

ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВЫЕ СВОЙСТВА ДЕКОМПОЗИЦИИ РАЗРЕЖЕННЫХ НЕДООПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Л. А. Пилипчук, А. А. Лагуто

*Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
e-mail: pilipchuk@bsu.by, lagutoa@yahoo.com*

Рассматривается эффективный алгоритм построения общего решения разреженной недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений с использованием теоретико-графовых свойств базиса пространства решений и алгоритмов декомпозиции.

Ключевые слова: разреженная недоопределенная система; декомпозиция; характеристический вектор; детерминант цикла; матрица детерминантов.

THE GRAPH-THEORETICAL PROPERTIES OF DECOMPOSITION OF SPARSE UNDERDETERMINED SYSTEM OF THE SPECIAL TYPE

L. A. Pilipchuk, A. A. Laguto

*Belarusian State University
Minsk, Belarus*

We present the effective algorithm for constructing the solution of sparse underdetermined systems of linear equations with using of the graph-theoretic properties of the basis of the solution space and the decomposition algorithms.

Keywords: sparse underdetermined system; decomposition; characteristic vector; determinant of cycle; matrix of determinants.

Рассмотрим разреженную недоопределенную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} = b_i, \quad i \in I, \quad (1)$$

$$\sum_{(i,j) \in U} \lambda_{ij}^t x_{ij} = \alpha_t, \quad t = \overline{1, q}, \quad (2)$$

где $S = (I, U)$ – конечный ориентированный связный граф без кратных дуг и петель, I – множество узлов графа, $m = |I| < \infty$, U – множество дуг графа, $n = |U| < \infty$, определенных на прямом произведении $I \times I$, $I_i^+(U) = \{j : (i, j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j : (j, i) \in U\}$,

$\lambda_{ij}^t, \alpha_t \in R, t = \overline{1, q}, (i, j) \in U, b = (b_i, i \in I)$ – вектор правой части системы (1). Предположим, что $m + q < n$ и для системы (1) выполняется условие $\sum_{i \in I} b_i = 0$. Согласно [1]

ранг матрицы системы (1) равен $|I| - 1$. Полагаем, что ранг матрицы системы (1) – (2) для связного графа S равен $m + q - 1$.

Опорой связного графа $S = (I, U)$ для системы (1) является покрывающее дерево графа S [2, 3]. Обозначим через $U_T \subset U$ – множество дуг покрывающего дерева. Опора графа S для системы (1) – (2) определяется согласно [1].

Теорема (сетевой критерий опорности). Множество дуг $U_K \subset U$ является опорой графа S для системы (1) – (2) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- множество дуг U_K может быть разделено на два множества U_T и U_C , такие, что $U_K = U_T \cup U_C, U_T \cap U_C = \emptyset$ и множество U_T составляет опору графа S для системы (1);
- $|U_C| = q$;
- определитель $\det \Lambda_C \neq 0$, где $\Lambda_C = (\Lambda_{\tau\rho}^t, t = \overline{1, q}; (\tau, \rho) \in U_C)$ – матрица, составленная из детерминантов циклов $\Lambda_{\tau\rho}^t = \lambda_{\tau\rho}^t + \sum_{(i, j) \in U_T} \lambda_{ij}^t \delta_{ij}^{\tau\rho}$, $t = \overline{1, q}$, порожденных дугами $(\tau, \rho) \in U_C$, относительно ограничений (2), где $\delta_{ij}^{\tau\rho} = (\delta_{ij}^{\tau\rho}, (i, j) \in U)$ – характеристический вектор, порожденный дугой $(\tau, \rho) \in U \setminus U_T$, относительно покрывающего дерева (I, U_T) [1].

Пусть $U_K = (U_T, U_C)$ – опора графа S для системы (1) – (2). Множество U_C будем называть множеством циклических дуг.

