по своим значениям от остальных измерений, то следует проверить, не являются ли они промахом. При исключении одного или нескольких измерений п.п. 1–4 повторить.

6. Определить среднюю квадратичную погрешность результата серии

$$\text{измерений } S_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n V_i^2}{n(n-1)}}.$$

7. Задать значение надежности a .

8. Определить коэффициент Стьюдента $t_a(n)$ для выбранной надежности a и числа проведенных измерений n .

9. Найти границы доверительного интервала $D_x = t_a(n) \times S_a$.

10. Если величина погрешности результата измерений (п. 9) окажется сравнимой с величиной d погрешности прибора, то в качестве границы доверительного интервала следует взять величину

$$\Delta x = \sqrt{t_a^2(n) S_a^2 + \left[\frac{t_a(\infty)}{3} \right]^2 \delta^2}.$$

11. Записать окончательный результат $X = a \pm D_x$.

12. Оценить относительную погрешность результата серии измерений $\varepsilon = \frac{\Delta x}{a} 100\%.$

Пример обработки результата измерений диаметра цилиндра

Микрометром было сделано 10 замеров диаметра цилиндра. Цена деления микрометра 0,01 мм. Определить диаметр цилиндра с надежностью $a = 0,95$ и $a = 0,99$. Оценить влияние числа замеров на точность получаемого результата:

$a_i - 14,85; 14,80; 14,84; 14,81; 14,79; 14,81; 14,80; 14,85; 14,84; 14,80$.

Для первых пяти измерений определим среднеарифметическое значение и границы доверительного интервала. Для удобства расчетов выберем произвольное число a_0 , удобное для расчетов ($a_0 = 14,80$ мм), и определим разности $(a_i - a_0)$ и квадраты этих разностей. Результаты сведены в таблицу:

i	a_i	$a_i - a_0$, мм	$(a_i - a_0)^2$, мм ²
1	14,85	0,05	0,0025
2	14,8	0	0
3	14,84	0,04	0,0016
4	14,81	0,01	0,0001
5	14,79	-0,01	0,0001
Сумма	74,09	0,09	0,0043

Найдем среднее значение a и среднеквадратичное отклонение S_a :

$$a = a_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) = 14,80 + \frac{0,09}{5} = 14,818(\text{мм});$$

$$a - a_0 = 0,018;$$

$$S_a^2 = \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{i=1}^n (a_i - a_0)^2 - n(a - a_0)^2 \right] = \frac{1}{5 \cdot 4} (0,0043 - 5 \cdot 0,000324) = \frac{27}{20} \cdot 10^{-4} (\text{мм}^2);$$

$$S_a = \sqrt{1,35 \cdot 10^{-4}} = 1,16 \cdot 10^{-2} (\text{мм}).$$

Для надежности $a = 0,95$ и $n = 5$, $t_a = 2,78$. Абсолютная погрешность измерения D_x :

$$Dx = t_a \times S_a = 2,78 \times 0,0116 = 0,0322 \text{ мм}.$$

Результаты измерения можно представить в виде $(14,818 \pm 0,032)$ мм или сохраняя в величине погрешности одну значащую цифру – $(14,82 \pm 0,03)$ мм.

Относительная погрешность:

$$\varepsilon_a = \pm \frac{0,03}{14,82} 100\% \approx \pm 0,2\%.$$

Теперь найдем абсолютную и относительную погрешность этих измерений при $a = 0,99$.

В этом случае $t_a = 4,60$. Тогда $D_x = t_a \times S_a = 4,60 \times 1,16 \times 10^{-2} = 5,34 \times 10^{-2}$ (мм). Следовательно, $a = (14,83 \pm 0,05)$ мм:

$$\varepsilon_a = \pm \frac{0,05}{14,82} 100\% \approx \pm 0,3\%.$$

Видно, что с увеличением надежности границы доверительного интервала возросли, а точность результата уменьшилась.

Проведем расчет погрешностей для этих же пяти измерений, полагая, что $s^2 = S_n^2$ (что при $n = 5$ ошибочно). Для этого используем распределение Гаусса. При $a = 0,95$

$$k_a = \frac{\Delta x}{S_a} = 1,96.$$

Это дает возможность определить:

$$Dx = k_a \times S_a = 1,96 \times 1,16 \times 10^{-2} \gg 2 \times 10^{-2} \text{ (мм)},$$

т. е. погрешность получилась меньше примерно на 30 %.

Если по этой величине погрешности определить величину надежности при $t_a = k_a$, то из таблицы коэффициентов Стьюдента получим $a < 0,90$ вместо заданной $a = 0,95$.

Следовательно, при малом числе измерений n применение закона нормального распределения с $s^2 = S_n^2$ – вместо распределения Стьюдента приводит к уменьшению надежности результата измерений.

Найдем средние значения и погрешности следующих пяти измерений:

i	a_i	$a_i - a_0$, мм	$(a_i - a_0)^2$, мм ²
1	14,81	0,01	0,0001
2	14,8	0	0
3	14,85	0,05	0,0025
4	14,84	0,04	0,0016
5	14,8	0	0
Сумма		0,1	0,0042

$$a_0 = 14,80 \text{ мм};$$

$$a = a_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) = 14,80 + \frac{0,10}{5} = 14,82 \text{ (мм)};$$

$$a - a_0 = 0,02 \text{ мм};$$

$$S_a^2 = \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{i=1}^n (a_i - a_0)^2 - n(a - a_0)^2 \right] = \frac{1}{20} (0,0042 - 5 \cdot 0,0004) = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ (мм}^2\text{)}$$

$$S_a = 1,05 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

$$\text{При } a = 0,95: \varepsilon_a = \pm \frac{0,03}{14,82} 100\% \approx \pm 0,2\%;$$

$$X = 14,82 \pm 0,03 \text{ мм.}$$

При $a = 0,99$:

$$Dx = k_a \times S_a = \pm 4,60 \times 1,05 \times 10^{-2} \gg 5 \times 10^{-2} \text{ (мм)};$$

$$\varepsilon_a = \pm \frac{0,05}{14,85} 100\% \approx \pm 0,3\%;$$

$$X = 14,82 \pm 0,05 \text{ мм.}$$

Результаты практически не отличаются от результатов, полученных из первой серии.

Найдем теперь погрешность результата всей серии из десяти измерений. В этом случае

$$\sum (a_i - a_0) = 0,19 \text{ (мм)};$$

$$\sum (a_i - a_0)^2 = 0,0085 \text{ (мм)}^2.$$

Эти величины получаются суммированием последних строк из таблиц частных серий.

$$a_0 = 14,80 \text{ мм};$$

$$a = a_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) = 14,80 + \frac{1}{10} 0,19 = 14,819 \text{ (мм)};$$

$$a - a_0 = 0,019 \text{ мм};$$

$$S_a^2 = \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{i=1}^n (a_i - a_0)^2 - n(a - a_0)^2 \right] = \frac{1}{90} (0,0085 - 10 \cdot 0,000361) = 54 \cdot 10^{-6} \text{ (мм}^2\text{)};$$

$$S_a = 7,35 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

При $a = 0,95$

$$Dx = t_a \times S_a = \pm 2,26 \times 7,35 \times 10^{-3} = \pm 1,7 \times 10^{-2} \text{ (мм)};$$

$$\varepsilon_a = \pm \frac{0,017}{14,82} 100\% = \pm 0,11\%;$$

$$a = 14,819 \pm 0,017 \text{ мм.}$$

При $a = 0,99$ получаем

$$Dx = t_a \times S_a = \pm 3,25 \times 7,35 \times 10^{-3} = \pm 2,4 \times 10^{-2} \text{ (мм)};$$

$$\varepsilon_a = \pm \frac{0,024}{14,82} 100\% = \pm 0.16\% ;$$

$$a = 14,819 \pm 0,024 \text{ мм.}$$

Видно, что абсолютная и относительная погрешность результата десяти измерений стали почти в два раза меньше погрешности пяти измерений.

Применение нормального распределения с $s^2 = S_n^2$ дает в случае $a = 0,95$ $k_a = 1,96$ и $D_x = \pm 1,4 \times 10^{-2} \text{ (мм)}$, а величина надежности понижается до 0,91; в случае $a = 0,99$ получаем $k_a = 2,58$ и $D_x = 1,9 \times 10^{-2} \text{ (мм)}$, а величина надежности понижается до $a = 0,97$.

7.5. Основы номографии

Номограмма (от греч. nomos – закон) – чертеж, являющийся особым изображением функциональной зависимости. Основное назначение номограммы – служить средством для вычислений. Номограмма применяется в инженерных расчетах, играя роль специализированных счетных приспособлений.

Номография – раздел математики, объединяющий теорию и практические методы построения номограмм.

Особенность номограмм заключается в том, что каждый чертеж изображает заданную область изменения переменных и каждое из значений переменных в этой области изображено на номограмме определенным геометрическим элементом (точкой или линией). Изображения значения переменных, связанных функциональной зависимостью, находятся на номограмме в определенном соответствии, общем для номограмм одного и того же типа.

На рис. 7.1 приведен пример номограммы для вычисления α_y – одного из углов установки резца на заточном станке по заданным значениям углов резца α и φ .

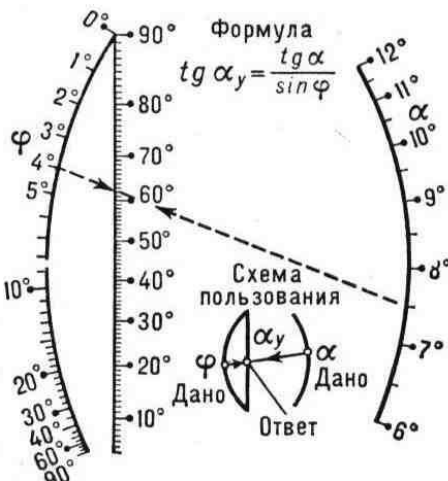


Рис. 7.1. Номограмма из выровненных точек для вычисления α_y

Зависимость между этими величинами определяется формулой:

$$\operatorname{tg} \alpha_y = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \varphi}.$$

Номограмма состоит из трех шкал: шкалы углов α_y , шкалы углов α и шкалы углов φ . Точки каждой из шкал являются изображениями значения соответствующей переменной.

Номограмма построена так, что три точки, изображающие соответственно значения α_y , α и φ , связанные данной зависимостью, всегда лежат на одной прямой. Отсюда непосредственно вытекает способ вычисления по номограмме: для вычисления α_y надо на шкалах α и φ найти точки, соответствующие данным значениям α и φ , и через них провести **прямую**. Эта прямая пройдет на шкале α_y через точку, соответствующую искомому значению α_y . На номограмме пунктирная линия соединяет точки шкал α и φ со значениями $\alpha = 7,5^\circ$ и $\varphi = 4^\circ$; номограмма дает ответ $\alpha_y = 62^\circ$.

Номограммы различают по способу изображения переменных и по способу задания соответствия между изображениями переменных.

Изображения переменных. Значения переменных изображают на номограммах точками или линиями. Значение переменной, приписанное точке (линии), называется **пометкой точки (линии)**, а сама точка (линия) называется **помеченной точкой (линией)**. Область изменения переменной изображается на номограмме совокупностью помеченных точек, которая называется **шкалой переменной** или **однопараметрического семейства помеченных линий**.

Для нахождения на шкале точек по их пометкам и значений пометок по заданным точкам шкалы градуируются системой штрихов, указывающих на отдельные точки шкалы. У некоторых штрихов надписываются значения пометок точек. Соответствие между точками шкалы, не отмеченными штрихами и их пометками, устанавливается линейной интерполяцией, которая выполняется на номограмме на глаз. В семействе линий проводят также лишь отдельные линии, остальные находят **интерполяцией**.

При изображении значений переменных точками, наряду со шкалами, в номограммах применяют **бинарные поля**. Бинарное поле является изображением области изменения двух переменных и состоит из точек, каждой из которых поставлена в соответствие пара чисел – приписано две пометки: **пометка первой переменной и пометка второй переменной**.

Точки бинарного поля заполняют двумерную область. В бинарном поле переменных u и v проводят два семейства линий $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, которые позволяют по данным пометкам находить точку в поле и по точке поля ее пометки (на рис. 7.3 это вертикальные прямые h и кривые φ). В нужных случаях здесь также применяют линейную интерполяцию.

Классификация номограмм. Наиболее распространены следующие номограммы: **из выравненных точек**, **сетчатые** и **транспарантные**; для уравнения с двумя переменными применяют **двойные шкалы**.

Двойная шкала является простейшим видом номограммы. Для уравнения $F(u, v) = 0$ она состоит из совмещенных шкал переменных u и v . Шкалы построены так, что их точки, пометки которых удовлетворяют уравнению, совпадают. На рис. 7.2 приведен пример двойной шкалы для вычисления логарифмов: $u = \lg v$.

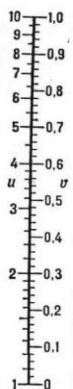


Рис. 7.2. Двойная шкала для вычисления логарифма u числа v

Номограмма из выравненных точек уравнения $F(u, v, w) = 0$ состоит из трех шкал переменных, v и w , изображающих соответственно область изменения этих переменных u . Шкалы номограммы построены так, что три точки, пометки которых удовлетворяют уравнению, лежат на одной прямой (отсюда и название номограммы; пример номограммы из выравненных точек приведен на рис. 7.1). Номограмма из выравненных точек с бинарным полем уравнения $F(u, v, w, t) = 0$ с четырьмя переменными состоит из шкал переменных u и v бинарного поля переменных w и t . Шкалы и поле номограммы построены так, что две точки с пометками u и v на шкалах и точка поля с двойной пометкой (w, t) лежат на одной прямой, если значения переменных u, v, w и t удовлетворяют уравнению. Номограмма с двумя шкалами и бинарным полем приведена на рис. 7.3.

