ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ОБОБЩЕННЫМИ КРИТЕРИЯМИ

К. Г. Кузьмин, В. А. Емеличев

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
e-mail: kuzminkg@mail.ru, vemelichev@gmail.com

Рассматривается многокритериальный дискретный вариант инвестиционной задачи Марковица с обобщенными критериями, включающими критерии Вальда, Сэвиджа и другие, в случае, когда в трех пространствах параметров задачи заданы различные нормы Гельдера. Приводятся достижимые оценки радиусов устойчивости эффективных решений (портфелей) этой задачи.

Ключевые слова: многокритериальная инвестиционная задача; эффективный портфель; критерий Сэвиджа; критерий Вальда; радиус устойчивости.

POSTOPTIMAL ANALYSIS IN MULTICRITERIA PORTFOLIO OPTIMIZATION PROBLEMS WITH AGGREGATED CRITERIA

K. G. Kuzmin, V. A. Emelichev

Belarusian State University
Minsk, Belarus

We consider a multicriteria discrete variant of Markowitz's portfolio optimization model with aggregated criteria which includes Wald's, Savage's et al. We constructed lower and upper achievable bounds of the stability radius of an efficient optimum (portfolio) in the case of different Holder norms in three-dimension space of the problem parameters.

Keywords: multicriteria investment problem; efficient portfolio; Savage's criteria; Wald's criteria; stability radius.

Рассмотрим многокритериальный дискретный вариант задачи управления инвестициями Марковица [1] с критериями эффективности портфеля и упущенной выгоды. Для этого введем ряд обозначений. Пусть множество $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ – это множество номеров альтернативных инвестиционных проектов (активов), N_m – множество номеров возможных состояний рынка (рыночных ситуаций, сценариев развития) и N_s – множество номеров видов (показателей) эффективности инвестиционного проекта. И пусть e_{ijk} – ожидаемая оценка эффективности вида $k \in N_s$ инвестиционного проекта $j \in N_n$ в случае, когда рынок находится в состоянии $i \in N_m$, а r_{ijk} – мера экономического риска вида $k \in N_s$, которому подвергается инвестор, выбирая проект $j \in N_n$ в предположении, что рынок находится в состоянии $i \in N_m$.

Через $X \subseteq \mathbf{E}^n = \{0,1\}^n$ обозначим множество всех допустимых портфелей $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, состоящих из инвестиционных проектов x_j, $j \in N_n$; при этом $x_j = 1$, если проект j реализуется, и $x_j = 0$ – в противном случае.

На множестве портфелей X зададим векторную целевую функцию

$$f(x, A) = (f_1(x, A_1), f_2(x, A_2), ..., f_s(x, A_s)),$$

компонентами которой являются критерии эффективности портфеля или рисков упущенной выгоды:

$$f_k(x, A_k) = \operatorname*{extr}^{\mathrm{I}}_{k}{}_{i \in N_m} A_{ik} x = \operatorname*{extr}^{\mathrm{I}}_{k}{}_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} a_{ijk} x_j \to \operatorname*{extr}^{\mathrm{II}}_{k}{}_{x \in X}, \quad k \in N_s,$$

где $\mathrm{extr}_k^{\mathrm{I}}$ и $\mathrm{extr}_k^{\mathrm{II}}$ для каждого критерия $k \in N_s$ могут принимать любое из значений $\max$ или $\min$; $A_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$ – k-е сечение матрицы A, $A_{ik} = (a_{i1k}, a_{i2k}, ..., a_{ink})$ – i-я строка этого сечения, причем сама матрица $A = [a_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ состоит из элементов

$$a_{ijk} = \begin{cases} e_{ijk}, & \text{если } \mathrm{extr}_k^{\mathrm{II}} = \max, \\ r_{ijk}, & \text{если } \mathrm{extr}_k^{\mathrm{II}} = \min. \end{cases}$$

Под многокритериальной инвестиционной булевой задачей $Z^s(A)$, $s \in \mathbf{N}$, с обобщенными критериями будем понимать задачу поиска множества парето-оптимальных (эффективных) портфелей (множества Парето)

$$P^s(A) = \left\{ x \in X : \nexists x' \in X \quad \left(g(x, x', A) \le \mathbf{0} \;\&\; g(x, x', A) \ne \mathbf{0} \right) \right\},$$

