

УДК 531.01

С.М. БОСЯКОВ, М.А. ЖУРАВКОВ, Д.Г. МЕДВЕДЕВ

**РАЗВИТИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ВНЕШНЕГО
ПАКЕТА *STRUCTURAL MECHANICS* РАСШИРЕНИЯ
КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ *MATHEMATICA* ПРИМЕНИТЕЛЬНО
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Algorithms of use of functional means of package Structural Mechanics of expansion of computer system Mathematica with reference to the decision of dynamic problems of the theory of elasticity are offered. Their realization is shown on examples of a finding of velocities of propagation of surface waves, longitudinal and transversal waves in the elastic homogeneous isotropic media.

Внешний пакет *Structural Mechanics* расширения системы *Mathematica* предназначен для решения теоретических и практических задач, стоящих перед такими научными дисциплинами, как сопротивление материалов, строительная механика и теория упругости. В дополнение к встроенным функциям и функциям стандартных пакетов расширения системы *Structural Mechanics* добавляет двенадцать собственных подпакетов, функциональные средства которых позволяют в символьном и численном виде определять геометрические характеристики плоских составных сечений, рассчитывать напряженно-деформированные состояния консольных балок при кручении или изгибе, выполнять конеч-но-элементный анализ двумерных областей и т. д. [1-4]. Наличие таких функциональных средств делает возможным создание гибкой среды для проведения вычислительных экспериментов, а также разработку собственных методик решения научно-исследовательских задач механики деформируемого твердого тела. В настоящей работе предложены алгоритмы совместного использования функций подпакета *GoverningEquations* пакета *Structural Mechanics* и системы *Mathematica* применительно к решению задач теории упругости одно-родной изотропной среды.

Функции подпакета *GoverningEquations* предназначены для получения информации об основных определяющих соотношениях теории упругости (зависимостях Коши, формулах закона Гука), соотношениях между константами упругости и т. д. Кроме этого, функциональные возможности *GoverningEquations* позволяют задавать трехмерные динамические уравнения равновесия упругой среды в компонентах тензора напряжений, а также с использованием скалярного и векторного потенциалов [4]. С помощью соответствующих опций этого подпакета получаемые выражения можно представить в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Так, ниже приведено выражение для одной из компонент тензора деформаций в цилиндрической системе координат:

```
StrainDisplacementRelations[ε,u,Cylindrical[r,φ,z]][[1]]  
ε[r, r][r, φ, z] == Dε[u[r][r, φ, z], r]
```

Заметим, что по умолчанию форма записи физических величин является операторной (функциональной), при которой символ (или символы) в первых квадратных скобках идентифицирует компоненту вектора (или тензора); в следующих квадратных скобках перечислены координаты, функцией которых является данная компонента.

При записи частных производных от составляющих вектора перемещений используется функция `Dt[f,x]`, которая согласно [5] возвращает полную производную функции `f` по переменной `x`, причем в результатах выполнения функций подпакета `GoverningEquations` эти производные записаны с использованием функции `HoldForm` в виде, не допускающем дальнейшие вычисления. Покажем это на примере одной из компонент тензора деформаций, записанной в декартовой системе координат:

```
(sdr=StrainDisplacementRelations[ε,u,Cartesian[x,y,z]][[1]];
FullForm[%]
HoldForm[Equal\[Epsilon][x,x][x,y,z],Dt[u[x][x,y,z],x]]
```

Такой подход, принятый в подпакете `GoverningEquations` к формулировке соотношений для деформаций, напряжений и уравнений движения, практически не позволяет их применять в каких-либо преобразованиях и ограничивает использование функций подпакета рамками справочной системы по основным уравнениям и определениям теории упругости изотропной среды. Для выполнения дальнейших вычислений необходимо снять ограничения, накладываемые функцией `HoldForm`, посредством применения стандартной функции `ReleaseHold` [5]. Приведем пример ее применения к первому элементу списка компонент деформаций `sdr`:

```
ReleaseHold[sdr[[1]]]
ε[x,x][x,y,z]==Dt[z,x]u[x]^(0,0,1)[x,y,z]+
Dt[y,x]u[x]^(0,1,0)[x,y,z]+u[x]^(1,0,0)[x,y,z]
```