Согласно [1] общее решение системы (1) имеет вид

$$x_{ij} = \sum_{(\tau, \rho) \in U \setminus U_T} x_{\tau\rho} \delta_{ij}^{\tau\rho} + \tilde{x}_{ij}, (i, j) \in U_T, \quad (3)$$

где $\tilde{x} = (\tilde{x}_{ij}, (i, j) \in U)$ – некоторое частное решение системы (1), построенное по правилам [1], $\delta_{ij}^{\tau\rho}, (i, j) \in U$ – компоненты характеристического вектора, $(\tau, \rho) \in U \setminus U_T$.

Подставим общее решение (3) системы (1) в систему (2). В результате получим

$$\sum_{(i, j) \in U} \lambda_{ij}^t x_{ij} = \sum_{(\tau, \rho) \in U \setminus U_T} x_{\tau\rho} \left[\sum_{(i, j) \in U_T} \lambda_{ij}^t \delta_{ij}^{\tau\rho} + \lambda_{\tau\rho}^t \right] + \sum_{(i, j) \in U_T} \lambda_{ij}^t \tilde{x}_{ij} = \alpha_t, t = \overline{1, q}. \quad (4)$$

Введем обозначение

$$A^t = \alpha_t - \sum_{(i, j) \in U_T} \lambda_{ij}^t \tilde{x}_{ij}, t = \overline{1, q}. \quad (5)$$

Уравнения (4), согласно формуле (5), примут вид

$$\sum_{(\tau, \rho) \in U \setminus U_T} x_{\tau\rho} \Lambda_{\tau\rho}^t = A^t, t = \overline{1, q}. \quad (6)$$

Сгруппируем в (6) переменные, соответствующие множеству U_C

$$\sum_{(\tau,\rho) \in U_C} x_{\tau\rho} \Lambda_{\tau\rho}^t = A^t - \sum_{(\tau,\rho) \in U_N} x_{\tau\rho} \Lambda_{\tau\rho}^t, \quad t = \overline{1, q}. \quad (7)$$

Запишем уравнения (7) в матричной форме. Введем произвольную нумерацию дуг множества U_C . Пусть $l = l(\tau, \rho)$ – номер циклической дуги $(\tau, \rho) \in U_C$, $l = \overline{1, |U_C|}$. Таким образом, уравнения (7) могут быть представлены в виде

$$\Lambda_C x_C = \beta, \quad (8)$$

где $\Lambda_C = (\Lambda_{st}^t, t = \overline{1, q}; l = \overline{1, |U_C|})$, $l = l(\tau, \rho)$, $(\tau, \rho) \in U_C$; $x_C = (x_{l(\tau, \rho)}, l(\tau, \rho) = \overline{1, |U_C|})$;
 $\beta = (\beta_t, t = \overline{1, q})^T$, $\beta_t = A^t - \sum_{(\tau, \rho) \in U_N} x_{\tau\rho} \Lambda_{\tau\rho}^t$, $t = \overline{1, q}$.

В случае невырожденности матрицы Λ_C из (8) находим неизвестные x_C , соответствующие множеству циклических дуг U_C .

$$x_C = \Lambda_C^{-1} \beta. \quad (9)$$

Итак, общее решение системы (1) – (2) имеет вид

$$x_{\tau\rho} = \sum_{t=1}^q \omega_{kt} \beta_t, \quad (\tau, \rho) \in U_C \quad (10)$$

$$x_{ij} = \sum_{(\tau, \rho) \in U_N} x_{\tau\rho} \delta_{ij}^{\tau\rho} + \psi_{ij} + \tilde{x}_{ij}, \quad (i, j) \in U_T, \quad (11)$$

где $\psi_{ij} = \sum_{(\tau, \rho) \in U_C} x_{\tau\rho} \delta_{ij}^{\tau\rho}$ и $\Lambda_C^{-1} = (\omega_{st}, s, t = \overline{1, |U_C|})$.