Она служит для вычисления площади S равнобокой трапеции по длине b меньшего ее основания, высоте h и углу ϕ между большим основанием и боковой стороной: $S = bh + h^2 \operatorname{ctg} \phi$. Пометка точки пересечения прямой со шкалой S дает ответ. На рис. 7.3 показан пунктиром пример, когда $h = 8$, $\phi = 60^\circ$ и $b = 8$; ответ: $S = 100$.

Номограмма из выровненных точек может содержать и два, и три бинарных поля, т. е. одним приложением линейки давать решение уравнения с пятью и с шестью переменными.

Сетчатая номограмма уравнения $F(u, v, w) = 0$ с тремя переменными u, v и w состоит из трех семейств помеченных линий, изображающих соответственно данные области изменения этих переменных. Линии семейств построены так, что каждые три линии, пометки которых удовлетворяют урав-

нению, пересекаются в одной точке. На рис. 7.4 приведен пример сетчатой номограммы для определения необходимой реактивной мощности k на 1 кВт нагрузки электрической установки для перехода от $\cos \varphi$ до $\cos \varphi$ $k = \tan \varphi - \varphi$.

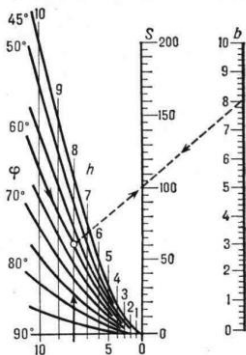


Рис. 7.3. Номограмма из выравненных точек с бинарным полем для вычисления площади S равнобоочной трапеции

Она состоит из семейства прямых, помеченных значениями существующего $\cos \varphi_1$, семейства прямых, помеченных значениями k , и семейства кривых, помеченных значениями искомого $\cos \varphi$. Для вычисления величины k по данным $\cos \varphi_1$ и $\cos \varphi_2$ надо найти на номограмме соответствующие линии и точку их пересечения. Пометка линии семейства k , проходящая через эту точку, даст ответ (так, для $\cos \varphi_1 = 0,8$, $\cos \varphi_2 = 0,95$ («отставание») находим $k = 0,4$).

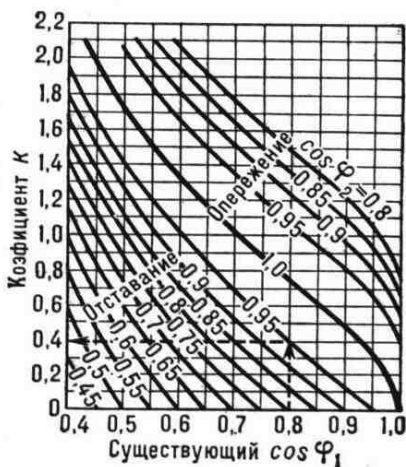


Рис. 7.4. Сетчатая номограмма для вычисления мощности, необходимой на 1 кВт нагрузки электрической установки для перехода от $\cos \varphi$ к $\cos \varphi_2$

При построении сетчатых номограмм может быть поставлена дополнительная задача: найти такое преобразование, при котором все три семейства линий номограммы обращаются в семейства прямых, что упрощает ее вычерчивание. Такая задача носит название **анаморфозы** и эквивалентна задаче построения для данного уравнения номограммы из выравненных точек, т. к. посредством коррелятивного преобразования сетчатую номограмму из прямых можно перевести в номограмму из выравненных точек с тремя шкалами.

Для построения сетчатых номограмм из прямых линий применяются т. наз. функциональные сетки. **Функциональная сетка** представляет собой систему координатных линий (**u, v**) (часто изготовленную типографским способом), имеющих в декартовых координатах уравнения:

$$\chi = \varphi(u), \quad y = \varphi(v).$$

Простейшими функциональными сетками являются **логарифмическая** и **полулогарифмическая бумага**. Существуют также: сетка, на которой отрезками прямых изображаются части синусоиды; сетка для изображения нормального закона распределения вероятностей прямой линией. Функциональные сетки применяются и при построении сетчатых номограмм, когда линии третьего семейства – кривые, но выглядят на сетке проще или нагляднее, чем в декартовой системе координат.

Транспарантная номограмма в простейшем случае состоит из двух плоскостей – основной плоскости и транспаранта с изображениями на них переменных в виде шкал, бинарных полей или семейств помеченных линий; основная плоскость и транспарант могут также содержать непомеченные («немые») линии и точки. Номограмма построена так, что элементы, помеченные значениями, удовлетворяющими уравнению, а также «немые» элементы номограммы при наложении транспаранта на основную плоскость должны в определенной последовательности вступать в контакты. Контактom двух элементов называется принадлежность их одного другому (точка лежит на линии, прямая касается линии и т. д.). Для практического осуществления необходимых контактов в нужных случаях транспарант делают из прозрачного материала.

На рис. 7.5 показана транспарантная номограмма для вычисления температуры **t** смеси двух жидкостей с одинаковой теплоемкостью по формуле:

$$t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2},$$

где **m₁** – масса с температурой **t₁**; **t₂** – масса с температурой **t₂**. Номограмма состоит из семейства параллельных прямых на основной плоскости номограммы и шкалы на транспаранте, оформленном в виде линейки.

Прямые имеют пометку **m₁** – влево от средней прямой с пометкой **O** (на рис. 7.5 она выделена) и пометку **m₂** – вправо от средней прямой. Шкала транспаранта является одновременно шкалой переменных **t₁**, **t₂** и **t**. Для вычисления по номограмме накладывают транспарант на основную плоскость так, чтобы точки, соответствующие данным **m₁** и **m₂**, оказались на прямых,

соответствующих данным t_2 и t_1 , т. е. здесь осуществляется контакт между точкой t_2 и прямой m_1 и между точкой t_1 и прямой m_2 . Ответом будет пометка точки пересечения шкалы t с прямой, имеющей пометку 0 . В данном случае эта прямая играет роль «немого» элемента номограммы, вступающего в контакт с точкой ответной шкалы. На рис. 7.5 решен пример, когда $m_1 = 8$ кг, $t_1 = 52^\circ$, $m_2 = 10$ кг, $t_2 = 16^\circ$; ответ: $t = 32^\circ$.

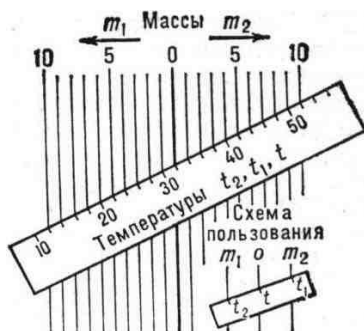


Рис. 7.5. Транспарантная номограмма для определения температуры смеси двух жидкостей с одинаковой теплоемкостью

Примером транспарантной номограммы, транспарант которой имеет лишь поступательное движение, является **логарифмическая линейка**.

Составные номограммы. Для уравнений со многими переменными применяют составные номограммы, представляющие систему отдельных номограмм, связанных общими шкалами или семействами линий. Обычно элементами составных номограмм являются номограммы из выровненных точек и сетчатые номограммы.

Погрешности вычислений по номограммам. Выполнение вычислений по номограммам сопровождается погрешностями, которые являются следствием невозможности (в процессе вычисления) точного осуществления необходимого соответствия между элементами номограммы.

Точность вычисления по номограммам существенно зависит от аккуратности выполнения необходимых операций. При вычислении по номограммам из выровненных точек следует применять прозрачную линейку с продольной визирной чертой.

Возможность представления уравнений номограммами. Номограммы разделяются на точные и приближенные. Номограмма данной функциональной зависимости называется точной, если обусловленное ее типом соответствие между изображениями переменных (в предположении точного осуществления) устанавливает между переменными зависимость, совпадающую с данной.

Условия точного номографирования налагают определенные ограничения на вид уравнений, для которых можно построить номограммы.

Условия, которым должно удовлетворять уравнение, для того чтобы можно было построить его номограмму, называются **условиями номографируемости**. При построении номограмм номографируемое уравнение преобразует-

ся в одну из т. наз. канонических форм, для которых известны в общем виде уравнения шкал, полей, семейств линий соответствующей номограммы.

При построении составных номограмм дополнительно необходимо представление данного уравнения со многими переменными в виде системы уравнений с меньшим числом переменных – т. наз. разделение переменных (это достигается введением вспомогательных параметров).

Номограмма данной функциональной зависимости называется приближенной, если обусловленное типом номограммы соответствие между ее элементами (в предположении точного его осуществления) устанавливает между переменными зависимость, приближенно представляющую данную.

Создан ряд способов построения приближенных номограмм в основном типа из выравненных точек.

На рис. 7.6 изображена приближенная номограмма интегрального **закона Стьюдента** распределения вероятностей:

$$\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_{-\infty}^t \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt.$$

Погрешность в определении **t** за счет приближенного номографирования в данной области изменения переменных **a**, **k** и **t** не превышает $\pm 0,001$. Приближенные номограммы применяют тогда, когда точные номограммы невозможны или когда точные номограммы имеют неудачную форму и дают большую погрешность в ответе.

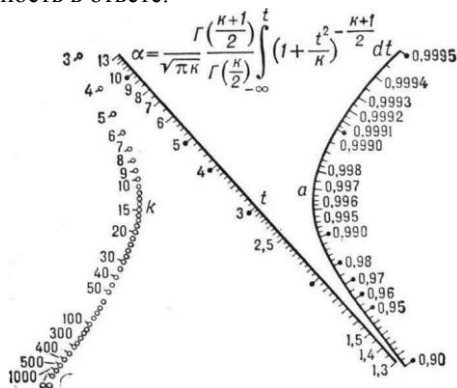


Рис. 7.6. Приближенная номограмма из выравненных точек интегрального закона Стьюдента распределения вероятностей

Глава 8. Обработка данных детерминированного и стохастического экспериментов

8.1. Термины и условные обозначения

Детерминированные закономерности исследуемого объекта – закономерности, характеризующиеся тем, что заданной совокупности факторов всегда соответствует только одно значение параметра.

Стохастические закономерности исследуемого объекта – закономерности, характеризующиеся тем, что заданной совокупности факторов соответствуют различные значения параметра, причем каждое значение реализуется с некоторой вероятностью.

Вероятность – мера достоверности случайного состояния исследуемого объекта.

Математическая статистика – наука о математических методах анализа эмпирических данных, отражающих поведение исследуемых объектов, подчиняющихся стохастическим закономерностям.

Фактор – детерминированная величина, влияющая на результат эксперимента.

Параметр – наблюдаемая величина, характеризующая исследуемый объект и зависящая от факторов.

Генеральная совокупность – полная совокупность значений параметра исследуемого объекта при всех возможных комбинациях факторов.

Выборка – совокупность относительно небольшого количества значений параметра исследуемого объекта, входящих в генеральную совокупность.

САО – среднее абсолютное отклонение.

Детерминированный эксперимент:

Y – исследуемый параметр.

dY – дифференциал параметра Y .

ΔY – предельная абсолютная погрешность параметра Y .

$\Delta Y_{\text{пр}}$ – предельная абсолютная погрешность параметра Y , обусловленная погрешностью измерительных приборов.

$\Delta Y_{\text{ст}}$ – предельная абсолютная погрешность параметра Y , обусловленная стохастической природой исследуемого объекта.

$\Delta Y/Y$ – предельная относительная погрешность параметра Y .

ξ, χ, ζ – истинные значения детерминированных факторов.

x, z, w – экспериментальные значения детерминированных факторов.

$\Delta x, \Delta z, \Delta w$ – предельные абсолютные погрешности факторов x, z, w .

Одна выборка:

μ – генеральное среднее.

σ^2 – генеральная дисперсия.

σ – генеральное стандартное отклонение.

$N(Y, \mu, \sigma)$ – нормальный закон распределения случайных значений параметра Y , характеризуемый генеральным средним μ и генеральным стандартным отклонением σ .

$Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_n$ – выборка случайных значений параметра Y .

n – объем выборки.

i – текущий номер случайной величины в выборке, $i = 1, \dots, n$.

S^2 – выборочная дисперсия параметра Y .

S – выборочное стандартное отклонение параметра Y .

f – число степеней свободы рассчитываемого параметра.

$Y_{\max}, Y_{\min}$ – максимальное (минимальное) значение параметра Y .

τ_3 – экспериментальное значение критерия Смирнова-Граббса.

$\tau_{f;p}$ – критическое значение критерия Смирнова-Граббса с числом степеней свободы f при доверительной вероятности p (приложение 1).

t_3 – экспериментальное значение критерия Стьюдента.

$t_{f;p}$ – критическое значение критерия Стьюдента с числом степеней свободы f при доверительной вероятности p (приложение 2).

$\Delta \bar{Y}$ – доверительный интервал генерального среднего μ , рассчитанный по выборке объемом n и доверительной вероятности p .

$\chi^2_{f,(1-p)/2}$ – нижнее критическое значение критерия Пирсона с числом степеней свободы f при доверительной вероятности p (приложение 3).

$\chi^2_{f,(1+p)/2}$ – верхнее критическое значение критерия Пирсона с числом степеней свободы f при доверительной вероятности p (приложение 3).

$n_{\min}$ – минимальное число опитов для оценки генерального среднего μ с допустимой погрешностью $\Delta \bar{Y}_0$ при доверительной вероятности p (приложение 2).

Две выборки и более:

n_1 – объем первой выборки $Y_{11}, \dots, Y_{1n_1}$, $i = 1, \dots, n_1$.

n_2 – объем второй выборки $Y_{21}, \dots, Y_{2n_2}$, $i = 1, \dots, n_2$.

μ – генеральное среднее для первой выборки.

σ_1^2 – генеральная дисперсия для первой выборки.

σ_1 – генеральное стандартное отклонение для первой выборки.

μ_2 – генеральное среднее для второй выборки.

σ_2^2 – генеральная дисперсия для второй выборки.

σ_2 – генеральное стандартное отклонение для второй выборки.

$\bar{Y}_1$ – выборочное среднее для первой выборки.

S_1^2 – выборочная дисперсия для первой выборки.

S_1 – выборочное стандартное отклонение для первой выборки.

$\bar{Y}_2$ – выборочное среднее значение для второй выборки.

S_2^2 – выборочная дисперсия для второй выборки.

