К ГИПОТЕЗЕ ХАРТСФИЛДА – РИНГЕЛЯ ОБ АНТИМАГИЧНОСТИ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

В. Н. Калачев

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
e-mail: vitkalachev@gmail.com

Описывается гипотеза Хартсфилда – Рингеля об антимагичности связных графов и текущее состояние дел, связанных с ее исследованием. Приводятся результаты, полученные автором с помощью методов алгебраической декомпозиции: доказательства гипотезы для (1,2)-полярных и (1,2)-разложимых графов, для некоторых (1,*Q*)-полярных и (1,*Q*)-разложимых графов и для униграфов.

Ключевые слова: гипотеза Хартсфилда – Рингеля; антимагические графы; алгебраическая декомпозиция графов.

TO THE HARTSFIELD – RINGEL CONJECTURE ON THE ANTIMAGICNESS OF CONNECTED GRAPHS

V. N. Kalachev

Belarusian State University
Minsk, Belarus

In this paper the Hartsfield – Ringel conjecture on the antimagicness of connected graphs is described, as well as the current state of its research. Also, some results, obtained by the author using the algebraic graph decomposition methods, are given, more specifically: the proof of the conjecture for (1,2)-polar and (1,2)-decomposable graphs, some (1,*Q*)-polar and (1,*Q*)-decomposable graphs and also for unigraphs.

Keywords: Hartsfield – Ringel conjecture; antimagic graphs; algebraic graph decomposition.

ВВЕДЕНИЕ

В 1990 г. Хартсфилд и Рингель ввели в своей книге [1] понятие антимагической нумерации ребер графа.

Пусть $G=(V,E)$ – (n,m)-граф, а $\varphi: E \to \{1, 2, ..., m\}$ – некая инъективная функция. Определим на V функцию f, положив для $\forall v \in V\ f(v)=\sum_e \varphi(e)$, где e пробегает множество ребер, инцидентных v. Если такая f также оказывается инъективной, то функция φ называется антимагической нумерацией.

Графы, для которых такая нумерация возможна, были названы антимагическими. Также в [1] высказано предположение, что все связные графы с $n \geq 3$ являются антимагическими.

В общем случае гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута, хотя существует много работ, ей посвященных. Все имеющиеся сегодня результаты получены путем сужения задачи на некоторый класс графов.

Теория алгебраической декомпозиции графов (АДГ) была разработана в Минске Р. И. Тышкевич и ее учениками и зарекомендовала себя как эффективный способ решения различных задач на графах. Хотя АДГ изначально создавалась для решения алгоритмических задач и подсчета некоторых характеристик графов, последние результаты позволяют утверждать, что эта теория также применима и для исследования гипотез (например, сильной гипотезы Бержа или гипотезы Келли – Улама о реконструируемости).

Так, в 2008 г. М. Баррус в работе [2] доказал, что расщепляемые графы и 1-разложимые графы являются антимагическими. Этот результат был обобщен автором и перенесен на более широкие классы (1,2)-полярных и (1,2)-разложимых графов [3]. Также на основе результатов Барруса и полного описания структуры униграфов, полученного Р. И. Тышкевич в [4], было доказано, что связные униграфы являются антимагическими [5].

В настоящем докладе представлены эти результаты, а также результаты дальнейших исследований в области применимости АДГ к доказательству гипотезы Хартсфилда – Рингеля.

АНТИМАГИЧНОСТЬ (1,2)-ПОЛЯРНЫХ И (1,2)-РАЗЛОЖИМЫХ ГРАФОВ

Граф G называется расщепляемым (или (1,1)-полярным), если существует такое разбиение $V = A \bigcup B$, что порожденный подграф $G(A)$ является полным, а $G(B)$ – пустым.

Граф G называется 1-разложимым (или (1,1)-разложимым), если существует такое разбиение множества его вершин $V = A \bigcup B \bigcup C$, что порожденный подграф $G(A)$ является полным, $G(B)$ – пустым, а $G(C)$ – некоторым произвольным графом, связанным с $G(A)$ множеством всех возможных ребер $\{ac : a \in A, c \in C\}$.

Как уже было сказано, М. Баррус в [2] доказал, что расщепляемые и 1-разложимые графы являются антимагическими. Для доказательства был построен алгоритм нумерации ребер таких графов, а затем было доказано, что построенная нумерация удовлетворяет требованиям антимагичности.