Рассмотрим численный пример построения общего решения разреженной недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$-x_{2,1} - x_{4,1} - x_{7,1} = -6,$$

$$x_{2,1} + x_{2,4} + x_{2,5} + x_{2,6} - x_{7,2} = 15,$$

$$x_{3,4} + x_{3,5} - x_{6,3} = -6,$$

$$-x_{2,4} - x_{3,4} + x_{4,1} - x_{6,4} = 9,$$

$$-x_{2,5} - x_{3,5} - x_{7,5} = 0,$$

$$-x_{2,6} + x_{6,3} + x_{6,4} = -6,$$

$$x_{7,1} + x_{7,2} + x_{7,5} = -6,$$

$$-9x_{2,1} - 9x_{2,4} - 8x_{2,5} + 5x_{2,6} - 2x_{3,4} - 6x_{3,5} + 2x_{4,1} + 8x_{6,3} - 7x_{6,4} - 2x_{7,1} - 3x_{7,2} + 10x_{7,5} = 8,$$

$$2x_{2,1} + 10x_{2,4} + x_{2,5} - 5x_{2,6} - x_{3,4} + 3x_{3,5} - 9x_{4,1} - 6x_{6,3} + 7x_{6,4} + 2x_{7,1} + 10x_{7,2} + 10x_{7,5} = -1,$$

где $S = (I, U)$ – граф, представленный на рис. 1, $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $U = \{(2,1), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (4,1), (6,3), (6,4), (7,1), (7,2), (7,5)\}$. На рис. 2 представлено покрывающее дерево (I, U_T) графа S , где $U_T = \{(2,6), (4,1), (6,3), (7,1), (7,2), (7,5)\}$, $q = 2$.

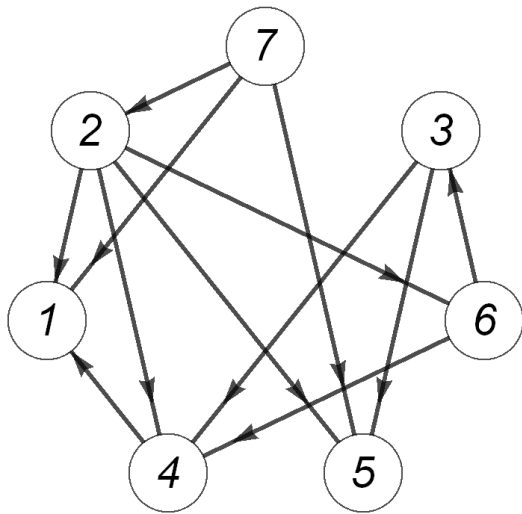


Рис. 1. Граф $S = (I, U)$

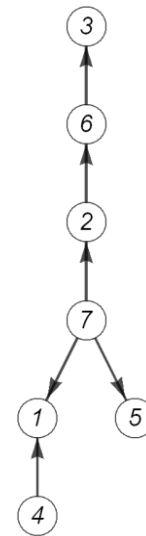


Рис. 2. Покрывающее дерево (I, U_T) графа S

В табл. 1 приведены характеристические векторы, порожденные дугами множества $U \setminus U_T = \{(2,1), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (6,4)\}$. В табл. 2 – детерминанты циклов, порожденных дугами $(\tau, \rho) \in U \setminus U_T$.

Таблица 1

Характеристические векторы, порожденные дугами множества $U \setminus U_T$

Характеристические векторы	Компоненты характеристических векторов, соответствующие дугам графа					
	(2,6)	(4,1)	(6,3)	(7,1)	(7,2)	(7,5)
$\delta(2,1)$	0	0	0	-1	1	0
$\delta(2,4)$	0	1	0	-1	1	0
$\delta(2,5)$	0	0	0	0	1	-1
$\delta(3,4)$	1	1	1	-1	1	0
$\delta(3,5)$	1	0	1	0	1	-1
$\delta(6,4)$	1	1	0	-1	1	0

Таблица 2

Детерминанты циклов, порожденных дугами $(\tau, \rho) \in U \setminus U_T$

Детерминанты	(2,1)	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(3,5)	(6,4)
$\Lambda_{\tau\rho}^1$	-10	-8	-21	12	-6	-1
$\Lambda_{\tau\rho}^2$	10	9	1	-13	-8	1

Приведем реализацию в системе *Wolfram Mathematica* процедуры *ComputeCharacteristicVectorsAndDeterminants* построения характеристических векто-