S_2 – выборочное стандартное отклонение для второй выборки.

$\max(S_1^2, S_2^2)$ – максимальная из двух выборочных дисперсий.

$\min(S_1^2, S_2^2)$ – минимальная из двух выборочных дисперсий.

F_3 – экспериментальное значение критерия Фишера.

$F_{f_1, f_2, p}$ – критическое значение критерия Фишера для сравнения отношений двух дисперсий S_1^2 и S_2^2 , в числителе которого стоит большая дисперсия с числом степеней свободы f_1 , а в знаменателе – меньшая дисперсия с числом степеней свободы f_2 при доверительной вероятности p (приложение 4).

N – число опытов (число выборок).

j – текущий номер опыта, $j = 1, \dots, N$.

η – число дублей каждого из N опытов.

i – текущий номер дубля, $i = 1, \dots, n$.

Y_{ji} – значение параметра Y в j -ом опыте и i -ом дубле.

$\bar{Y}_j$ – выборочное среднее в j -ом опыте.

S_j^2 – выборочная дисперсия в j -ом опыте.

S_j – выборочное стандартное отклонение в j -ом опыте.

$\max S_j^2$ – максимальная выборочная дисперсия в N выборках.

G_3 – экспериментальное значение критерия Кохрена.

$G_{f_1, f_2, p}$ – критическое значение критерия Кохрена для сравнения N дисперсий, в числителе которого стоит наибольшая дисперсия с числом степеней свободы f_1 , а в знаменателе – сумма всех дисперсий с числом степеней свободы $f_2 = N$ при доверительной вероятности p (приложение 5).

8.2. Обработка данных детерминированного эксперимента

Научное описание исследуемых объектов исторически начиналось с детерминированного подхода, который основан на следующем постулате: если выполнен некоторый комплекс условий, то вытекающее из них единственно возможное состояние объекта всегда наступает со 100 %-ной вероятностью. Примером детерминированного описания исследуемых объектов является классическая механика, расцвет которой пришелся на XIX в.

По мере накопления знаний о поведении исследуемых объектов были выявлены новые закономерности, названные **стохастическими**. Если объект исследования подчиняется стохастическим закономерностям, то даже при строгом соблюдении всех условий вытекающее из них состояние принципиально неоднозначно и может быть предсказано лишь с определенной вероятностью методами математической статистики. Математическая статистика позволяет описывать исследуемый объект в условиях неопределенности, причем, и это необходимо подчеркнуть, изучение объектов, подчиняющихся стохастическим закономерностям, организуется путем создания и анализа случайных экспериментальных ситуаций. В настоящее время статистические методы исследований широко используются в физике, биологии, социологии, промышленном и сельскохозяйственном производстве [11, 14, 15, 24, 26, 28].

В научной литературе можно встретить понятия **«хорошо организованные» (детерминированные)** и **«плохо организованные» (стохастические) объекты**. Особенностью научного познания XX в. является переход от изучения «хорошо организованных» объектов к изучению «плохо ор-

ганизованных». Несмотря на концептуальное различие детерминированного и стохастического подходов в описании исследуемых объектов, общим у них является наличие некоторой организации, постоянной в пространстве и времени. Можно предположить, что развитие науки приведет к созданию методов моделирования объектов, внутренняя структура которых со временем усложняется в результате эволюционной самоорганизации, а в дальнейшем и к моделированию «концептуально неорганизованных» систем [27].

Исследование объектов, описываемых детерминированными закономерностями, включает в себя расчет параметров по известным аналитическим формулам, в которых рассчитываемый параметр зависит от факторов, определяемых экспериментально. В этом случае детерминированный параметр рассчитывается с некоторой предельной абсолютной погрешностью, обусловленной несовершенством средств измерений. Однако для объекта, подчиняющегося детерминированным закономерностям, использование более точных приборов позволит уменьшить предельную абсолютную погрешность. Например, определение линейных размеров объекта может быть выполнено с различной предельной абсолютной погрешностью: 10 мм (швейный метр), 1 мм (металлическая линейка), 0,1 мм (штангенциркуль), 0,01 мм (микрометр), 0,001 мм (инструментальный оптический микроскоп).

В отличие от объектов, подчиняющихся детерминированным закономерностям, предельная абсолютная погрешность ΔY параметра Y в объектах, подчиняющихся стохастическим закономерностям, зависит как от погрешности измерительного прибора $\Delta Y_{пр}$, так и от стохастической природы исследуемого объекта $\Delta Y_{ст}$. Математически это утверждение записывается следующим образом:

$$\Delta Y^2 = \Delta Y_{пр}^2 + \Delta Y_{ст}^2. \quad (8.1)$$

Если $\Delta Y_{пр} \gg \Delta Y_{ст}$, то $\Delta Y \approx \Delta Y_{пр}$. В этом случае стохастической природой исследуемого объекта можно пренебречь, и он с достаточной точностью описывается только детерминированными закономерностями.

Если $\Delta Y_{ст} \gg \Delta Y_{пр}$, то $\Delta Y \approx \Delta Y_{ст}$. В этом случае погрешностью измерительных приборов можно пренебречь, и исследуемый объект с достаточной точностью описывается только стохастическими закономерностями.

8.2.1. Теория

Пусть имеется некоторая аналитическая функция $Y = Y(x, z)$ от 2-х детерминированных факторов x и z . Параметр Y рассчитывается с помощью указанной функции по результатам измерений факторов x и z , которые определяются с предельной абсолютной погрешностью Δx и Δz . Изложим метод определения предельной относительной $\Delta Y/Y$, предельной абсолютной погрешности ΔY и параметра Y .

Предельная абсолютная погрешность измерения каждого фактора однозначно определяется погрешностью прибора (см. уравнение (8.1)), значение которой приводится в паспорте прибора.

Поясним понятие «**предельная абсолютная погрешность**». Дело в том, что истинное значение измеряемого фактора ξ неизвестно, а прибор позволяет измерить лишь его приближенное значение x (**истинные значения** впредь будем обозначать **греческими буквами**, а их экспериментальные значения – **латинскими**). Разность между истинным и измеренным значением $\xi - x$ составляет абсолютную погрешность определения фактора ξ . Но поскольку ни величина, ни знак абсолютной погрешности неизвестны, то для большей надежности за предельную абсолютную погрешность определения фактора ξ принимают ее самое большое значение – погрешность прибора $\delta \geq 0$. На самом деле абсолютная погрешность определения фактора ξ меньше погрешности прибора $|\xi - x| \leq \delta$, но т. к. эта величина принципиально непредсказуема, то за величину предельной абсолютной погрешности определения фактора принимают значение, равное погрешности прибора [27].

Прежде чем вывести несколько формул для определения предельной абсолютной и относительной погрешностей детерминированного параметра Y , напомним, что если $Y = Y(x, z)$, то дифференциал функции двух переменных рассчитывается по уравнению

$$dY(x, z) = Y'_x(x, z)dx + Y'_z(x, z)dz, \quad (8.2)$$

где Y'_x (Y'_z) – частная производная параметра Y по фактору x (z).

Пусть параметр Y является суммой двух функций $f(x)$ и $g(z)$, причем факторы x и z определяются с предельными абсолютными погрешностями Δx и Δz . Для оценки абсолютной погрешности параметра Y рассчитаем дифференциал dY , используя уравнение (8.2):

$$Y(x, z) = f(x) \pm g(z), \quad (8.3)$$

$$dY = f'_x(x)dx \pm g'_z(z)dz, \quad (8.4)$$

Заменив дифференциалы соответствующими приращениями $dY \approx \Delta Y$, $dx \approx \Delta x$, $dz \approx \Delta z$, получим уравнение для определения предельной абсолютной погрешности параметра Y :

$$\Delta Y = \left| f'_x(x) \right| \Delta x + \left| g'_z(z) \right| \Delta z. \quad (8.5)$$

Обратите внимание на то, что знак « $\pm$ » в уравнении (4) заменен знаком « $+$ » в уравнении (8.5), а значения производных взяты по модулю. Это объясняется тем, что оценивается максимально возможная предельная абсолютная погрешность.

Пусть параметр Y является произведением двух функций $f(x)$ и $g(z)$, причем факторы x и z также определяются с предельными абсолютными погрешностями Δx и Δz . Для оценки предельной относительной погрешности параметра Y рассчитаем дифференциал dY , используя уравнение (8.2):

$$Y(x, z) = f(x) \cdot g(z), \quad (8.6)$$

$$dY = \left[f(x) \cdot g(z) \right]'_x dx + \left[f(x) \cdot g(z) \right]'_z dz, \quad (8.7)$$

$$dY = f'_x(x)dx \cdot g(z) + f(x) \cdot g'_z(z)dz. \quad (8.8)$$

Разделив уравнение (8.8) на уравнение (8.6) и заменив дифференциалы соответствующими приращениями $dY \approx \Delta Y$, $dx \approx \Delta x$, $dz \approx \Delta z$, получим уравнение для определения предельной относительной погрешности параметра Y , который является произведением 2-х функций (объяснение появления модулей см. в тексте после уравнения (8.5)):

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \left| \frac{f'_x(x)}{f(x)} \right| \Delta x + \left| \frac{g'_z(z)}{g(z)} \right| \Delta z. \quad (8.9)$$

Предельная абсолютная погрешность ΔY параметра Y с помощью уравнения (8.9) рассчитывается следующим способом:

$$\Delta Y = \left(\left| \frac{f'_x(x)}{f(x)} \right| \Delta x + \left| \frac{g'_z(z)}{g(z)} \right| \Delta z \right) Y. \quad (8.10)$$

Используя такую же процедуру, найдем предельную относительную погрешность параметра Y , который является частным двух функций $f(x)$ и $g(z)$, причем факторы x и z также определяются с предельными абсолютными погрешностями Δx и Δz :

$$Y(x, z) = \frac{f(x)}{g(z)}, \quad (8.11)$$

$$dY = \left[\frac{f(x)}{g(z)} \right]'_x dx + \left[\frac{f(x)}{g(z)} \right]'_z dz, \quad (8.12)$$

$$dY = \frac{f'_x(x)dx}{g(z)} - \frac{f(x)g'_z(z)dz}{g^2(z)}, \quad (8.13)$$

$$\text{где} \quad \left[\frac{1}{g(z)} \right]' = \left[g^{-1}(z) \right]' = (-1) \cdot g^{-1}(z)g'_z(z) = -\frac{g'_z(z)}{g^2(z)}. \quad (8.14)$$

Разделив уравнение (8.13) на уравнение (8.11), получим

$$\frac{dY}{Y} = \frac{f'_x(x)dx}{g(z)} \cdot \frac{g(z)}{f(x)} - \frac{f(x)g'_z(z)dz}{g^2(z)} \cdot \frac{g(z)}{f(z)}. \quad (8.15)$$

Заменив дифференциалы соответствующими приращениями с учетом пояснений, данных после уравнения (8.5), получим

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \left| \frac{f'_x(x)}{f(x)} \right| \Delta x + \left| \frac{g'_z(z)}{g(z)} \right| \Delta z. \quad (8.16)$$

Обратите внимание на то, что уравнения (8.9) и (8.16) тождественны, и, следовательно, предельная относительная погрешность параметра Y рассчитывается по одной и той же формуле независимо от того, является параметр Y произведением или частным двух функций $f(x)$ и $g(z)$ (уравнения 8.6, 8.11).

После определения предельной абсолютной погрешности результат детерминированного эксперимента следует записать в виде $Y \pm \Delta Y$. Поскольку Y и ΔY – расчетные величины, то они могут быть получены с любым количеством знаков, поэтому важно корректно их округлить. Очевидно, что нет смысла приводить значение параметра Y до четвертого знака после запятой, если предельная абсолютная погрешность ΔY имеет значащую цифру уже в первом знаке после запятой.

Поэтому при записи результата будем придерживаться следующих правил округления:

1) если при округлении отбрасываются цифры 0, 1, 2, 3, 4, то сохраняемая цифра остается без изменений. Если при округлении отбрасываются цифры 5 (при условии, что после нее следуют еще другие цифры отличные от нуля), 6, 7, 8, 9, сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Если при округлении отбрасывается **только одна** цифра 5 (т. е. когда за ней стоят только нули), сохраняемая цифра, если она четная, остается без изменений, а если она нечетная, увеличивается на единицу;

2) предельную абсолютную погрешность округлить до 2-х значащих цифр;

3) если эти две значащие цифры 10, 11, ..., 54, то результат округления оставить без изменения;

4) если эти две значащие цифры 55, 56, ..., 98, 99, то результат округления повторно округлить до одной значащей цифры, т. е. до 60, 60, ..., 100, 100. Последний ноль, возникший в результате повторного округления, если он стоит в дробной части, в конечном результате не пишется;

5) после округления предельной абсолютной погрешности рассчитываемый параметр округлить до значащих цифр этой погрешности.

Приведем примеры корректной записи результатов расчета:

$$19,5312 \pm 0,0123 \rightarrow 19,531 \pm 0,012;$$

$$4,3251 \pm 0,1252 \rightarrow 4,33 \pm 0,13;$$

$$4,325 \pm 0,125 \rightarrow 4,32 \pm 0,12;$$

$$54,325 \pm 1,95 \rightarrow 54,3 \pm 2,0;$$

$$19,5552 \pm 0,0575 \rightarrow 19,555 \pm 0,058 \rightarrow 19,56 \pm 0,06;$$

$$0,01989 \pm 0,00783 \rightarrow 0,0199 \pm 0,0078 \rightarrow 0,020 \pm 0,008;$$

$$19,5312 \pm 0,0968 \rightarrow 19,531 \pm 0,097 \rightarrow 19,53 \pm 0,10;$$

$$1\,931,12 \pm 98,36 \rightarrow 1\,931 \pm 98 \rightarrow 1\,930 \pm 100;$$

$$978\,256 \pm 98\,432 \rightarrow 978\,000 \pm 98\,000 \rightarrow 980\,000 \pm 100\,000.$$

8.2.2. Алгоритм решения прикладных задач

1. Параметр $Y = f(x) \pm g(z)$, причем факторы x и z определяются с предельной абсолютной погрешностью Δx и Δz . Тогда предельная абсолютная погрешность ΔY находится из следующего уравнения:

$$\Delta Y = \left| f'_x(x) \right| \Delta x + \left| g'_z(z) \right| \Delta z.$$

2. Параметр $Y = f(x) \cdot g(z)$ или

$$Y = \frac{f(x)}{g(z)},$$

причем факторы x и z определяются с предельной абсолютной погрешностью Δx и Δz . Тогда предельная относительная $\Delta Y/Y$ и предельная абсолютная погрешности ΔY находятся из следующих уравнений:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \left| \frac{f'_x(x)}{f(x)} \right| \Delta x + \left| \frac{g'_z(z)}{g(z)} \right| \Delta z,$$

$$\Delta Y = \left(\left| \frac{f'_x(x)}{f(x)} \right| \Delta x + \left| \frac{g'_z(z)}{g(z)} \right| \Delta z \right) Y.$$

3. Для корректной записи рассчитываемого параметра $Y \pm \Delta Y$ используются правила округления, указанные в п. 8.2.1.