Полученный результат показывает, что, перед тем как применить функцию `ReleaseHold`, целесообразно сформулировать условие равенства нулю полных производных функций, не зависящих от переменной дифференцирования (в нашем случае приравнять нулю следует производные `Dt[z,x]` и `Dt[y,x]`) Сформируем список нулевых подстановок для полных производных первого и второго порядков по заданному списку `coord` координат и списку `const` двух произвольных констант, характеризующих упругие свойства изотропной среды:

```
coord={x,y,z,t};const={c1,c2};
Поскольку величины c1 и c2 являются параметрами, не зависящими от пространственных координат и времени, с помощью функции SetOptions установим для функции Dt опцию Constants со значением const. В дальнейшем это позволит избавиться от полных производных, в качестве входных параметров которых фигурируют величины c1 и (или) c2.
```

```
SetOptions[Dt,Constants->const]
{Constants->{c1,c2}}
```

При формировании списка `subst` подстановок вида `Dt[#1,#2]->0` и `Dt[#1,{#2,2}]->0` (`#1` и `#2` - переменные из списка `coord`, фигурирующие в аргументах функции `D` `t`) используем функцию комбинаторики `KSubsets` из стандартного пакета `DiscreteMath`Combinatorica`` расширения системы и функции работы со списками.

```
<<DiscreteMath`Combinatorica`
Join[Dt@@@{Join[KSubsets[coord,2],
Reverse/@KSubsets[coord,2]}],Complement[Dt@@@{Flatten[
Table[{coord[[i]],(Complement[KSubsets[
```

```
Join[coord, {2}], 2], KSubsets[coord, 2]]][[j]]},
{i, 1, Length[coord]}, {j, 1, Length[coord]}], 1], {0}]]];
subst=Table[Thread[%[[i]]->0], {i, 1, Length[%]}];
```

Приведем примеры двух элементов из списка подстановок `subst`:
`{subst[[2]], subst[[16]]}`

```
{Dt[x, z, Constants->{c, c1, c2, λ, μ}]>0,
Dt[x, {t, 2}, Constants->{c, c1, c2, λ, μ}]>0}
```

Проиллюстрируем методику применения функции `ReleaseHold` и списка подстановок `subst` при решении задач теории упругости на базе подпакета `GoverningEquations` на конкретном примере определения скорости распространения поверхностных волн (волн Рэлея) в упругом полупространстве $x \geq 0$. Предположим, что поверхностная волна распространяется в направлении оси y (возмущение, вызывающее поверхностную волну, не зависит от координаты z). В этом случае соответствующие уравнения движения целесообразно записать с помощью скалярного Φ и векторного Ψ потенциалов [6].

Для формирования списка четырех уравнений (`eq1`) используем функцию `ElastodynamicsEquations` [4]. Из этого списка выделим два первых уравнения и подставим в них соответствующие выражения для волновых потенциалов [6].

```
eq1=ElastodynamicsEquations[φ,ψ,{c1,c2},t,Cartesian[x,y,z]]
eq2={eq1[[1]]/.φ[x,y,z]→w1[x]*Exp[I*k*(y-c*t)],
eq1[[4]]/.ψ[z][x,y,z]→w2[x]*Exp[I*k*(y-c*t)]}
{Dt[Exp[i k (-c t+y)] w1[x], x, x] + Dt[Exp[i k (-c t+y)] w1[x], y, y] +
Dt[Exp[i k (-c t+y)] w1[x], z, z] == Dt[Exp[i k (-c t+y)] w1[x], t, t] / c1^2,
Dt[Exp[i k (-c t+y)] w2[x], x, x] + Dt[Exp[i k (-c t+y)] w2[x], y, y] +
Dt[Exp[i k (-c t+y)] w2[x], z, z] == Dt[Exp[i k (-c t+y)] w2[x], t, t] / c2^2 }
```

Здесь введены следующие обозначения: c_1, c_2 - скорости распространения продольной и поперечной упругих волн, c - скорость распространения поверхностной волны. k - волновое число, $w_1[x], w_2[x]$ - неизвестные функции.