ров $\delta(\tau, \rho)$, $(\tau, \rho) \in U \setminus U_T$ и детерминантов $\Lambda'_{\tau\rho}$, $t = \overline{1, q}$, $(\tau, \rho) \in U \setminus U_T$ относительно покрывающего дерева (I, U_T) . Входными параметрами процедуры являются списки $lUminUt$, lUt множеств дуг $U \setminus U_T$ и U_T соответственно. В результате работы процедуры создается список cv всех характеристических векторов, каждый из которых получен процедурой *Determining*, с одновременным вычислением детерминантов циклов *determ*.

ComputeCharacteristicVectorsAndDeterminants[*lUn_*, *lUt_*] := Module[{*cv* = {}, *determ* = {}},

dN0 = Subscript[*x*, #1] → 0 & /@ *lUn*;

determ = ConstantArray[0, {*arcUminUtCount*, *q*}]

For[*n* = 1, *n* ≤ *arcUminUtCount*, *n*++,

arc = *lUn*[*n*];

dN = *dN0*; *dN*[*n*] = Subscript[*x*, *arc*] → 1;

(*Вычисляем компоненты характеристического вектора для дуг цикла *)

dTc = *Determining*[*arc*[[1]], *arc*[[2]], *tPred*, *tDir*, *tDepth*, *Ucycle*];

listUt0 = *Complement*[*lUt*, *Ucycle*];

Clear[*Ucycle*];

dT0 = Subscript[*x*, #1] → 0 & /@ *listUt0*;

(*Объединяем найденные компоненты характеристического вектора*)

dGeneral = *Join*[*dN*, *Sort*[*Join*[*dTc*, *dT0*]]]; *AppendTo*[*cv*, {*dGeneral*}]

(*Вычисляем детерминанты*)

determ[*n*] = *Table*[*Sort*[*dGeneral*][[*All*, 2]].*lambda*[[*i*]][[*All*, 2]], {*i*, *q*}]

];

Return[{*cv*, *determ*}]

];

Эффективный алгоритм построения ненулевых компонент характеристического вектора $\delta(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^{\tau\rho}, (i, j) \in U)$, порожденного дугой $(\tau, \rho) \in U \setminus U_T$, относительно покрывающего дерева (I, U_T) за $O(m)$ операций в наихудшем случае, представлен процедурой *Determining*. Входными параметрами процедуры *Determining* являются номера узлов k и l дуги $(k, l) \in U \setminus U_T$, порождающей базисный цикл, и списковые структуры *pred*, *dir*, *depth* представления корневых деревьев [3, 4]. Компоненты характеристического вектора, порожденного дугой (k, l) , сохраняются в списке *deltaC*, дуги цикла, образованного дугой (k, l) , – в списке *Ucycle*.

Determining[*k_*, *l_*, *pred_*, *dir_*, *depth_*, *Ucycle_*] := Module[{*deltaC* = {}},

Ucycle = *List*[]; *i* = *k*; *j* = *l*;

While[*i* != *j*,

If[*depth*[[*i*]] > *depth*[[*j*]],

{

If[*dir*[[*i*]] == 1, *AppendTo*[*deltaC*, Subscript[*x*, *pred*[[*i*]] → *i*] → 1];

AppendTo[*Ucycle*, *DirectedEdge*[*pred*[[*i*]], *i*],

AppendTo[*deltaC*, Subscript[*x*, *i* → *pred*[[*i*]]] → -1];

AppendTo[*Ucycle*, *DirectedEdge*[*i*, *pred*[[*i*]]]];

i = *pred*[[*i*]];