8.2.3. Базовая задача

На токарном станке отрезали две заготовки $\varnothing 40 \times 20$ из сталей марок Сталь 20 и Сталь 45. К сожалению, рабочий не пометил заготовки, и они были перепутаны. Знание марки необходимо, т. к., например, из Стали 45 путем закалки можно получить детали с большей прочностью и твердостью.

Возникла идея определить марку стали простым и дешевым способом – по плотности. Известно, что Сталь 20 имеет большую плотность, нежели Сталь 45, т. к. Сталь 20 содержит $\approx 0,2\%$ углерода, а Сталь 45 $\approx 0,45\%$ углерода (из справочника $\rho_{20} = 7,86 \text{ г/см}^3$, а $\rho_{45} = 7,81 \text{ г/см}^3$).

Рассчитаем плотность цилиндрической заготовки по формуле

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{4M}{\pi D^2 H}, \quad (8.17)$$

где ρ – плотность заготовки, г/см^3 ; M – масса заготовки, г ; V – объем заготовки, см^3 ; D – диаметр заготовки, см ; H – высота заготовки, см ; $\pi = 3,1415926535897932\dots$

Массу заготовок можно определить на весах разного класса точности с погрешностью 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 г. Линейные размеры также можно определить различными инструментами с погрешностью 1; 0,1; 0,01; 0,001 мм.

Следует отметить, что чем точнее инструмент, тем он дороже и тем труднее найти его в повседневной практике. Поэтому наша задача – подобрать дешевые и доступные инструменты, которые, тем не менее, позволили бы определить массу и линейные размеры заготовок с такой точностью, чтобы со 100 %-ной достоверностью различить заготовки по плотности и, следовательно, определить марку стали каждой заготовки.

Для того чтобы различить заготовки по плотности со 100 %-ной достоверностью, предельная абсолютная погрешность в определении плотности $\Delta \rho$ каждой заготовки не должна превышать % разницы между справочными значениями плотностей сталей обеих марок:

$$\Delta\rho = \frac{\rho_{20} - \rho_{45}}{4} = \frac{7.87 - 7.81}{4} = \frac{0.05}{4} = 0.0125 \approx 0.012 \text{ г/см}^3. \quad (8.18)$$

Округление сделано согласно п. 8.2.1.

$$\begin{cases} \rho_{45} = (7.822 \pm 0.012), \text{ г/см}^3; \\ \rho_{20} = (7.848 \pm 0.012), \text{ г/см}^3. \end{cases} \quad (8.19)$$

Обоснуем это утверждение. Определяя плотность Стали 45 с предельной погрешностью $0,012 \text{ г/см}^3$, в худшем случае, отталкиваясь от справочных данных, можно получить значение $\rho_{45} = 7,81 + 0,012 = 7,822 \text{ г/см}^3$, а для Стали 20 $\rho_{20} = 7,86 - 0,012 = 7,848 \text{ г/см}^3$.

Из уравнения (8.19) следует, что максимальное значение плотности Стали 45, определенное экспериментально, может быть $\rho_{45, \max} = 7,822 + 0,012 = 7,834 \text{ г/см}^3$, а минимальное значение плотности Стали 20, определенное экспериментально, может быть $\rho_{20, \min} = 7,848 - 0,012 = 7,836 \text{ г/см}^3$. Таким образом, если предельная абсолютная погрешность определения плотности составит $0,012 \text{ г/см}^3$ (смотрите уравнение (8.18)), интервалы экспериментальных значений плотностей заготовок не перекроются. Если же предельная абсолютная погрешность определения плотности заготовок будет больше $\Delta\rho > 0,012 \text{ г/см}^3$ (уже при $\Delta\rho = 0,013 \text{ г/см}^3$ – убедитесь самостоятельно), существует некоторая вероятность того, что интервалы экспериментальных значений плотностей заготовок могут перекрыться и со 100 % - ной достоверностью определить марку стали будет невозможно.

Обосновав предельное значение абсолютной погрешности определения плотности, рассчитаем относительную погрешность:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{0.012}{7.86} \approx \frac{0.012}{7.81} \approx 0.0015. \quad (8.20)$$

Согласно алгоритму 8.2.2 (п. 2) получаем

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta M}{M} + 2 \cdot \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta\pi}{\pi}. \quad (8.21)$$

Первые три слагаемых правой части уравнения (8.21) имеет смысл брать таким образом, чтобы они были равны между собой, т. е.

$$\frac{\Delta M}{M} \approx 2 \cdot \frac{\Delta D}{D} \approx \frac{\Delta H}{H} \approx \frac{0.0015}{3} = 0.00050. \quad (8.22)$$

Для расчета предельных абсолютных погрешностей по уравнению (8.22) можно воспользоваться приблизительными значениями массы, диаметра и высоты заготовок. Приблизительные значения диаметра и высоты каждой заготовки $D \approx 40 \text{ мм}$, $H \approx 20 \text{ мм}$ взяты из условия задачи $\varnothing 40 \times 20$. Приблизительное значение массы каждой заготовки определим расчетным путем по формуле: $M = \pi D^2 H \rho / 4 = 3,14 \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot 7,835 / 4 \approx 197 \text{ г}$ (за величину плотности взяли среднее справочное значение $(7,81 + 7,86) / 2 = 7,835$). Тогда из уравнения (8.22) следует, что

$$\Delta M \approx 0,0005 \cdot M = 0,0005 \cdot 197 \text{ г} = 0,0985 \text{ г} \approx 0,1 \text{ г}; \quad (8.23)$$

$$\Delta D \approx \frac{0,0005 \cdot D}{2} = \frac{0,0005 \cdot 40}{2} \text{ мм} = 0,01 \text{ мм}; \quad (8.24)$$

$$\Delta H \approx 0,0005 \cdot H = 0,0005 \cdot 20 \text{ мм} = 0,01 \text{ мм}. \quad (8.25)$$

Для того чтобы относительная погрешность $\Delta\pi/\pi$ не увеличивала погрешность определения плотности заготовок (см. уравнение (8.21)), возьмем число π с относительной погрешностью на два порядка меньше суммарной относительной погрешности (см. уравнение (8.20)), т. е. $\Delta\pi/\pi = 0,000015$.

Тогда с учетом правил округления п. 8.2.1 имеем

$$\Delta\pi \approx 0,000015 \cdot 3,14 \approx 0,000047.$$

Поскольку число $\pi = 3,1415926535897932\dots$, то его приближенными значениями являются 3 (–0,14); 3,1 (–0,042); 3,14 (–0,0016); 3,142 (+0,00041); 3,1416 (+0,000007); 3,13159 (–0,0000027) и т. д. (в скобках указана абсолютная погрешность выбранного приближения).

Для обеспечения абсолютной погрешности 0,000047 следует взять $\pi \approx 3,1416$. Тогда $\Delta\pi/\pi \approx 0,000007/3,1416 \approx 0,0000022$, что меньше выбранного значения $\Delta\pi/\pi = 0,000015$ в 7 раз. Заметим, что общепринятое значение $\pi = 3,14$ ($\Delta\pi/\pi \approx 0,00051$) и даже 3,142 ($\Delta\pi/\pi \approx 0,00013$) не обеспечило бы требуемую относительную погрешность в определении плотности.

Следует, однако, отметить, что число π , взятое с любым приближением, искажает результат расчета плотности на обеих заготовках в одну и ту же сторону и, таким образом, не меняет соотношения значений плотностей для сталей различных марок. Но для чистоты эксперимента число π лучше взять с такой погрешностью, чтобы она дополнительно не искажала результат, тем более сделать это легко.

Проанализировав уравнения (8.23, 8.24, 8.25), можно сделать вывод, что для определения плотности заготовок с допустимой предельной абсолютной погрешностью массу заготовок необходимо измерять на технических весах (погрешность 0,1 г), а диаметр и длину заготовок – с помощью микрометра (погрешность 0,01 мм).

Для расчетов плотности следует использовать $\pi = 3,1416$, т. к. такое приближение не увеличивает погрешность рассчитываемых параметров. Результаты измерений массы, диаметра и высоты заготовок выбранными инструментами с допустимой погрешностью, промежуточные, а также конечные результаты расчета плотности заготовок приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1

Данные по определению плотности заготовок

Заготовка	M, г	D, см	H, см	AM/M	$2AD/D$	AH/H	$\Delta\rho/\rho$	P, г/см ³	$\Delta\rho$, г/см ³
№ 1	196,6	4,001	2,001	0,00051	0,00050	0,00050	0,0015	7,8146	0,0118
№ 2	197,1	3,999	2,000	0,00051	0,00050	0,00050	0,0015	7,8463	0,0118

Плотность заготовок рассчитывалась по уравнению (8.17), предельные относительные и абсолютные погрешности определения плотности – по уравнению (8.21):

$$\rho_1 = \frac{4M}{\pi D^2 H} = \frac{4 \cdot 196.1}{3.1416 \cdot 4.001^2 \cdot 2.001} = 7.8146,$$

$$\rho_2 = \frac{4M}{\pi D^2 H} = \frac{4 \cdot 197.2}{3.1416 \cdot 3.999^2 \cdot 2.000} = 7.8463,$$

Согласно правилам округления (см. п. 8.2.1), приведем корректную запись результата:

$$\begin{cases} \rho_1 = 7.815 \pm 0.012 \text{ г/см}^3; \\ \rho_2 = 7.846 \pm 0.012 \text{ г/см}^3. \end{cases}$$

Таким образом, со 100 %-ной достоверностью можно утверждать, что материал заготовки № 1 – Сталь 45, а заготовки № 2 – Сталь 20, т. к. интервалы рассчитанных значений плотности не перекрываются.

8.2.4. Материалы для самостоятельной работы, лабораторных и практических занятий

Тесты

1. Предельная абсолютная ошибка определения параметра Y в общем случае определяется погрешностью измерительных приборов ΔY_{np} и стохастической природой исследуемого объекта ΔY_{ct} и рассчитывается по формуле:

а) $\pm \Delta Y = \pm \Delta Y_{np} \pm \Delta Y_{ct}$;

б) $\Delta Y^2 = \Delta Y_{np}^2 + \Delta Y_{ct}^2$;

в) $\Delta Y = \Delta Y_{np} + \Delta Y_{ct}$;

г) $\sqrt{\Delta Y^2} = \sqrt{\Delta Y_{np}^2} + \sqrt{\Delta Y_{ct}^2}$.

2. Факторы x и z в детерминированном эксперименте определены с предельной абсолютной погрешностью Δx и Δz . Если $Y = f(x) \cdot g(z)$, то

а) $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta z}{z}$;

б) $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f'_x(x)\Delta x}{f(x)} + \frac{g'_z(z)\Delta z}{g(z)}$;

в) $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f(x)\Delta x}{f'_x(x)} + \frac{g(z)\Delta z}{g'_z(z)}$;

г) $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f'_x(x)\Delta x}{f(x)} \pm \frac{g'_z(z)\Delta z}{g(z)}$.

3. Факторы x и z в детерминированном эксперименте определены с предельной абсолютной погрешностью Δx и Δz . Если $Y = f(x)/g(z)$, то

$$а) \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f'_x(x)\Delta x}{f(x)} - \frac{g'_z(z)\Delta z}{g(z)};$$

$$б) \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta x}{f(x)} + \frac{\Delta z}{g(z)};$$

$$в) \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f'_x(x)\Delta x}{f(x)} + \frac{g'_z(z)\Delta z}{g(z)};$$

$$г) \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f(x)\Delta x}{x} + \frac{g(z)\Delta z}{z}.$$

4. В какой формуле округление выполнено корректно:

а) $29,735 \pm 0,0778 \rightarrow 29,74 \pm 0,08$;

б) $29,745 \pm 0,0778 \rightarrow 29,74 \pm 0,08$;

в) $29,734 \pm 0,0778 \rightarrow 29,7 \pm 0,1$;

г) $29,7345 \pm 0,0778 \rightarrow 29,74 \pm 0,07$?

Вопросы для самопроверки

1. В чем концептуальное отличие детерминированных закономерностей от стохастических?

2. Какова природа погрешности определяемого параметра Y в детерминированном эксперименте?

3. Что такое предельная абсолютная погрешность?

4. Что такое предельная относительная погрешность?

5. Сформулируйте правила корректного округления рассчитанных параметров в детерминированном эксперименте.

Задачи для самостоятельного решения

Уровень 1

1. Мощность двигателя $W = I \cdot U$, где I – ток, U – напряжение. Рассчитать предельную абсолютную погрешность при определении мощности двигателя, если погрешность определения тока – ΔI , а напряжения – ΔU .