где

$$g(x, x', A) = \left(g_1(x, x', A_1), g_2(x, x', A_2), \dots, g_s(x, x', A_s) \right),$$

$$g_k(x, x', A_k) = \begin{cases} f_k(x, A_k) - f_k(x', A_k), & \text{если } \mathrm{extr}_k^{\mathrm{II}} = \max, \\ f_k(x', A_k) - f_k(x, A_k), & \text{если } \mathrm{extr}_k^{\mathrm{II}} = \min, \end{cases} \quad k \in N_s.$$

Здесь и далее символ $\mathbf{0}$ обозначает, как обычно, нуль-вектор в пространстве соответствующей размерности.

Легко видеть, что частными случаями обобщенного критерия являются следующие известные критерии:

1) критерий (пессимизма) Вальда (MAXMIN):

$$f_k(x, A_k) = \min_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} e_{ijk} x_j \to \max_{x \in X},$$

2) критерий (риска) Сэвиджа (MINMAX):

$$f_k(x, A_k) = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} r_{ijk} x_j \to \min_{x \in X},$$

3) критерий крайнего оптимизма по доходности портфеля (MAXMAX):

$$f_k(x, A_k) = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} e_{ijk} x_j \to \max_{x \in X},$$

4) критерий крайнего оптимизма по риску портфеля (MINMIN):

$$f_k(x, A_k) = \min_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} r_{ijk} x_j \to \min_{x \in X}.$$

Тем самым, под задачей $Z^s(A)$ можно понимать любую из 4^s задач, которые могут представлять интерес для инвестора.

Неопределенность и некорректность исходной информации (элементов матрицы A) приводит к необходимости проведения параметрического анализа устойчивости задачи $Z^s(A)$ к возмущению ее параметров. Предельный уровень таких возмущений, сохраняющих выбранный наперед парето-оптимальный портфель, называют радиусом устойчивости этого портфеля. Величина радиуса устойчивости существенно зависит от метрик, заданных в пространствах параметров задачи.

Для любых $p, q, r \in [1, \infty]$ в пространствах $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^s$ зададим соответственно метрики Гельдера l_p, l_q и l_r. Тем самым, под нормой k-го сечения $A_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$ матрицы $A = [a_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ будем понимать число

$$\|A_k\|_{pq} = \left\| \left(\|A_{1k}\|_p, \|A_{2k}\|_p, \ldots, \|A_{mk}\|_p \right) \right\|_q, \quad k \in N_s,$$

а под нормой самой матрицы A – число

$$\|A\|_{pqr} = \left\| \left(\|A_1\|_{pq}, \|A_2\|_{pq}, \ldots, \|A_s\|_{pq} \right) \right\|_r.$$

Пусть u – это любое из чисел p, q или r. Для числа u введем понятие сопряженного с ним числа u', которое определяется равенством $1/u + 1/u' = 1$, причем $u' = 1$, если $u = \infty$, и $u = \infty$, если $u' = 1$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что областью изменений чисел u и u' является интервал $[1, \infty]$, а сами числа связаны указанными выше условиями, кроме того, полагаем, что $1/u = 0$ при $u = \infty$. Будем также использовать обозначение

$$t = \min\{p', q'\}.$$

Радиусом устойчивости портфеля $x^0 \in P^s(A)$ называется число

$$\rho_m^s(x^0, p, q, r) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \Xi = \varnothing, \end{cases}$$

где $\Xi = \left\{ \varepsilon > 0 : \forall A' \in \Omega(\varepsilon) \left(x^0 \in P^s(A + A') \right) \right\}$, $\Omega(\varepsilon) = \left\{ A' \in \mathbf{R}^{m \times n \times s} : \|A'\|_{pqr} < \varepsilon \right\}$.