Действуя аналогично, можно распространить этот результат на похожую, но более общую структуру, а именно (1,2)-полярные и (1,2)-разложимые графы.

Граф G называется (1,2)-полярным, если существует такое разбиение $V = A \bigcup B$, что порожденный подграф $G(A)$ является полным, а $G(B)$ – дизъюнктным объединением клик порядка не более 2.

Граф G называется (1,2)-разложимым, если существует такое разбиение $V = A \bigcup B \bigcup C$, что порожденный подграф $G(A)$ является полным, $G(B)$ – дизъюнктным объединением клик порядка не более 2, а $G(C)$ – некоторым произвольным графом, связанным с $G(A)$ множеством всех возможных ребер $\{ac : a \in A, c \in C\}$.

Нетрудно заметить, что от 1-разложимых (1,2)-разложимые графы отличаются только возможным наличием в нижней доле клик размерности 2 (в 1-разложимых графах в нижней доле допустимы только клики размерности 1, т. е. изолированные в $G(B)$ вершины), и таким образом (1,2)-разложимые графы действительно являются обобщением 1-разложимых.

В [3] автором был построен алгоритм нумерации ребер, аналогичный алгоритму Барруса, и доказана антимагичность получаемой нумерации.

Оказалось, что при $|A| = 2$ возможны случаи, когда после выполнения алгоритма $f(a_1) = f(a_2)$. Для разрешения этой проблемы пришлось рассматривать восемь частных случаев, в каждом из которых после работы основного алгоритма некоторым образом переставлялись метки на ребрах, инцидентных «проблемным» вершинам.

Та же проблема характерна и для оригинального алгоритма Барруса (о чем не было упомянуто в его статье), но там достаточно рассмотреть всего один элементарный частный случай и переставить метки соответствующим образом.

АНТИМАГИЧНОСТЬ (1,Q)-ПОЛЯРНЫХ И (1,Q)-РАЗЛОЖИМЫХ ГРАФОВ

Зная, что (1,1)-разложимые графы антимагические, и доказав антимагичность (1,2)-разложимых графов, следующим логичным шагом было бы попытаться обобщить результаты на (1,Q)-разложимые графы при $Q \geq 3$. Но проблема заключается в том, что алгоритм и его возможные обобщения работают только при условии $\deg b \leq \deg a$ и $\deg b \leq \deg c$, что уже в случае $Q = 3$ неверно. Более того, даже выполнение этих условий не гарантирует получения желаемых результатов во всех случаях.

Тем не менее, наложив на структуру (1,Q)-разложимого графа некоторые несложные ограничения, можно доказать его антимагичность.

Граф G называется (1,Q)-полярным, если существует такое разбиение $V = A \bigcup B$, что порожденный подграф $G(A)$ является полным, а $G(B)$ – дизъюнктным объединением клик порядка не более Q.

Граф G называется (1,Q)-разложимым, если существует такое разбиение $V = A \bigcup B \bigcup C$, что порожденный подграф $G(A)$ является полным, $G(B)$ – дизъюнктным объединением клик порядка не более Q, а $G(C)$ – некоторым произвольным графом, связанным с $G(A)$ множеством всех возможных ребер $\{ac : a \in A, c \in C\}$.

Пусть r_i – число вершин из A, не смежных с b_i, $i = \overline{1,|B|}$. Пусть $r = \min\{r_1, ..., r_{|B|}\}$, $r \in \{1, ..., |A| - 1\}$.

Несложно показать, что для одновременного выполнения $\deg b \leq \deg a$ и $\deg b \leq \deg c$ необходимо и достаточно одного из следующих условий:

1. $\deg_{G(B)} a \geq Q - r$ при $C = \varnothing$;
2. $\deg_{G(C)} c + 1 \geq Q - r$ при $C \neq \varnothing$.

Исходя из этого можно сформировать два набора условий:

I. $C = \varnothing, |A| \geq 3, \min_{a \in A} \deg_{G(B)} a \geq Q - r$;

II. $C \neq \varnothing,\ \min_{c \in C} \deg_{G(C)} c + 1 \geq Q - r$.

При выполнении одного из этих наборов условий обобщение алгоритма, использовавшегося в предыдущих случаях, успешно работает, строя антимагическую нумерацию ребер.