2. Дано $Y = x^5 \cdot e^{2z}$, причем факторы x и z определены с предельной абсолютной погрешностью Δx и Δz . Доказать, что

$$\frac{\Delta Y}{Y} = 5 \cdot \frac{\Delta x}{x} + 2 \cdot \Delta z.$$

3. Дано $Y = \ln(\beta x) \cdot \cos(\gamma z)$, причем факторы x и z определены с предельной абсолютной погрешностью Δx и Δz . Доказать, что

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta x}{x \cdot \ln(\beta x)} + \gamma \cdot \operatorname{tg}(\gamma z) \cdot \Delta z.$$

4. Дано $Y = \cos x / \sqrt[3]{z}$, причем факторы x и z определены с предельной абсолютной погрешностью Δx и Δz . Доказать, что

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \operatorname{tg} x \cdot \Delta x + \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta z}{z}.$$

Уровень 2

5. Вольтметром с относительной погрешностью 3 % измерено напряжение электрической сети 225 В. Омметром с относительной погрешностью 4 % измерено сопротивление электродвигателя 50 Ом. Определить мощность электродвигателя и ее абсолютную погрешность.

6. Автомобиль массой 4,8 т движется равномерно и прямолинейно со скоростью 72 км/ч. Предельная абсолютная погрешность определения массы автомобиля 150 кг, скорости – 1,5 м/с. Определить кинетическую энергию автомобиля и предельную абсолютную погрешность.

Уровень 3

7. Дано $Y = f(x) \cdot g(z) h(w)$, причем факторы x, z и w в детерминированном эксперименте определены с предельной абсолютной погрешностью $\Delta x, \Delta z, \Delta w$. Доказать, что

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f'_x(x)\Delta x}{f(x)} + \frac{g'_z(z)\Delta z}{g(z)} + \frac{h'_w(w)\Delta w}{h(w)}.$$

Уровень 4

8. Даны функции: $f(x) = \psi(x) + \xi(x)$ и $g(x) = \psi(x)$, причем $\xi(x)/\psi(x) \ll 1$ и $\xi'(x)/\psi'(x) \ll 1$. Рассчитать предельную относительную погрешность параметра Y , который задается следующим уравнением:

$$Y = \frac{f(x) - g(x)}{f(x) + g(x)}.$$

Предельная абсолютная погрешность определения фактора Δx :

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \left(\frac{\xi'(x)}{\xi(x)} + \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \right) \Delta x.$$

8.3. Обработка данных стохастического эксперимента. Одна выборка

Исследуемый объект, описываемый детерминистическими закономерностями, при заданных значениях факторов всегда находится в единственно возможном состоянии со 100 %-ной вероятностью. В отличие от этого, состояние объекта, описываемого стохастическими закономерностями, в отдельно взятом опыте концептуально непредсказуемо даже при соблюдении одинаковых условий эксперимента. Причем следует отметить, что один и тот же объект может описываться или детерминированными, или стохастическими закономерностями в зависимости от того, какие параметры этого объекта изучаются. Проиллюстрируем приведенное утверждение на примерах экспериментов с монетой.

Первый эксперимент состоит в определении массы монеты путем взвешивания на весах. Пусть масса монеты – $(m_0 \pm \Delta)$ г, где Δ – погрешность используемых весов ($\Delta \ll m_0$). Сколько бы опытов ни было проведено, в пределах погрешности будем наблюдать одно и то же значение массы, т. к. никакие случайные факторы в условиях данного эксперимента не могут

повлиять на результат измерения. Результаты этого эксперимента позволяют утверждать со 100 %-ной вероятностью, что масса монеты ($m_0 \pm \Delta$) г, и, следовательно, объект в данном примере описывается детерминированными закономерностями.

Во втором эксперименте будем подбрасывать ту же монету вверх и фиксировать, какой стороной она упала на землю. Результат каждого отдельного наблюдения в таком эксперименте принципиально непредсказуем. Можно только утверждать, что при большом количестве опытов каждая сторона монеты будет выпадать в ≈ 50 % случаев, т. к. в данном эксперименте наблюдаемый объект может принимать только 2 равновероятных состояния. Следовательно, в данном примере объект описывается стохастическими закономерностями.

В третьем эксперименте будем бросать ту же монету с некоторого расстояния на прямую, проведенную на земле. В каждом опыте будем измерять отклонение центра монеты от прямой (при перелете отклонения будем считать положительными, при недолете – отрицательными). Результат каждого опыта, так же как и в предыдущем примере, непредсказуем, поэтому объект и в этом эксперименте описывается стохастическими закономерностями. Различие заключается в том, что во втором примере спектр возможных состояний объекта дискретный, а в третьем – непрерывный.

В общем случае для объектов, подчиняющихся стохастическим закономерностям, результат опыта предсказывается только с некой вероятностью, определяемой некоторой функцией плотности вероятности, характеризующей поведение объекта в условиях данного эксперимента.

Во втором примере вероятность всех возможных состояний одинакова и равна 1/2. В третьем примере, из общих соображений, можно ожидать, что отклонения, близкие к нулю, будут наиболее вероятными, а большие отклонения – менее вероятными. Функция плотности вероятности отклонений в экспериментах такого рода будет иметь колоколообразный вид, описываемый законом нормального распределения случайной величины (распределение Гаусса – рис. 8.1).

Теоретическая функция нормального распределения однозначно задается двумя параметрами μ и σ :

$$N(Y, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(Y-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (8.26)$$

Число состояний исследуемого объекта, «реализуемое» при бесконечном числе опытов, образует генеральную совокупность. Положение вершины кривой, описываемой уравнением (8.26), относительно начала координат определяется параметром μ (генеральное среднее), а рассеяние случайной величины Y относительно генерального среднего μ определяется параметром σ (генеральное стандартное отклонение), что наглядно проиллюстрировано на рис. 8.1. Параметры Y , μ , σ имеют одинаковую размерность. Величина σ^2 называется генеральной дисперсией.

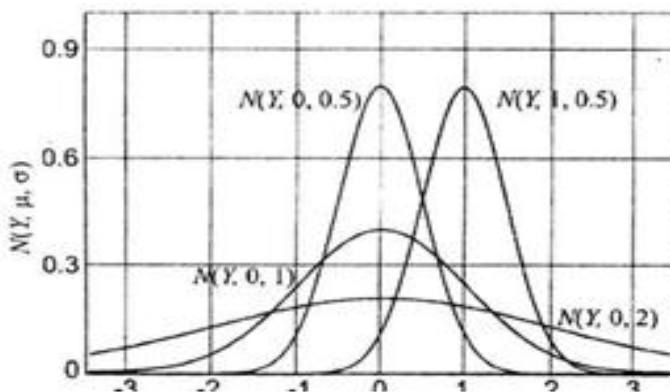


Рис. 8.1. Закон нормального распределения

Нормальный закон распределения обозначают следующим образом: $N(Y, 1, 0,5)$, где N – нормальный закон распределения случайной величины, Y – случайная величина, распределение которой описывается нормальным законом с параметрами: генеральное среднее $\mu = 1$ и генеральное стандартное отклонение $\sigma = 0,5$ (генеральная дисперсия $\sigma^2 = 0,25$).

Нормальный закон распределения случайных величин играет фундаментальную роль в математической статистике. Во-первых, он хорошо описывает распределение случайных отклонений исследуемого параметра, обусловленных множеством малых независимых факторов, носящих случайный характер, а во-вторых, многие функции параметра Y распределены по нормальному закону распределения при объеме выборки $n \geq 30$ даже в том случае, если сама случайная величина Y не подчиняется нормальному закону распределения.

В данном учебно-методическом пособии ограничимся изучением стохастических объектов, для которых случайные значения исследуемого параметра подчиняются нормальному закону распределения.

Уравнение (8.26) позволяет рассчитать вероятность попадания случайных значений параметра Y в некоторый интервал. Для приведенных ниже интервалов вероятность попадания случайных нормально распределенных величин Y при условии, что $p(-\infty < Y < +\infty) = 1$, такова:

$$p(-\sigma \leq Y \leq \sigma) = 0,6827, \quad (8.27)$$

$$p(-2\sigma \leq Y \leq 2\sigma) = 0,9545, \quad (8.28)$$

$$p(-3\sigma \leq Y \leq 3\sigma) = 0,9973. \quad (8.29)$$

Таким образом, можно считать, что практически все значения параметра Y , подчиняющиеся нормальному закону распределения, находятся в интервале $\mu \pm 3\sigma$ (на самом деле вероятность этого утверждения равна 99,73 %). Однако для анализа технических объектов используют менее жесткое условие: принято считать, что все случайные значения параметра Y ,

подчиняющиеся нормальному закону распределения, находятся в интервале $\mu \pm 2\sigma$, что недалеко от истины (вероятность этого утверждения равна 95,45 %). Поэтому в дальнейшем при статистической обработке экспериментальных данных используем доверительную вероятность $p = 0,95$.

Экспериментально определить генеральные параметры μ и σ достаточно «просто». Для этого необходимо определить **все случайные** значения генеральной совокупности, а затем рассчитать параметры μ и σ (например, по уравнениям (8.30)–(8.32) при $n = \infty$). Очевидно, что такой совет нереализуем на практике. Однако в том-то и состоит концептуальная суть математической статистики, что ее методы позволяют оценивать генеральные параметры μ и σ , используя для этого относительно небольшое количество случайных величин, образующих выборку. Однако «платой» за такую «экономия» будет некоторая погрешность в определении μ и σ , и причем тем большая, чем меньше объем выборки [27].

8.3.1. Теория

Оценка параметров генеральной совокупности по выборке

Рассмотрим некоторую выборку случайных величин $Y_1, \dots, Y_n$, принадлежащую генеральной совокупности с параметрами μ и σ . Оценка параметров μ и σ производится по выборочному среднему $\bar{Y}$ и выборочному стандартному отклонением S :

$$\bar{Y} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}; \quad (8.30)$$

$$S^2(Y) = \frac{(Y_1 - \bar{Y})^2 + \dots + (Y_n - \bar{Y})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}, \quad f = n-1; \quad (8.31)$$

$$S(Y) = \sqrt{S^2(Y)}, \quad f = n-1, \quad (8.32)$$

где f – число степеней свободы рассчитываемого выборочного параметра равно объему выборки за вычетом числа параметров, рассчитанных по этой же выборке и используемых при расчете.

Отметим несколько полезных свойств выборочного среднего и выборочной дисперсии (доказательства приведены в приложении 6):

$$\overline{CY} = C\bar{Y}, \quad (8.33)$$

$$\overline{Y + Z} = \bar{Y} + \bar{Z}, \quad (8.34)$$

$$S^2(C) = 0, \quad (8.35)$$

$$S^2(CY) = C^2 S^2(Y), \quad (8.36)$$

$$S^2(Y \pm Z) = S^2(Y) + S^2(Z), \quad (8.37)$$

$$S^2(\bar{Y}) = \frac{S^2(Y)}{n} \text{ или } S(\bar{Y}) = \frac{S(Y)}{\sqrt{n}}. \quad (8.38)$$

Приведем некоторые пояснения и уточнения к формулам (8.33)–(8.38). Случайные величины Y , CY , Z относятся к выборкам равного объема n например, $Y_1, \dots, Y_n$. Величины Y и Z независимы друг от друга, что означает равенство нулю коэффициента корреляции между ними (приложение 6, вывод уравнения (8.37)). Что касается уравнения (8.38), то в нем параметр $\bar{Y}$ рассматривается как случайная величина, а не константа. Поясним это. Пусть случайная величина Y принадлежит к некоторой генеральной совокупности с параметрами μ и σ . Выборка $Y'_1, \dots, Y'_n$ характеризуется выборочным средним $\bar{Y}'$. Если на базе той же генеральной совокупности провести еще несколько серий наблюдений, то получим $Y_1^n, \dots, Y_n^n; Y_1^m, \dots, Y_n^m$ и т. п.

Все они будут характеризоваться выборочными средними $\bar{Y}^n, \bar{Y}^m$ и т. п., т. е. величина $\bar{Y}$ сама является случайной величиной, которая к тому же подчиняется нормальному закону распределения с генеральным стандартным отклонением в $\sqrt{n}$ раз меньшим, чем генеральное стандартное отклонение случайной величины Y . Поэтому увеличение объема выборки повышает точность определения генерального среднего (полезное для экспериментаторов утверждение).

Проверка выборки случайных величин на промахи. В выборке иногда содержатся промахи (грубые ошибки), которые возникают при ошибочных действиях экспериментатора или незамеченном внешнем воздействии. Естественно, что промахи существенно искажают выборочные параметры $\bar{Y}$, S , а те, в свою очередь, искажают оценку генеральных параметров μ и σ . Поэтому прежде чем приступить к оценке параметров генеральной совокупности, необходимо провести статистический анализ экспериментальных данных, направленный на исключение промахов.

Выявление промахов осуществляют с помощью критерия Смирнова–Граббса следующим образом: сначала рассчитывают экспериментальное значение критерия Смирнова–Граббса:

$$\tau_s = \frac{\max |Y_i - \bar{Y}|}{S(Y)}, f = n - 2. \quad (8.39)$$

Величина Y является промахом, если

$$\tau_{\max} > \tau_{n-2, p}, \quad (8.40)$$

где $\tau_{n-2, p}$ – критическое значение критерия Смирнова–Граббса (приложение 1).

Математический смысл критерия Смирнова–Граббса: значение случайной величины, подчиняющейся нормальному закону распределения и лежащее за границей 3σ , при достаточно большом объеме выборки считается промахом.

При небольшом объеме выборки это требование становится более жестким, т. к. оценка генерального среднего и генерального стандартного отклонений по выборке относительно малого объема связано с относительно большой погрешностью.

Так, например, для выборки объемом $n = 10$ ($f = 8$) значение, лежащее за границей $2,29 \cdot S$, считается промахом (приложение 1).

После исключения одного промаха, оставшаяся выборка вновь подвергается проверке на промахи по такой же процедуре (находят новые выборочное среднее, выборочное стандартное отклонение, экспериментальное и критическое значения критерия Смирнова–Грabbса).

Проверка соответствия случайных величин выборки нормальному закону распределения. После исключения промахов необходимо проверить гипотезу о подчинении случайных величин «очищенной» выборки нормальному закону распределения.