},

If[*depth*[[*j*]] > *depth*[[*i*]],

```

{
  If[dir[[j]]==1, AppendTo[deltaC,Subscript[x,pred[[j]]\to j]\to -1];
  AppendTo[Ucycle,DirectedEdge[pred[[j]],j]],
  AppendTo[deltaC,Subscript[x,j\to pred[[j]]]\to 1];
  AppendTo[Ucycle,DirectedEdge[j,pred[[j]]] ];
  j=pred[[j]];
},
{
  If[dir[[i]]==1, AppendTo[deltaC,Subscript[x,pred[[i]]\to i]\to 1];
  AppendTo[Ucycle,DirectedEdge[pred[[i]],i]],
  AppendTo[deltaC,Subscript[x,i\to pred[[i]]]\to -1];
  AppendTo[Ucycle,DirectedEdge[i,pred[[i]]] ]; ];
  If[dir[[j]]==1, AppendTo[deltaC,Subscript[x,pred[[j]]\to j]\to -1];
  AppendTo[Ucycle,DirectedEdge[pred[[j]],j]],
  AppendTo[deltaC,Subscript[x,j\to pred[[j]]]\to 1];
  AppendTo[Ucycle,DirectedEdge[j,pred[[j]]] ]; ];
  i=pred[[i]];
  j=pred[[j]];
}
] ]; ];
Return[deltaC];
]

```

Сформируем множество циклических дуг $U_C = \{(2,1), (2,4)\}$ и построим матрицу детерминантов Λ_C , соответствующую выбранным дугам:

$$\Lambda_C = \begin{pmatrix} -10 & -8 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}, \det \Lambda_C = -10 \neq 0.$$

Вычислим вектор β правой части системы (8):

$$\beta = \begin{pmatrix} -133 + 21x_{2,5} - 12x_{3,4} + 6x_{3,5} + x_{6,4} \\ 212 - x_{2,5} + 13x_{3,4} + 8x_{3,5} - x_{6,4} \end{pmatrix}.$$

Применим формулу (9) для нахождения вектора x_C . Вычислим частное решение \tilde{x} системы (1) [1]. Согласно (10) – (11), общее решение системы (1) – (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} x_{2,6} &= 12 + x_{3,4} + x_{3,6} + x_{6,4}, & x_{4,1} &= 88 + 20x_{2,5} + 2x_{3,4} + 14x_{3,5} + x_{6,4}, \\ x_{6,3} &= 6 + x_{3,4} + x_{3,5}, & x_{7,1} &= -\frac{321}{10} - \frac{19}{10}x_{2,5} - \frac{12}{5}x_{3,4} - \frac{11}{5}x_{3,5} - \frac{9}{10}x_{6,4}, \\ x_{7,2} &= \frac{261}{10} + \frac{29}{10}x_{2,5} + \frac{12}{5}x_{3,4} + \frac{16}{5}x_{3,5} + \frac{9}{10}x_{6,4}, & x_{7,5} &= -x_{2,5} - x_{3,5}, \\ x_{2,1} &= -\frac{499}{10} - \frac{181}{10}x_{2,5} + \frac{2}{5}x_{3,4} - \frac{59}{5}x_{3,5} - \frac{1}{10}x_{6,4}, & x_{2,4} &= 79 + 20x_{2,5} + x_{3,4} + 14x_{3,5}. \end{aligned}$$

В описанном методе решения недоопределенной разреженной системы линейных алгебраических уравнений применяется теория декомпозиции и ее теоретико-графовые свойства с учетом разреженности системы. Эффективность метода опреде-

ляется оценками промежуточных процедур: часть вычислений выполняется на небольших подмножествах дуг (на изолированных циклах, покрывающем дереве), одновременно вычисляются характеристические векторы и детерминанты циклов, обращается матрица детерминантов размера, намного меньшего, чем размер матрицы исходной системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Pilipchuk L. A. *Sparse Linear Systems and Their Applications*. Minsk : BSU, 2013.
2. Габасов Р., Кирилова Ф. М. *Методы линейного программирования* : в 3 ч. Минск : БГУ. 1980. Ч. 3 : Специальные задачи.
3. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S. Sparse linear systems: theory of decomposition, methods, technology, applications and implementation in wolfram mathematica // *American Institute of Physics. AIP Conf. Proc.* Vol. 1690, 060006 (2015); doi: 10.1063/1.4936744.
4. Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. N. J. : Prentice Hall, 1993.