```
coord[[1]],coord[[2]],coord[[3]],t]:→D[
(A[Position[coord,#][[1,1]]]Exp[I (ω t-(k1 x+k2 y+
k3 z))]),{x,nx},{y,ny},{z,nz},{t,nt}]&/@Drop[coord,-1];
%[[1]]
```

$$u[x]^{(nx\_Integer,ny\_Integer,nz\_Integer,nt\_Integer)}[x, y, z, t] :\to \partial_{\{x,nx\},\{y,ny\},\{z,nz\},\{t,nt\}}\left(A[\text{Position}[coord, x][[1, 1]]]\, e^{i\,(\omega t-(k1\, x+k2\, y+k3\, z))}\right)$$

```
masf=Table[
ForceComponents[f,Cartesian[x,y,z]][[i]]→0,{i,1,3}];
Simplify[Map[#[[1]]&,Simplify[res2/.masf/.subs1]]]/.Exp[
-I (k1 x+k2 y+k3 z-t ω)]→1;
Table[Coefficient[%[[i]],{A[1],A[2],A[3]}],{i,3}];
Det[%]//FullSimplify
```

$$-((k1^2+k2^2+k3^2)\,\mu-\rho\,\omega^2)^2\,((k1^2+k2^2+k3^2)\,(\lambda+2\,\mu)-\rho\,\omega^2)$$

УДК *681.3.06:519*

П. А. ПАВЛОВ

АНАЛИЗ РЕЖИМОВ ОРГАНИЗАЦИИ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

In work the comparative analysis of times of performance of set of competing processes is carried spent.

При исследовании математических моделей организации распределенных конкурирующих процессов в многопроцессорных системах (МС) с различной архитектурой значительное место отводится применению методов теории расписаний. При этом наиболее часто используется функционал задачи Беллмана - Джонсона и его различные модификации [1]. В данной статье проведен сравнительный анализ времени выполнения множества конкурирующих процессов на основе математических соотношений для *одинаково распределенных* конкурирующих процессов в асинхронном и двух базовых синхронных режимах [2].

Как и в работах [2, 3], будем рассматривать n, $n \geq 2$, конкурирующих процессов, использующих структурированный на s, $s \geq 2$, блоков программный ресурс, причем на множестве блоков Q_1, Q_2, ..., Q_s установлен линейный порядок их выполнения, $[t_{ij}]$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,s}$ - матрица времени выполнения блоков программного ресурса, где t_{ij} - время выполнения j-го блока i-го процессом. Предполагается, что выполнение процессов осуществляется в МС с p, $p \geq 2$, процессорами, и все n процессов используют одну и ту же копию структурированного на блоки программного ресурса. При этом процесс называется *распределенным,* если все блоки или часть из них выполняются на разных процессорах.

Систему конкурирующих процессов будем называть *одинаково распределенной,* если значения времени выполнения блоков Q_j, $j=\overline{1,s}$, программного ресурса каждым из процессов совпадают, т. е.

$$t_{11}=t_{12}= \ldots =t_{1s}= t'_1,$$
$$t_{21}=t_{22}= \ldots =t_{2s}= t'_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$t_{n1}=t_{n2}= \ldots =t_{ns}= t'_n.$$

Обозначим $T^n = \sum_{i=1}^{n} t'_i$ - суммарное время выполнения каждого из блоков n процессами.

В [3] введен и исследован базовый *асинхронный режим,* который предполагает отсутствие простоев процессоров при условии готовности блоков, а также «пролеживания» блоков при наличии процессоров. Для данного режима получены математические соотношения для вычисления наименьшего общего времени выполнения множества конкурирующих неоднородных, однородных и одинаково распределенных процессов. Сформулирована и доказана

Теорема 1. Минимальное общее время выполнения n, $n \geq 2$, одинаково распределенных конкурирующих процессов, использующих структурированный на s, $s \geq 2$, блоков программный ресурс в многопроцессорной системе с p, $p \geq 2$ процессорами составляет величину T^{ac}_{op} , равную

$$T^{ac}_{op}(p,n,s) = \begin{cases} T^n + (s-1)\max\limits_{1 \leq i \leq n} t'_i \text{ при } s \leq p \text{ или } s > p, \text{ но } T^n \leq p \max\limits_{1 \leq i \leq n} t'_i; \\ kT^n + (p-1)\max\limits_{1 \leq i \leq n} t'_i \text{ при } s = kp, k > 1, T^n > p \max\limits_{1 \leq i \leq n} t'_i; \\ (k+1)T^n + (r-1)\max\limits_{1 \leq i \leq n} t'_i \text{ при } s = kp + r, k \geq 1, 1 \leq r < p, T^n > p \max\limits_{1 \leq i \leq n} t. \end{cases}$$

Аналогично в [2] введены и исследованы *первый синхронный режим,* обеспечивающий непрерывное выполнение блоков программного ресурса внутри каждого из процессов, и *второй синхронный режим,* способствующий непрерывному выполнению каждого блока всеми процессами. Для данных режимов имеют место следующие теоремы.