Дело в том, что весь математический аппарат, применяемый для обработки экспериментальных данных, изложенный в этом учебно-методическом пособии, основан на предположении принадлежности случайных величин нормальному закону распределения.

Для проверки случайных величин выборки на принадлежность их нормальному закону существует несколько критериев. Приведем один из них, достаточно простой, для выборок с объемом $n < 120$:

$$\left| \frac{CAO}{S(Y)} - 0.7979 \right| < \frac{0.4}{\sqrt{n}}, \quad (8.41)$$

$$CAO = \frac{\sum_{i=1}^n |Y_i - \bar{Y}|}{n}, \quad (8.42)$$

Если выполняется неравенство (8.41), то с 95 %-ной доверительной вероятностью принимается гипотеза о том, что случайные величины «очищенной» выборки подчиняются закону нормального распределения.

Следует подчеркнуть, что в математической теории эксперимента проверка случайных величин выборки на промахи и на принадлежность их нормальному закону распределения не является необходимой операцией перед проведением дальнейших расчетов. Но в данном учебно-методическом пособии все математические выкладки будут производиться только со случайными величинами «очищенных» выборок, подчиняющихся нормальному закону распределения.

Оценка генеральных параметров μ и σ по данным выборки. Поскольку выборка имеет ограниченное количество случайных величин, параметры генеральной совокупности μ и σ оцениваются с некоторой погрешностью, определяемой посредством доверительных интервалов. Доверительный интервал для генерального среднего μ определяется по формуле (см. уравнение (8.38)):

$$\begin{cases} \Delta \bar{Y} = |\mu - \bar{Y}| < t_{n-1, p} S(\bar{Y}) = t_{n-1, p} \frac{S(Y)}{\sqrt{n}}; \\ \bar{Y} - t_{n-1, p} \frac{S(Y)}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{Y} + t_{n-1, p} \frac{S(Y)}{\sqrt{n}}, \end{cases} \quad (8.43)$$

где $t_{n-1, p}$ – критическое значение критерия Стъюдента (приложение 2).

Доверительный интервал для генеральной дисперсии σ^2 задается следующим неравенством:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1,(1-p)/2}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1,(1+p)/2}^2}, \quad (8.44)$$

где $\chi_{n-1,(1-p)/2}^2$, $\chi_{n-1,(1+p)/2}^2$ – нижнее и верхнее критические значения критерия Пирсона (приложение 3).

Определение минимального объема выборки, обеспечивающего требуемую точность в оценке генерального среднего. При проведении научных исследований преследуют две противоречивые цели: с одной стороны хотят получить максимальную точность (минимальную погрешность) при оценке генерального среднего, а с другой – выполнить как можно меньше опытов. Противоречие заключается в том, что высокая точность оценки генерального среднего требует большого числа опытов (см. уравнение (8.43)), а стремление уменьшить материальные затраты требует проведения малого количества опытов.

На практике приоритетным требованием является допустимая величина погрешности $\Delta \bar{Y}_0 = |\mu - \bar{Y}|$. Тогда минимальное количество опытов $n_{\min}$, при котором обеспечивается допустимая погрешность при оценке μ , можно было бы найти из уравнения

$$n_{\min} = \left(t_{n_{\min}-1,p} \frac{S(Y)}{\Delta \bar{Y}_0} \right)^2. \quad (8.45)$$

Однако с помощью уравнения (8.45) нельзя рассчитать $n_{\min}$, т. к. в его правой части содержится параметр $t_{n_{\min}-1,p}$, который сам зависит от $n_{\min}$. В связи с этим задача по определению минимального объема выборки $n_{\min}$, обеспечивающего допустимую погрешность ΔY_0 , решается в два этапа.

1. На первом этапе по данным исходной выборки объемом n по уравнениям (8.30)–(8.32), (8.43) и приложению 2 рассчитываются параметры $\bar{Y}$, S , $\Delta \bar{Y}$. Объем выборки n на первом этапе определяется интуитивно с учетом минимальных трудозатрат. Если получится, что $\Delta \bar{Y} < \Delta \bar{Y}_0$, то задача решена, интуиция не подвела экспериментатора. Если $\Delta \bar{Y} > \Delta \bar{Y}_0$, то переходят ко второму этапу.

2. На основе формулы (8.43) рассчитывают отношение $\Delta \bar{Y}_0 / S$:

$$\frac{\Delta \bar{Y}}{S} = \frac{t_{n_{\min}-1,p}}{\sqrt{n_{\min}}}. \quad (8.46)$$

В приложении 2 в столбце $t_{n_{\min}-1,p} / \sqrt{n}$ находят значение, близкое к расчитанной величине $\Delta \bar{Y}_0 / S$, а в столбце n – соответствующее ему $n_{\min}$ (округление производится в сторону больших значений n).

Важнейшим параметром, однозначно определяющим минимальное число опытов $n_{\min}$, является отношение $\Delta \bar{Y}_0 / S$. Чем больше это отношение, тем меньше $n_{\min}$. Если отношение $\Delta \bar{Y}_0 / S \geq 9$ (трудно представить практическую ценность такого требования), то из приложения 2 следует, что нужно проделать всего 2 опыта (меньше нельзя, т. к. для $n = 1$ невозможно рассчитать выборочное стандартное отклонение). Если отношение $\Delta \bar{Y}_0 / S = 0,3$, то из приложения 2 находим, что $n_{\min} = 45$ опытом. Поскольку $t_{\min-1,p} \rightarrow 1,96 \approx 2$ (смотрите приложение 2), то минимальное количество опытов $n_{\min}$ можно рассчитать по приближенной формуле (см., например, уравнение (8.43)) – $n_{\min} = (2S/\Delta \bar{Y})^2 = (2 \cdot 3,333)^2 = 44,4 \approx 45$ (в данном случае округление до ближайшего большего целого дает число 45), т. е. расчеты $n_{\min}$ и по приложению 2, и по приближенной формуле дают один и тот же результат. Для $\Delta \bar{Y}_0 / S < 0,3$ значения $n_{\min}$, рассчитанные по приложению 2 и по приближенной формуле, совпадают с еще большей точностью. Поэтому

$$n_{\min} = \begin{cases} 2, & \text{если } \Delta \bar{Y}_0 / S \geq 9; \\ \text{из условия } \frac{t_{n_{\min}-1,p}}{\sqrt{n_{\min}}} = \frac{\Delta \bar{Y}_0}{S}, & \text{если } 0,3 \leq \Delta \bar{Y}_0 / S < 9; \\ (2S/\Delta \bar{Y}_0)^2, & \text{если } \Delta \bar{Y}_0 / S < 0,3. \end{cases} \quad (8.47)$$

Если $0,3 \leq \Delta \bar{Y}_0 / S < 9$, то для определения $n_{\min}$ следует воспользоваться данными таблицы приложения 2.

8.3.2. Алгоритм решения прикладных задач

Дана выборка объемом n : $Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_n$.

1. Рассчитать выборочное среднее:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}.$$

2. Рассчитать выборочную дисперсию и выборочное стандартное отклонение:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}, f = n-1,$$

$$S = \sqrt{S^2}, f = n-1.$$

3. Проверить значения выборки на наличие в ней промахов по критерию Смирнова–Граббса.

3.1. Рассчитать экспериментальное значение τ_3 :

$$\tau_3 = \max \frac{|Y_i - \bar{Y}|}{S}, f = n - 2.$$

3.2. Найти по таблице приложения 1 критическое значение критерия Смирнова–Граббса $\tau_{n-2,n}$.

3.3. Величина Y_i является промахом, если $\tau_3 > \tau_{n-2,n}$.

Из выборки исключается **только одно** случайное значение.

4. Проверить соответствие случайных величин выборки закону нормального распределения:

$$\left| \frac{CAO}{S} - 0.7979 \right| < \frac{0.4}{\sqrt{n}},$$

$$CAO = \frac{\sum_{i=1}^n |Y_i - \bar{Y}|}{n}.$$

Если выполняется приведенное неравенство, то случайные значения параметра Y подчиняются нормальному закону распределения.

5. Рассчитать доверительный интервал при оценке генерального среднего μ по критерию Стьюдента (приложение 2):

$$\bar{Y} - \frac{t_{n-1,p} \cdot S(Y)}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{Y} + \frac{t_{n-1,p} \cdot S(Y)}{\sqrt{n}},$$

где $t_{n-1,p}$ – критическое значение критерия Стьюдента (приложение 2).

6. Рассчитать доверительный интервал при оценке генеральной дисперсии σ^2 по критерию Пирсона (приложение 3):

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1,(1-p)/2}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1,(1+p)/2}^2},$$

где $\chi_{n-1,(1-p)/2}^2$, $\chi_{n-1,(1+p)/2}^2$ – критические значения критерия Пирсона (приложение 3).

7. Рассчитать минимальное число опытов для обеспечения допустимой абсолютной погрешности $\Delta \bar{Y}_0$ при оценке генерального среднего μ .

Если $0,3 \leq \Delta \bar{Y}_0 / S < 9$, то для определения $n_{\min}$ следует воспользоваться данными таблицы приложения 2 [27].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Объем знаний и объем доступной информации увеличивается в геометрической прогрессии. Они удваиваются каждые 8–10 лет, а в некоторых научных областях еще быстрее. В информационную эпоху высокий выход научной и технической информации сопровождается ее ускоренным старением. А это, в свою очередь, ведет к ускоренному старению техники. Из разных источников информации известно, что технические изделия, в том числе изделия машиностроения, примерно на треть морально устарели и не отвечают современным требованиям. Создание машин и оборудования, основанных на устаревших научных и технических концепциях, неизбежно приводит к потерям в разных отраслях производства, замедляется производительность труда.

В настоящий период все исследования и разработки усложняются и становятся все дороже, и в то же время период использования их результатов под влиянием морального износа резко сокращается. Сроки разработки и освоения образцов новой техники и технологий не должны растягиваться на длительный срок потому, что нововведение может устареть на стадии выпуска.

Научные исследования требуют постоянного совершенствования исследовательского инструментария, чтобы наилучшим образом удовлетворить потребности общества в знаниях и расширить работы по фундаментальным и прикладным исследованиям. В настоящее время, когда требуется глубоко проникать в природу исследуемых объектов, уровни технического оснащения науки во многом предопределяют точность и надежность получаемой информации. Без совершенных экспериментальных и вычислительных средств невозможно решить многие задачи современной науки и техники. Высокий уровень оснащенности экспериментальных научных баз позволяет повышать качество исследований, а также научный и технический уровень информации и сокращать сроки разработок.

Современная наука немыслима без технических средств и коллектива исследователей. Однако дорогостоящее оборудование не в состоянии полностью заменить интеллект ученого. К научно-исследовательской работе необходимо привлекать талантливых людей, способных генерировать и разрабатывать перспективные научные и технические идеи. Нужен поиск таких организационных структур и методов управления наукой, которые бы максимально учитывали «человеческий» фактор, специфические интересы ученых и особенности их творческой деятельности.

В связи с этим можно привести слова академика П. Л. Капицы о том, что из трех способов воздействия на деятельность ученых – морального, финансового и кадрового – наиболее важен моральный. Чувствовать себя творцом, получать профессиональное признание, сознавать полезность выполняемой работы – вот те стимулы, которые оказывают наиболее сильное воздействие на интенсивность работ большинства ученых.

Литература

1. Альтшуллер, Г. С. Найти идею. Введение в теорию решения изобретательских задач / Г. С. Альтшуллер. – Новосибирск: Наука, 1986. – 209 с.
2. Альтшуллер, Г.С. Как стать гением: жизненная стратегия творческой личности / Г. С. Альтшуллер, И. М. Верткин. – Минск: Беларусь, 1994. – 479 с.
3. Алгоритм дипломного проектирования / С. Г. Антипов [и др.]. – М.: Колос, 2005. – 136 с.
4. Антонов, А. В. Психология изобретательского творчества / А. В. Антонов. – Киев: Вища школа, 1978. – 176 с.
5. Бовин, А. А. Управление инновациями в организациях / А. А. Бовин, Л. Е. Чередникова, В. А. Якимович. – М.: ОМЕГА-Л, 2009. – 415 с.
6. Современный эксперимент: подготовка, проведение, анализ результатов / В. Г. Блохин [и др.]. – М.: Радиосвязь, 1997.
7. Сущность понятия «инновации» и их классификация / Ф. Ф. Бездудный [и др.]. – Инновации, 1998. – № 2–3(13).
8. Быков, В. В. Методы науки / В. В. Быков. – М.: Наука, 1974. – 85 с.
9. Основа научных исследований и технического творчества / И. В. Белый [и др.]. – Харьков: Вища школа, 1989. – 199 с.
10. Бердышев, С. Н. Открытия и изобретения, которые должен знать современный человек/ С. Н. Бердышев. – М.: Рипол Классик, 2002. – 384 с.
11. Беспмятных, Н. Д. Математическое образование в Белоруссии: исторический очерк / Н. Д. Беспмятных. – Минск: Вышэйшая школа, 1975. – 286 с.
12. Патент: от идеи до прибыли / В. И. Блинников [и др.]. – М.: Мир, 2002. – 333 с.
13. Боно, Э. Рождение новой идеи: о нешаблонном мышлении: пер с англ. / Э. Боно. – М.: Наука, 1975. – 120 с.
14. Бор, Н. Единство человеческого знания / Н. Бор // Время искать: сб. / сост. В. Захаренко. – М.: Молодая гвардия, 1985. – С. 44–49.
15. Борн, М. Эксперимент и теория в физике / М. Борн. – М.: Наука, 1958. – Т. 66. – Вып. 3. – С. 374.
16. Буш, Г. Я. Рождение изобретательских идей/ Г. Я. Буш. – Рига: Лиесма, 1976. – 127 с.
17. Грановский, В. А. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях / В. А. Грановский, Т. Н. Сираз. – Л.: Атомиздат, 1990. – 228 с.
18. Методы синтеза технических решений /А. М. Дворянкин [и др.]. – Минск: РИВШ, 2007. – 304 с.
19. Демчук, М. И. Республика Беларусь: системные принципы устойчивого развития / М. И. Демчук, А. Т. Юркевич. – Минск: РИВШ, 2003. – 304 с.
20. Основы правовой охраны результатов технического творчества / В. Ф. Естафьев [и др.]. – М.: ИНИЦ Роспатента, 2003. – 130 с.
21. Рубашный, В. С. Инновационный менеджмент и интеллектуальная собственность: курс лекций / В. С. Рубашный. – Минск: ФУА информ, 2007. – 368 с.
22. Зильберглейт, М. А. Методика и техника подготовки курсовых и дипломных работ / М. А. Зильберглейт, Л. И. Петрова. – Минск: Бел. Наука, 2003. – 318 с.