Введем в рассмотрение оператор проектирования вектора $y = (y_1, y_2, \ldots, y_d) \in \mathbf{R}^d$, $d \in \mathbf{N}$, на неотрицательный ортант: $y^+ = [y]^+ = (y_1^+, y_2^+, \ldots, y_d^+)$, где $y_i^+ = [y_i]^+ = \max\{0, y_i\}$, $i \in N_d$. Таким образом, знак «+» над вектором означает положительную срезку этого вектора.

Для любых различных портфелей x^0 и x положим

$$\alpha(x,x^0)=\begin{cases}\dfrac{2^{1/p}}{\min\left\{\left\|x^0\right\|_{p'},\left\|x^0-x\right\|_{p'}\right\}}, & \text{если } \mathbf{0}\neq x^0\leq x,\\ +\infty, & \text{если } x^0=\mathbf{0},\\ \dfrac{1}{\left\|[x^0-x]^+\right\|_{p'}} & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$\beta(x,x^0)=\begin{cases}\sqrt[q]{1+(m-1)\dfrac{\left\|[x-x^0]^+\right\|_p^q}{\left\|x^0-x\right\|_p^q}}, & \text{если } q\in[1,\infty),\\ 1, & \text{если } q=\infty,\end{cases}$$

$$\hat{\alpha}(x^0,x)=\begin{cases}\alpha(x^0,x), & \text{если } \mathrm{extr}_k^{\mathrm{I}}=\max,\\ \alpha(x,x^0), & \text{если } \mathrm{extr}_k^{\mathrm{I}}=\min,\end{cases}\qquad \hat{\beta}(x^0,x)=\begin{cases}\beta(x^0,x), & \text{если } \mathrm{extr}_k^{\mathrm{I}}=\max,\\ \beta(x,x^0), & \text{если } \mathrm{extr}_k^{\mathrm{I}}=\min.\end{cases}$$

Введем также обозначения

$$\phi(x^0,p,q,r)=\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\frac{\left\|[g(x^0,x,A)]^+\right\|_r}{\left\|\left(\left\|x^0\right\|_{p'},\left\|x\right\|_{p'}\right)\right\|_t},$$

$$\psi_1(x^0,x,p,q,r)=\hat{\alpha}(x^0,x)\left\|[g(x^0,x,A)]^+\right\|_r,$$

$$\psi_2(x^0,x,p,q,r)=\hat{\beta}(x^0,x)\frac{\left\|[g(x^0,x,A)]^+\right\|_r}{\left\|x^0-x\right\|_{p'}},$$

$$\psi(x^0,p,q,r)=\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\min\left\{\psi_1(x^0,x,p,q,r),\psi_2(x^0,x,p,q,r)\right\}.$$

Теорема. Пусть $s,m\in\mathbf{N}$, $p,q,r\in[1,\infty]$. И пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$ задана норма l_p, в пространстве $\mathbf{R}^m$ – норма l_q и в пространстве $\mathbf{R}^s$ – норма l_r. Тогда для радиуса устойчивости $\rho_m^s(x^0,p,q,r)$ парето-оптимального портфеля $x^0\in P^s(A)$ многокритериальной инвестиционной булевой задачи $Z^s(A)$ справедливы следующие достижимые оценки:

$$\phi(x^0,p,q,r)\leq\rho_m^s(x^0,p,q,r)\leq\psi(x^0,p,q,r).$$

В связи с тем, что $\left\|[x-x^0]^+\right\|_p^q\leq\left\|x^0-x\right\|_p^q$, верно неравенство $\hat{\beta}(x^0,x)\leq m^{1/q}$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть $s,m\in\mathbf{N}$, $p,q,r\in[1,\infty]$. И пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$ задана норма l_p, в пространстве $\mathbf{R}^m$ – норма l_q и в пространстве $\mathbf{R}^s$ – норма l_r. Тогда для радиуса устойчивости $\rho_m^s(x^0,p,q,s)$ парето-оптимального портфеля $x^0\in P^s(A)$ задачи $Z^s(A)$ имеет место верхняя достижимая оценка:

$$\rho_m^s(x^0,p,q,r)\le m^{1/q}\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\frac{\|[g(x^0,x,A)]^+\|_r}{\|x^0-x\|_{p'}}.$$

Из следствия 1 легко вытекают результаты работ [2–4].