Теорема 2. В первом синхронном режиме взаимодействия процессов, процессоров и блоков для любых $p \geq 2$, $n \geq 2$, $s \geq 2$ минимальное общее время выполнения n одинаково распределенных конкурирующих процессов определяется следующим образом:

$$T_{op}^1(p,n,s)=\begin{cases} T^n+(s-1)\left[t_n'+\sum\limits_{i=2}^{n}\max\{t_{i-1}'-t_i',0\}\right] \text{ при } s\le p;\\ kT_{op}^1(p,n,p)-(k-1)\min\{\omega_1,\omega_2\} \text{ при } s=kp,\ k>1;\\ kT_{op}^1(p,n,p)+T_{op}^1(p,n,r)-(k-1)\min\{\omega_1,\omega_2\}-\min\{\xi_1,\xi_2\}\\ \text{при } s=kp+r,\ k\ge 1,\ 1\le r<p, \end{cases}$$

где

$$T_{op}^1(p,n,p)=\sum_{i=1}^{n}t_i'+(p-1)\left[t_n'+\sum_{i=2}^{n}\max\{t_{i-1}'-t_i',\ 0\}\right],$$

$$\omega_1=(p-1)\min\{t_1',\ t_n'\},\quad \omega_2=T_{op}^1(p,n,p)-p\max_{1\le i\le n}t_i',$$

$$T_{op}^1(p,n,r)=\sum_{i=1}^{n}t_i'+(r-1)\left[t_n'+\sum_{i=2}^{n}\max\{t_{i-1}'-t_i',\ 0\}\right],$$

$$\xi_1=(r-1)\min\{t_1',\ t_n'\}+(p-r)t_n',$$

$$\xi_2=T_{op}^1(p,n,p)-\max_{1\le i\le n}\left(T_{op}^1(p,i,p)-T_{op}^1(p,i,r)+rt_i'\right).$$

Теорема 3. Минимальное общее время выполнения множества конкурирующих одинаково распределенных процессов во втором синхронном режиме при любых $p\ge2,\ n\ge2,\ s\ge2$ определяется по формулам:

$$T_{op}^2(p,n,s)=\begin{cases} T^n+(s-1)\max\limits_{1\le i\le n}t_i' \text{ при } s\le p \text{ или } s>p, \text{ но } T^n\le p\max\limits_{1\le i\le n}t_i';\\ kT^n+(p-1)\max\limits_{1\le i\le n}t_i' \text{ при } s=kp,\ k>1,\ T^n>p\max\limits_{1\le i\le n}t_i';\\ (k+1)T^n+(r-1)\max\limits_{1\le i\le n}t_i' \text{ при } s=kp+r,\ k\ge1,\ 1\le r<p,\ T^n>p\max\limits_{1\le i\le n}t. \end{cases}$$

Большой интерес представляет задача сравнительного анализа асинхронного режима взаимодействия распределенных конкурирующих процессов и базовых синхронных режимов.

Сравнительный анализ времени выполнения множества распределенных конкурирующих процессов проведем на классе одинаково распределенных процессов.

Пусть $\beta=\left\{(t_1',t_2',\dots,t_n'),\ T^n=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i',\ t_i'>0\right\}$ - множество всех допустимых систем одинаково распределенных конкурирующих процессов. Выделим из β подмножество

$$\mathrm{H}_n(T^n)=\{(t_1',\ t_2',\ \dots,\ t_n')\ |\ t_1'\le t_2'\le\dots\le t_l'\ge t_{l+1}'\ge\dots\ge t_n',\ l=\overline{1,\ n}\}.$$

Тогда имеет место

Теорема 4. Для любой одинаково распределенной системы $\delta\in \mathrm{H}_n(T^n)$ и $p\ge2$, $n\ge2$, $s\ge2$ в случае ,$s\le p$ минимальное общее время выполнения множества одинаково распределенных конкурирующих процессов в асинхронном и базовых синхронных режимах совпадает.

Действительно, пусть $t_l'=\max\limits_{1\le i\le n}t_i'$. Тогда для асинхронного режима и второго синхронного, обеспечивающего непрерывное выполнение каждого блока всеми процессами для любой допустимой одинаково распределенной системы $\beta=(t_1',\ t_2',\ \dots,\ t_n')$, в том числе и для любой $\delta\in \mathrm{H}_n(T^n)$ при $s\le p$, имеет место формула

$$T_{op}^{ac}(p,n,s)=T_{op}^2(p,n,s)=T^n+(s-1)t_l'.$$

Пусть далее взаимодействие процессов, процессоров и блоков осуществляется в синхронном режиме с непрерывным выполнением блоков программного ресурса внутри каждого процесса. В этом режиме для любой β при $s\leq p$ справедлива формула

$$T^1_{op}(p,n,s)=T^n+(s-1)\left[t'_n+\sum_{i=2}^{n}\max\{t_{i-1}-t_i,0\}\right].$$

Покажем, что для любой одинаково распределенной системы $\delta\in H_n(T^n)$ выполняется равенство $t'_n+\sum_{i=2}^{n}\max\{t'_{i-1}-t'_i,0\}=t_l$, тем самым будет доказана теорема 4.