23. Инженеру об изобретении. – М.: Атомиздат, 1974. – 290 с.
24. Исследования и изобретательство в машиностроении: учебное пособие для студентов машиностроительной специальности вузов / М. И. Пашкевич [и др.]. – Могилев: Бел.-Рос. Университет, 2005. – 294 с.
25. Колесников, А. Ф. Основы математической обработки результатов измерений / А. Ф. Колесников. – Томск: ТПУ, 1963. – 248 с.
26. Каталог инновационной продукции, рекомендуемой к внедрению и использованию в экономике Республики Беларусь / под общ. ред. А. М. Радькова. – Минск, 2005.
27. Леонов, А. Н. Основы научных исследований и моделирования / А. Н. Леонов, М. М. Демченко, В. Б. Ловкис. – Минск: БГАТУ, 2010. – 276 с.
28. Нагорский, И. С. Методические указания для выполнения курсовой работы по дисциплине «Основы научных исследований» / И. С. Нагорский. – Минск: БГАТУ, 2004. – 28 с.
29. Сабитова, В. Г. Основы научных исследований / В. Г. Сабитова. – Владивосток: ДГУ, 2005. – 60 с.
30. Шаршунов, В. А. Как найти и защитить свое изобретение / В. А. Шаршунов. – Минск: Мисанта, 2009. – 335 с.
31. Шумпетер, Й. Теория экономического развития / Й. Шумпетер. – М.: Прогресс, 1982.

Приложение 1

Критерий Смирнова-Граббса

Критическое значение критерия Смирнова-Граббса $\tau_{f,p}$ при числе степеней свободы f и доверительной вероятности $p = 0,95$ (уровень значимости $\alpha = 0,05$ – односторонний критерий)

$$\tau = \max \left| \frac{Y_i - \bar{Y}}{S} \right|$$

n	f	$\tau_{f,0.95}$
3	1	1,412
4	2	1,689
5	3	1,869
6	4	1,996
7	5	2,093
8	6	2,172
9	7	2,238
10	8	2,294
11	9	2,343
12	10	2,387
13	11	2,426
14	12	2,461
15	13	2,494
16	14	2,523
17	15	2,551
18	16	2,577
19	17	2,601
20	18	2,623
21	19	2,644
22	20	2,644
23	21	2,683
24	22	2,701
25	23	2,718
26	24	2,734
27	25	2,749
28	26	2,764
29	27	2,778
30	28	2,792
31	29	2,805
32	30	2,818
33	31	2,830
34	32	2,842
35	33	2,853
36	34	2,864
37	35	2,874
38	36	2,885

Приложение 2

Критерий Стьюдента

Критическое значение критерия Стьюдент $t_{f,p}$ при числе степеней свободы f и доверительной вероятности $p = 0,95$ (уровень значимости $\alpha = 0,025$ – двухсторонний критерий)

$$t = \frac{(\bar{Y} - \mu)\sqrt{n}}{S}$$

n	f	$t_{n-1,0.95}$	$t_{n-1,0.95} / \sqrt{n}$
2	1	12,67	8,985
3	2	4,303	2,484
4	3	3,182	1,591
5	4	2,776	1,242
6	5	2,571	1,049
7	6	2,447	0,925
8	7	2,365	0,836
9	8	2,306	0,769
10	9	2,262	0,715
11	10	2,228	0,672
12	11	2,201	0,635
13	12	2,179	0,604
14	13	2,160	0,577
15	14	2,145	0,554
16	15	2,131	0,533
17	16	2,120	0,514
18	17	2,110	0,497
19	18	2,101	0,482
20	19	2,093	0,468
21	20	2,086	0,455
22	21	2,080	0,443
23	22	2,074	0,432
24	23	2,069	0,422
25	24	2,064	0,413
26	25	2,060	0,404
27	26	2,056	0,396
28	27	2,052	0,388
29	28	2,048	0,380
30	29	2,045	0,373
31	30	2,042	0,367
32	31	2,040	0,361
33	32	2,037	0,355
34	33	2,035	0,349
35	34	2,032	0,344
36	35	2,030	0,338
37	36	2,028	0,333
38	37	2,026	0,329
39	38	2,024	0,324

40	39	2,023	0,320
41	40	2,021	0,316
42	41	2,020	0,312
43	42	2,018	0,308
44	43	2,017	0,304
45	44	2,015	0,300
46	45	2,014	0,297
47	46	2,013	0,294
48	47	2,012	0,290
49	48	2,011	0,287
50	49	2,010	0,284
51	50	2,009	0,281
52	51	2,008	0,278
53	52	2,007	0,276
54	53	2,006	0,273
55	54	2,005	0,270
56	55	2,004	0,268
57	56	2,003	0,265
58	57	2,002	0,263
59	58	2,002	0,261
60	59	2,001	0,258
61	60	2,000	0,256
62	61	2,000	0,254
63	62	1,999	0,252
64	63	1,998	0,250
65	64	1,998	0,248
66	65	1,997	0,246
67	66	1,997	0,244
68	67	1,996	0,242
69	68	1,995	0,240
70	69	1,995	0,238
∞	∞	1,960	0

Приложение 3

Критерий Пирсона

Критическое значение критерия Пирсона $\chi^2_{n-1,p}$ при числе степеней свободы f и доверительной вероятности $p = 0,95$ (уровень значимости $\alpha = 0,025$ – двухсторонний критерий)

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

f	$\chi^2_{n-1,0.975}$	$\chi^2_{n-1,0.025}$
1	0,000982	5,024
2	0,0506	7,378
3	0,216	9,348
4	0,484	11,143
5	0,831	12,833
6	1,237	14,449
7	1,690	16,013
8	2,180	17,535
9	2,700	19,023
10	3,247	20,483
11	3,816	21,920
12	4,404	23,337
13	5,009	24,736
14	5,629	26,119
15	6,262	27,488
16	6,908	28,845
17	7,564	30,191
18	8,231	31,526
19	8,907	32,852
20	9,591	34,170
21	10,283	35,479
22	10,982	36,781
23	11,689	38,076
24	12,401	39,364
25	13,120	40,664
26	13,844	41,923
27	14,573	43,195
28	15,308	44,461
29	16,047	45,722
30	16,791	46,979
31	17,539	48,232
32	18,291	49,480
33	19,047	50,725
34	19,806	51,966
35	20,569	53,203
36	21,336	54,437
37	22,106	55,668

38	22,878	56,896
39	23,654	58,120
40	24,433	59,342
41	25,215	60,561
42	25,999	61,777
43	26,785	62,990
44	27,575	64,201
45	28,366	65,410
46	29,160	66,617
47	29,956	67,821
48	30,755	69,023
49	31,555	70,222
50	32,357	71,420
51	33,162	72,616
52	33,968	73,810
53	34,776	75,002
54	35,586	76,192
55	36,398	77,380
56	37,212	78,567
57	38,027	79,752
58	38,844	80,936
59	39,662	82,117
60	40,482	83,298

Приложение 4

Критерий Фишера

Критические значения Фишера $F_{f_1, f_2, p}$ при числе степеней свободы f_1 и f_2 и доверительной вероятности $p = 0,950$ (уровень значимости $\alpha = 0,05$ – одно-сторонний критерий)

$$F = \max(S_1^2, S_2^2) / \min(S_1^2, S_2^2)$$

f_2	f_1																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0	243,9	244,7	245,4	245,9	246,5	246,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,42	19,42	19,43	19,43	19,44
3	10,13	9,552	9,277	9,117	9,013	8,941	8,887	8,845	8,812	8,786	8,763	8,745	8,729	8,715	8,703	8,692	8,683
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999	5,964	5,936	5,912	5,891	5,873	5,858	5,844	5,832
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,772	4,735	4,704	4,678	4,655	4,636	4,619	4,604	4,590
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,099	4,060	4,027	4,000	3,976	3,956	3,938	3,922	3,908
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787	3,726	3,677	3,637	3,603	3,575	3,550	3,529	3,511	3,494	3,480
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,687	3,581	3,500	3,438	3,388	3,347	3,313	3,284	3,259	3,237	3,218	3,202	3,187
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293	3,230	3,179	3,137	3,102	3,073	3,048	3,025	3,006	2,989	2,974
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,135	3,072	3,020	2,978	2,943	2,913	2,887	2,865	2,845	2,828	2,812
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,896	2,854	2,818	2,788	2,761	2,739	2,719	2,701	2,685
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,796	2,753	2,717	2,687	2,660	2,637	2,617	2,599	2,583
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832	2,757	2,714	2,671	2,635	2,604	2,577	2,554	2,533	2,515	2,499
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,646	2,602	2,565	2,534	2,507	2,484	2,463	2,445	2,428
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,707	2,641	2,588	2,544	2,507	2,475	2,448	2,424	2,403	2,385	2,368
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657	2,591	2,538	2,494	2,456	2,425	2,397	2,373	2,352	2,333	2,317
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,614	2,548	2,494	2,450	2,413	2,381	2,353	2,329	2,308	2,289	2,272
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577	2,510	2,456	2,412	2,376	2,342	2,314	2,290	2,269	2,250	2,233
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,544	2,477	2,423	2,378	2,340	2,308	2,280	2,256	2,234	2,215	2,198
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,393	2,348	2,310	2,278	2,250	2,225	2,203	2,184	2,167
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,488	2,420	2,366	2,321	2,283	2,250	2,222	2,197	2,176	2,156	2,139
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,464	2,397	2,342	2,297	2,259	2,226	2,198	2,173	2,151	2,131	2,114
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,442	2,375	2,320	2,275	2,236	2,204	2,175	2,150	2,128	2,109	2,091
24	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,423	2,355	2,300	2,255	2,216	2,183	2,155	2,130	2,108	2,088	2,070
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,405	2,337	2,282	2,236	2,198	2,165	2,136	2,111	2,089	2,069	2,051
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,388	2,321	2,265	2,220	2,181	2,148	2,119	2,094	2,072	2,052	2,034
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,373	2,305	2,250	2,204	2,166	2,132	2,103	2,078	2,056	2,036	2,018
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,359	2,291	2,236	2,190	2,151	2,118	2,089	2,064	2,041	2,021	2,003
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,346	2,278	2,223	2,177	2,138	2,104	2,075	2,050	2,027	2,007	1,989
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334	2,266	2,211	2,165	2,126	2,092	2,063	2,037	2,015	1,995	1,976
31	4,160	3,305	2,911	2,679	2,523	2,409	2,323	2,255	2,199	2,153	2,114	2,080	2,051	2,026	2,003	1,983	1,965
32	4,149	3,295	2,901	2,668	2,512	2,399	2,313	2,244	2,189	2,142	2,103	2,070	2,040	2,015	1,992	1,972	1,953
33	4,139	3,285	2,892	2,659	2,503	2,389	2,303	2,235	2,179	2,133	2,093	2,060	2,030	2,004	1,982	1,961	1,943
34	4,130	3,276	2,883	2,650	2,494	2,380	2,294	2,225	2,170	2,123	2,084	2,050	2,021	1,995	1,972	1,952	1,933