Стоит обратить внимание, что и здесь мы сталкиваемся с той же самой проблемой при $|A|=2$, что и раньше. Только при $Q \geq 3$ частных случаев становится гораздо больше (и далеко не все из них легко разрешимы), так что приходится отказываться от их полного разбора и ставить условие $|A| \geq 3$, позволяющее избежать затруднений. С другой стороны, удалось показать, что при $C \neq \varnothing$ проблема не возникает вообще. Для случая $Q = 2$, кстати, последнее утверждение также верно.

АНТИМАГИЧНОСТЬ УНИГРАФОВ

Еще одним направлением исследований гипотезы Хартсфилда – Рингеля с помощью АДГ представляются попытки характеризации неразложимых классов графов с последующей их антимагической нумерацией. В самом деле, ведь если все разложимые графы какого-то класса заведомо антимагичны, то для доказательства антимагичности всего класса остается только продемонстрировать антимагичность неразложимых его частей. Эффективность такого подхода можно продемонстрировать на примере униграфов.

Степенной последовательностью графа называется список степеней его вершин. Последовательность $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ называется графической, если существует граф (реализация последовательности d), степенная последовательность которого совпадает с d.

Если все реализации графической последовательности изоморфны, то эта последовательность называется униграфической, а ее реализация – униграфом. В 2000 г. Р. И. Тышкевич в [4] было получено полное описание структуры униграфов на основе теории 1-декомпозиции графов.

Так как расщепляемые и 1-разложимые графы являются антимагическими, для доказательства антимагичности связных униграфов оставалось только показать, что связные 1-неразложимые нерасщепляемые униграфы являются антимагическими.

Опишем все 1-неразложимые нерасщепляемые униграфы.

Определим следующие два класса графов:

1. Для произвольных натуральных чисел $p \geq 1$ и $q \geq 2$ через $U_2(p,q)$ обозначим дизъюнктное объединение совершенного паросочетания pK_2 и звезды $K_{1,q}$.

2. К дизъюнктному объединению цикла C_4 и совершенного паросочетания pK_2 добавим все ребра, соединяющие фиксированную вершину цикла C_4 и вершины графа pK_2. Полученный граф обозначим через $U_3(p)$.

Согласно [4] произвольный 1-неразложимый нерасщепляемый граф G является униграфом, если и только если G или $\overline{G}$ принадлежит списку:

$$U = \{C_5, rK_2, U_2(p,q), U_3(p) : r \geq 2, p \geq 1, q \geq 2\}.$$

Учитывая нашу цель (доказательство гипотезы об антимагичности), случаи C_5 и $\overline{C_5} \cong C_5$ являются элементарными, а графы rK_2 и $U_2(p,q)$ несвязны и поэтому не рассматривались (к слову, они гарантированно не антимагические, что просто доказать). Интерес представляли графы $U_3(p)$, $\overline{rK_2}$, $\overline{U_2(p,q)}$ и $\overline{U_3(p)}$, для каждого из которых в [5] была построена своя антимагическая нумерация, доказывая тем самым антимагичность связных униграфов в целом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Говоря о дальнейших перспективах исследования гипотезы об антимагичности, в первую очередь хочется обратить внимание на потенциал АДГ в этой области. С помощью АДГ уже получен ряд результатов, и это далеко не предел. Более того, уже имеется опыт доказательства с помощью методов АДГ других известных гипотез. Не исключено, что методы, примененные в их доказательстве, окажутся полезными и для исследования гипотезы Хартсфилда – Рингеля. И это не говоря уже о том, что сама теория АДГ в настоящее время активно развивается и постоянно представляет новые факты и методы, которые находят применение в самых различных сферах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Hartsfield N., Ringel G. Pearls in Graph Theory. Boston : Academic Press, Inc., 1990 (revised version, 1994). P. 108–109.
2. Barrus M. D. Antimagic labeling and canonical decomposition of graphs // Information Processing Letters J. 2010 (preprint, 2008). Vol. 110, iss. 7. P. 261–263.
3. Калачев В. Н. К гипотезе Хартсфилда – Рингеля: (1,2)-полярные и (1,2)-разложимые графы // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2014. № 3. С. 81–84.
4. Tyshkevich R. I. Decomposition of graphical sequences and unigraphs // Discrete Mathematics. 2000. Vol. 220. P. 201–238.
5. Калачев В. Н. К гипотезе Хартсфилда – Рингеля: связные униграфы // Тр. ин-та математики НАН Респ. Беларусь. 2014. Т. 22, № 2. С. 46–52.