Учитывая, что $t'_l=\max\limits_{1\leq i\leq n}t'_i$, для всех номеров $i\leq l$ имеет место равенство $\sum_{i=2}^{l}\max\{t'_{i-1}-t'_i,0\}=0$, а для $i>l$ имеет место $\sum_{i=l+1}^{n}\max\{t'_{i-1}-t'_i,\ 0\}=t'_l-t'_n$, значит, $t'_n+\sum_{i=2}^{n}\max\{t'_{i-1}-t'_i,\ 0\}=t'_n+t'_l-t'_n=t'_l$, что и требовалось доказать.

Теорема 5. Для любой одинаково распределенной системы $\beta\notin H_n(T^n)$ и $p\geq 2$, $n\geq 2$, $s\geq 2$ при $s\leq p$ справедливы соотношения $T^1_{op}(p,n,s)>T^{ac}_{op}(p,n,s)=T^2_{op}(p,n,s)$.

Действительно, условие теоремы 5 равносильно неравенству

$$t'_n+\sum_{i=2}^{n}\max\{t'_{i-1}-t'_i,\ 0\}-\max_{1\leq i\leq n}t'_i>0. \qquad (1)$$

Доказательство проведем методом индукции по числу процессов n, $n\geq 2$ При $n=2$ любая одинаково распределенная система $\beta=(t'_1,\ t'_2)$ будет принадлежать классу $H_n(T^n)$.

При $n=3$ справедливость неравенства (1) для $\beta\notin H_n(T^n)$ легко установить непосредственной проверкой.

Пусть далее неравенство (1) выполняется при $n=j$, т. е.

$$t'_j+\sum_{i=2}^{j}\max\{t'_{i-1}-t'_i,0\}-\max_{1\leq i\leq j}t'_i>0,$$

покажем, что оно справедливо при $n=j+1$. Действительно, при $n=j+1$ имеем

$$t'_{j+1}+\sum_{i=2}^{j+1}\max\{t'_{i-1}-t'_i,0\}-\max_{1\leq i\leq j+1}t'_i=t'_{j+1}+\sum_{i=2}^{j}\max\{t'_{i-1}-t'_i,0\}+\max\{t'_j-t'_{j+1},0\}-\max_{1\leq i\leq j+1}t'_i.$$

Рассмотрим два случая:

1) максимальное значение $t'_i, 1\leq i\leq j+1$, равно t'_{j+1};

2) максимальное значение $t'_i, 1\leq i\leq j+1$ находится в промежутке $1\leq i\leq j$

В случае 1) имеем

$$t'_{j+1}+\sum_{i=2}^{j}\max\{t'_{i-1}-t'_i,0\}+\max\{t'_j-t'_{j+1},0\}-t'_{j+1}=\sum_{i=2}^{j}\max\{t'_{i-1}-t'_i,0\}+\max\{t'_j-t'_{j+1},0\}>0.$$

Здесь второе слагаемое равно нулю, так как $t'_{j+1}\geq t'_j$, а первое слагаемое больше нуля, ибо в противном случае $\delta\in H_n(T^n)$, что противоречит условию теоремы 5.

В случае 2) имеем

$$t'_{j+1}+\sum_{i=2}^{j}\max\{t'_{i-1}-t'_i,0\}+\max\{t'_j-t'_{j+1},0\}-\max_{1\leq i\leq j+1}t_i=$$

$$=t'_{j+1}-t'_j+t'_j+\sum_{i=2}^{j}\max\{t'_{i-1}-t'_i,0\}-\max_{1\leq i\leq j+1}t_i+\max\{t'_j-t'_{j+1},0\}.$$

Здесь $t'_j + \sum_{i=2}^{j} \max\{t'_{i-1} - t'_i, 0\} - \max_{1\le i\le j+1} t_i > 0$ по индукционному предположению и в силу того, что $\max_{1\le i\le j+1} t_i = \max_{1\le i\le j} t_i$. Покажем далее, что $t'_{j+1} - t'_j + \max\{t'_j - t'_{j+1}, 0\} \ge 0$. Действительно, для $t'_j = t'_{j+1}$ равенство нулю очевидно. При $t'_j > t'_{j+1}$ получаем $t'_{j+1} - t'_j + \max\{t'_j - t'_{j+1}, 0\} = t'_{j+1} - t'_j + t'_j - t'_{j+1} = 0$, а при $t'_j < t'_{j+1}$ имеем $t'_{j+1} - t'_j + \max\{t'_j - t'_{j+1}, 0\} = t'_{j+1} - t'_j > 0$, что и требовалось доказать.

Полученные результаты служат основой для построения и исследования математических моделей оптимальной организации одинаково распределенных конкурирующих процессов.

1. Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы. М., 1989.
2. Коваленко Н.С., Метельский В.М. // Кибернетика и системный анализ. 1997. №3. С. 31.
3. Коваленко Н.С., Самаль С.А. Вычислительные методы реализации интеллектуальных моделей сложных систем. Мн., 2004.

Поступила в редакцию 04.10.05.

Павел Александрович Павлов - аспирант кафедры прикладной математики и экономической кибернетики БГЭУ. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики БГЭУ Н.С. Коваленко.