f_2	f_1																
	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	247,3	247,7	248,0	248,3	248,6	248,8	249,1	249,3	249,5	249,6	249,8	250,0	250,1	250,2	250,4	250,5	250,6
2	19,44	19,44	19,45	19,45	19,45	19,45	19,45	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,47	19,47
3	8,675	8,667	8,660	8,654	8,648	8,643	8,639	8,634	8,630	8,626	8,623	8,620	8,617	8,614	8,611	8,609	8,706
4	5,821	5,811	5,803	5,795	5,787	5,781	5,774	5,769	5,763	5,759	5,754	5,750	5,746	5,742	5,739	5,735	5,732
5	4,579	4,568	4,558	4,549	4,541	4,534	4,527	4,521	4,515	4,510	4,505	4,500	4,496	4,492	4,488	4,484	4,481
6	3,896	3,884	3,874	3,865	3,856	3,849	3,841	3,835	3,829	3,823	3,818	3,813	3,808	3,804	3,800	3,798	3,792
7	3,467	3,455	3,445	3,435	3,426	3,418	3,410	3,404	3,397	3,391	3,386	3,381	3,376	3,371	3,367	3,363	3,359
8	3,173	3,161	3,150	3,140	3,131	3,123	3,115	3,108	3,102	3,095	3,090	3,084	3,079	3,075	3,070	3,066	3,062
9	2,960	2,948	2,936	2,926	2,917	2,908	2,900	2,893	2,886	2,880	2,874	2,869	2,864	2,859	2,854	2,850	2,846
10	2,798	2,785	2,774	2,764	2,754	2,745	2,737	2,730	2,723	2,716	2,710	2,705	2,700	2,695	2,690	2,686	2,681
11	2,671	2,658	2,646	2,636	2,626	2,617	2,609	2,601	2,594	2,588	2,582	2,576	2,570	2,565	2,561	2,556	2,552
12	2,568	2,555	2,544	2,533	2,523	2,514	2,505	2,498	2,491	2,484	2,478	2,472	2,466	2,461	2,456	2,452	2,447
13	2,484	2,471	2,459	2,448	2,438	2,429	2,420	2,412	2,405	2,398	2,392	2,386	2,380	2,375	2,370	2,366	2,361
14	2,413	2,400	2,388	2,377	2,367	2,357	2,349	2,341	2,333	2,326	2,320	2,314	2,308	2,303	2,298	2,293	2,289
15	2,353	2,340	2,328	2,316	2,306	2,297	2,288	2,280	2,272	2,265	2,259	2,253	2,247	2,241	2,236	2,232	2,227
16	2,302	2,288	2,276	2,264	2,254	2,244	2,235	2,227	2,220	2,212	2,206	2,200	2,194	2,188	2,189	2,182	2,174
17	2,257	2,243	2,230	2,219	2,208	2,199	2,190	2,181	2,174	2,167	2,160	2,154	2,148	2,142	2,137	2,132	2,127
18	2,271	2,203	2,191	2,179	2,168	2,159	2,150	2,141	2,134	2,126	2,119	2,113	2,107	2,102	2,096	2,091	2,087
19	2,182	2,168	2,155	2,144	2,133	2,123	2,114	2,106	2,098	2,090	2,084	2,077	2,071	2,066	2,060	2,055	2,050
20	2,151	2,137	2,124	2,112	2,102	2,092	2,082	2,074	2,066	2,059	2,052	2,045	2,039	2,033	2,028	2,023	2,018
21	2,123	2,109	2,096	2,084	2,073	2,063	2,054	2,045	2,037	2,030	2,023	2,016	2,010	2,004	1,999	1,994	1,989
22	2,098	2,084	2,071	2,059	2,048	2,038	2,028	2,020	2,012	2,004	1,997	1,990	1,984	1,978	1,973	1,968	1,963
23	2,075	2,061	2,048	2,036	2,025	2,014	2,005	1,996	1,988	1,981	1,973	1,967	1,961	1,955	1,949	1,944	1,939
24	2,054	2,040	2,027	2,015	2,003	1,993	1,984	1,975	1,967	1,956	1,952	1,945	1,939	1,933	1,927	1,922	1,917
25	2,035	2,021	2,007	1,995	1,984	1,974	1,964	1,955	1,947	1,939	1,932	1,926	1,919	1,913	1,908	1,902	1,897
26	2,018	2,003	1,990	1,978	1,966	1,956	1,946	1,938	1,929	1,921	1,914	1,907	1,901	1,895	1,889	1,884	1,879
27	2,002	1,987	1,974	1,961	1,950	1,940	1,930	1,921	1,913	1,905	1,898	1,891	1,884	1,878	1,872	1,867	1,862
28	1,987	1,972	1,959	1,946	1,935	1,924	1,915	1,906	1,897	1,889	1,882	1,875	1,869	1,863	1,857	1,851	1,846
29	1,973	1,958	1,945	1,932	1,921	1,910	1,901	1,891	1,883	1,875	1,868	1,861	1,854	1,848	1,842	1,837	1,832
30	1,960	1,945	1,932	1,919	1,908	1,897	1,887	1,878	1,870	1,862	1,854	1,847	1,841	1,835	1,829	1,853	1,818
31	1,948	1,933	1,920	1,907	1,896	1,885	1,875	1,866	1,857	1,849	1,842	1,835	1,828	1,822	1,816	1,811	1,805
32	1,937	1,922	1,908	1,896	1,884	1,873	1,864	1,854	1,846	1,838	1,830	1,823	1,817	1,810	1,804	1,799	1,794
33	1,926	1,911	1,898	1,885	1,873	1,863	1,853	1,844	1,835	1,827	1,819	1,812	1,806	1,799	1,793	1,788	1,783
34	1,917	1,902	1,888	1,875	1,863	1,853	1,843	1,833	1,825	1,817	1,809	1,802	1,795	1,789	1,783	1,777	1,772

Приложение 5

Критерий Кохрена

Критическое значение критерия Кохрена $G_{f_1, f_2, p}$ при числе степеней свободы f_1 и N и доверительной вероятности $p = 0,95$ (уровень значимости $\alpha = 0,05$ – односторонний критерий)

$$G = \frac{\max_j S_j^2}{\sum_{j=1}^N S_j^2}$$

N	f_1						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,998	0,975	0,939	0,906	0,877	0,853	0,833
3	0,967	0,871	0,798	0,746	0,707	0,677	0,653
4	0,906	0,768	0,684	0,629	0,589	0,560	0,536
5	0,841	0,684	0,598	0,544	0,506	0,478	0,456
6	0,781	0,616	0,532	0,480	0,445	0,418	0,398
7	0,727	0,561	0,480	0,431	0,397	0,373	0,354
8	0,680	0,516	0,438	0,391	0,359	0,336	0,318
9	0,638	0,477	0,403	0,358	0,328	0,307	0,290
10	0,602	0,445	0,373	0,331	0,303	0,282	0,267
11	0,570	0,417	0,348	0,308	0,281	0,262	0,247
12	0,541	0,392	0,326	0,288	0,262	0,244	0,230
13	0,515	0,371	0,307	0,271	0,246	0,229	0,215
14	0,492	0,352	0,291	0,255	0,232	0,215	0,202
15	0,471	0,335	0,276	0,242	0,220	0,203	0,191
16	0,452	0,319	0,262	0,230	0,208	0,193	0,181
17	0,432	0,305	0,250	0,219	0,198	0,183	0,172
18	0,418	0,293	0,240	0,209	0,189	0,175	0,164
19	0,403	0,281	0,230	0,200	0,181	0,167	0,157
20	0,389	0,270	0,221	0,192	0,174	0,160	0,150
21	0,377	0,261	0,212	0,185	0,167	0,154	0,144
22	0,365	0,252	0,204	0,178	0,160	0,148	0,138
23	0,354	0,243	0,197	0,171	0,155	0,142	0,133
24	0,343	0,235	0,191	0,166	0,149	0,137	0,129
25	0,334	0,228	0,185	0,160	0,144	0,133	0,124
26	0,325	0,221	0,179	0,155	0,139	0,128	0,120
28	0,308	0,209	0,168	0,146	0,131	0,121	0,113
30	0,293	0,198	0,159	0,138	0,124	0,114	0,106
32	0,279	0,188	0,151	0,130	0,117	0,108	0,100

Приложение 6

Показатели преломления

Азот	1,00030
Воздух	1,00029
Вода	1,33
Кварц	1,54
Кислород	1,00027
Лед	1,31
Спирт этиловый	1,36
Стекло (обычное)	1,50

Приложение 7

Физические константы

Величина	Символ	Значение и единицы
Скорость света в вакууме	c	$2,997\,924\,58 \cdot 10^8$ м/с (точно) $\approx 3 \cdot 10^8$ м/с
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м (точно)
Электрическая постоянная	ϵ_0	$8,854\Phi \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Постоянная Планка	h	$6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Приведенная постоянная Планка	$\hbar = h/2\pi$	$1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Элементарный заряд	e	$1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	$5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² ·К ⁴)
Постоянная закона смещения Вина	b	$2,9 \cdot 10^{-3}$ К·м
Постоянная Ридберга	R R' = $R/\pi c$	$2,07 \cdot 10^{16}$ с ⁻¹ $1,097 \cdot 10^7$ м ⁻¹
Масса покоя электрона	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
Энергия покоя электрона	$m_e c^2$	0,511 МэВ
Масса покоя протона	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27}$ кг
Энергия покоя протона	$m_p c^2$	938,27 МэВ
Масса покоя нейтрона	m_n	$1,675 \cdot 10^{-27}$ кг
Энергия покоя нейтрона	$m_n c^2$	939,56 МэВ
Удельный заряд электрона	e/m_e	$1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Постоянная в законе Кулона	$k = 1/4/\pi\epsilon_0$	$9 \cdot 10^9$ Н·м ² /Кл ²
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_e = h/m_e c$	$2,426 \cdot 10^{-12}$ м
Комптоновская длина волны протона	$\lambda_p = h/m_p c$	$1,321 \cdot 10^{-15}$ м
Постоянная Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К

Приложение 8

Греческий алфавит (24 буквы)

Начертание букв	Название	Произношение	Латинская транскрипция
<i>A α</i>	áльфа (alpha)	а	a
<i>B β</i>	бэ́та (beta)	б	b
<i>Γ γ</i>	га́мма (gamma)	г	g
<i>Δ δ</i>	де́льта (delta)	д	d
<i>E ε</i>	э́псилон (epsilon)	е	ě (краткое)
<i>Z ζ</i>	дзэ́та (dzeta)	з, дз	z
<i>Η η</i>	э́та (eta)	э	ē (долгое)
<i>Θ θ</i>	тэ́та (фита) (theta)	т	th
<i>I ι</i>	йо́та (iota)	и	i
<i>Κ κ</i>	ка́ппа (kappa)	к	c
<i>Λ λ</i>	ла́мбда (lambda)	л	l
<i>Μ μ</i>	ми (мю) (my)	м	m
<i>N ν</i>	ни (ню) (ny)	н	n
<i>Ξ ξ</i>	кси (xi)	кс	x
<i>Ο ο</i>	омикрóн (omicron)	о	ō (краткое)
<i>Π π</i>	пи (pi)	п	p
<i>Ρ ρ, ϱ</i>	ро (rho)	р	r, rh
<i>Σ σ, ς</i>	сигма (sigma)	с	s
<i>Τ τ</i>	тау (tau)	т	t
<i>Υ υ</i>	ипсилóн (ypsilon)	и или немец. ü	у или u
<i>Φ φ</i>	фи (phi)	ф	ph
<i>Χ χ</i>	хи (chi)	х	ch
<i>Ψ ψ</i>	пси (psi)	пс	ps
<i>Ω ω</i>	омега (omega)	о	ō (долгое)

Приложение 9

Задание

раздела научного обеспечения государственной программы

_____ (наименование программы) _____
 цены по состоянию на «__» _____ 20__ г.

Номер и наименование задания. Срок выполнения задания (квартал, год). Основные технико-экономические показатели, характеризующие конкурентоспособность разрабатываемой продукции	Организации – исполнители задания. Руководитель задания (Фамилия, Имя, Отчество, контактные телефоны)	Срок выполнения НИ-ОК(Т)Р (квартал, год)	Объем финансирования НИ-ОК(Т)Р, всего (тыс. руб.), в том числе: республиканский бюджет, местный бюджет, государственный целевой бюджетный фонд, собственные средства, прочие средства	Срок выполнения работ по подготовке и постановке инноваций на производство и их освоению в производстве (квартал, год)	Объем финансирования работ по подготовке и постановке инноваций на производство и их освоению в производстве, всего (тыс. руб.), в том числе по организациям и источникам финансирования	Наименование конечной научно-технической продукции. Наименование и объем выпуска вновь освоенной продукции. Организация-изготовитель
1	2	3	4	5	6	7

Приложение 10
Этапы
выполнения задания раздела научного обеспечения государ-
ственной программы

(наименование программы) _____
 цены по состоянию на «__» _____ 20__ г.

Наимено- вание за- дания, этапы его выпол- нения	Организации- исполнители задания. Со- исполнители	Срок выпол- нения (квар- тал, год)	Результат выполне- ния этапа		Сметная стоимость работ (тыс. руб.)	Источник финанси- рования
			вид продук- ции, едини- ца измере- ния	коли- чество		
1	2	3	4	5	6	7

Приложение 11 **Карта технического уровня нового вида изделия** **(технологического процесса)**

Наименование изделия (технологии), задания и государственной программы:

Организация-исполнитель НИОК(Т)Р:

Организация-изготовитель (пользователь) вновь освоенной (новой) продукции: _____

Дата постановки вновь освоенной (новой) продукции на производство:

Наименования техничко-эко- номических показателей, цена за единицу продукции	Единица изме- рения	Значение показателей			Патенто- способ- ность	Исто- чники инфор- мации	Приме- чение
		плани- руемого вида про- дукции	лучшего отечест- венного аналога	лучшего зару- бежного аналога			
1	2	3	4	5	6	7	8

Приложение 12
Калькуляция
стоимости работ, выполняемых за счет средств
республиканского бюджета

по заданию _____ (наименование задания) _____

Срок выполнения задания (квартал, год): начало _____ окончание _____
 тыс. руб., в ценах по состоянию на «__» _____ 20__ г.

№ п/п	Наименование статей расходов	Всего	в том числе по годам		
			20__	20__	20__
1	2	3	4	5	6
1.	Материалы и комплектующие изделия				
2.	Заработная плата научно-производственного персонала				
3.	Отчисления в Фонд социальной защиты населения и другие отчисления в соответствии с действующим законодательством (указать какие)				
4.	Научно-производственные командировки				
5.	Работы и услуги сторонних организаций				
6.	Прочие прямые расходы				
7.	Накладные расходы				
8.	Прибыль				
	ИТОГО				

Приложение 13
Калькуляция
Расчет затрат на приобретение материалов,
покупных полуфабрикатов и комплектующих
изделий, финансируемых за счет средств
республиканского бюджета

по заданию _____ (наименование задания) _____

№ п/п	Наименование	Единица из- мере- ния	Количество по годам			Цена за еди- ницу, тыс. руб.	Стоимость, тыс. руб.				Обосно вание
			20__	20__	20__		Все- го	в том числе по годам			
								20__	20__	20__	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.	Материалы (указывается их наименование, марка и про- филь)										
2.	Покупные полуфабрикаты и комплектующие изделия (указывается их наименование, модель, марка, тип и т. п.)										
	ВСЕГО										

Учебное издание

Ерошов Анатолий Иванович

**ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
И ИННОВАЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ
Часть II**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

В авторской редакции

Корректор *С. М. Курбыко*
Компьютерная верстка *С. М. Курбыко*

Подписано в печать 31.01.2012. Формат 60×90 ¹/₁₆.

Бумага офсетная. Гарнитура Times. Ризография.

Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 5,15.

Тираж 20 экз. Заказ № 196.

Издатель и полиграфическое исполнение
учреждение образования «Международный государственный
экологический университет имени А.Д.Сахарова»

ЛИ № 02330/993 от 31.08.2011 г.
Республика Беларусь, 220070, г. Минск, ул. Долгобродская, 23

E-mail: info@iseu.by
<http://www.iseu.by>