Задачу $Z^s(A)$, множество допустимых портфелей которой не содержит нулевого, будем обозначать $Z_0^s(A)$. Легко видеть, что при $p=1$ верно равенство

$$\alpha(x^0,x)=\begin{cases}2, & \text{если } \mathbf{0}\ne x^0\le x,\\ \infty, & \text{если } x^0=\mathbf{0},\\ 1 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Поэтому из теоремы вытекает следующий результат.

Следствие 2. Пусть $s,m\in\mathbf{N}$, $q,r\in[1,\infty]$. И пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$ задана норма l_1, в пространстве $\mathbf{R}^m$ – норма l_q и в пространстве $\mathbf{R}^s$ – норма l_r. Тогда для радиуса устойчивости $\rho_m^s(x^0,1,q,r)$ парето-оптимального портфеля $x^0\in P^s(A)$ задачи $Z_0^s(A)$ имеет место верхняя достижимая оценка:

$$\rho_m^s(x^0,1,q,r)\le 2\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\|[g(x^0,x,A)]^+\|_r.$$

Из следствия 2 вытекает ряд результатов работ [5, 6].

Несложно заметить, что $\psi_1(x^0,x,p,\infty,r)\ge\psi_2(x^0,x,p,\infty,r)$, поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. Пусть $s,m\in\mathbf{N}$, $p,r\in[1,\infty]$. И пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$ задана норма l_p, в пространстве $\mathbf{R}^m$ – норма l_∞ и в пространстве $\mathbf{R}^s$ – норма l_r. Тогда для радиуса устойчивости $\rho_m^s(x^0,p,\infty,r)$ парето-оптимального портфеля $x^0\in P^s(A)$ задачи $Z^s(A)$ справедливы достижимые оценки:

$$\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\frac{\|[g(x^0,x,A)]^+\|_r}{\left\|\left(\|x^0\|_{p'},\|x\|_{p'}\right)\right\|_1}\le\rho_m^s(x^0,p,\infty,r)\le\min_{x\in X\setminus\{x^0\}}\frac{\|[g(x^0,x,A)]^+\|_r}{\|x^0-x\|_{p'}}.$$

Отсюда вытекает ряд известных результатов, полученных в работах [7–9].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Markowitz H. M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. Oxford : Wiley-Blackwell, 1991.
2. Емеличев В. А., Коротков В. В. О радиусе устойчивости эффективного решения многокритериальной задачи портфельной оптимизации с критериями Сэвиджа // Дискретная математика. 2011. Т. 23, вып. 4. С. 33–38.
3. Emelichev V. A., Korotkov V. V. Stability analysis of Pareto optimal portfolio of multicriteria investment maximin problem in the Hölder metric // Bulletin of the Academy of Sciences of Moldova. Mathematics. 2012. № 3 (70). P. 63–70.
4. Emelichev V., Korotkov V., Nikulin Y. Post-optimal analysis for Markowitz's multicriteria portfolio optimization problem // J. of Multi-Criteria Decision Analysis. 2014. Vol. 21. P. 95–100.

5. Емеличев В. А., Коротков В. В., Кузьмин К. Г. Многокритериальная инвестиционная задача в условиях неопределенности и риска // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. № 6. С. 157–164.

6. Емеличев В. А., Коротков В. В. Исследование устойчивости решений векторной инвестиционной булевой задачи в случае метрики Гельдера в критериальном пространстве // Прикладная дискретная математика. 2012. № 4. С. 61–72.

7. Емеличев В. А., Коротков В. В. Об устойчивости эффективного решения векторной инвестиционной булевой задачи с минимаксными критериями Сэвиджа // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18, № 2. С. 3–10.

8. Emelichev V. A., Korotkov V. V., Kuzmin K. G. On stability of a Pareto-optimal solution of a portfolio optimization problem with Savage’s minimax risk criteria // Bulletin of the Academy of Sciences of Moldova. Mathematics. 2010. № 3 (64). P. 35–44.

9. Емеличев В. А., Шацов Р. П. Инвестиционная булева задача Марковица в условиях неопределенности, многокритериальности и риска // Прикладная дискретная математика. 2013. № 2 (20). С. 115–122.