Применим к списку уравнений `eq2` функцию `ReleaseHold`, а в полученный результат подставим элементы списка `subst` (список `const` параметров в этом случае содержит элементы c_1, c_2, c и k). Одновременно упростим оба уравнения и избавимся от экспоненциального множителя:

```
ReleaseHold[eq2]/.subst//Simplify;
eq=%/.Exp[I k (-c t+y)]→1//Simplify
{ (c^2 - c1^2) k^2 w1[x] / c1^2 + w1''[x] == 0, (c^2 - c2^2) k^2 w2[x] / c2^2 + w2''[x] == 0 }
```

Перед тем как решить полученные дифференциальные уравнения, целесообразно ввести новые обозначения для коэффициентов при функциях $w_1[x]$ и $w_2[x]$. Это связано с тем, что по умолчанию дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами могут быть решены функцией `DSolve` либо с помощью тригонометрических, либо с помощью экспоненциальных функций. Чтобы избежать произвола в выборе решения, необходимо ввести новые коэффициенты дифференциального уравнения (вид подстановки для коэффициентов обусловлен тем, что скорость распространения поверхностных волн не превышает скорости распространения продольной и поперечной волн [6]).

```
eqns={ (eq[[1]]/.k→I c1 β1/Sqrt[c^2-c1^2],
(eq[[2]]/.k→I c2 β2/Sqrt[c^2-c2^2])
{-β1^2 w1[x] + w1''[x] == 0, -β2^2 w2[x] + w2''[x] == 0}
```

Найдем решения уравнений eq1 и eq2 и выделим из них те, которые соответствуют уменьшению амплитуд с глубиной [6]:

```
DSolve[{eqns[[1]], eqns[[2]]}, {w1[x], w2[x]}, x] // Flatten;
sol = % /. {C[1] -> 0, C[3] -> 0}
{w1[x] -> e^{-x \beta 1} C[2], w2[x] -> e^{-x \beta 2} C[4]}
```

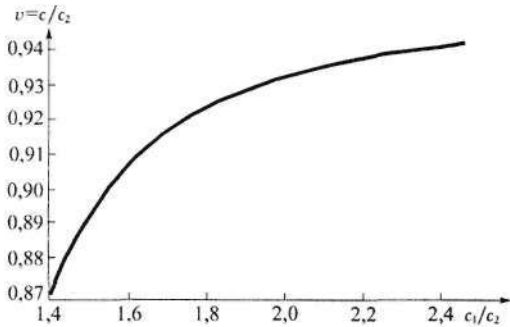
Чтобы получить характеристическое уравнение, используем граничные условия [6], предварительно определив потенциалы Φ и Ψ . При записи окончательного результата учтем связь между константами Ламе и скоростями распространения упругих волн.

```
\Phi = w1[x] * Exp[I * k * (y - c * t)] /. sol;
\Psi = w2[x] * Exp[I * k * (y - c * t)] /. sol;
bc = {2 \mu \partial_{x,x} \Phi + \lambda (\partial_{x,x} \Phi + \partial_{y,y} \Phi) +
2 \mu \partial_{x,y} \Psi, \mu (2 \partial_{x,y} \Phi + \partial_{y,y} \Psi - \partial_{x,x} \Psi)} /. {x -> 0} /. {\mu -> \rho c2^2,
\lambda -> \rho (c1^2 - 2 * c2^2)} // Simplify
```

Элементы списка bc представляют собой левые части двух однородных алгебраических линейных уравнений относительно неизвестных констант интегрирования. Приравнявая к нулю определитель, составленный из коэффициентов при C[1] и C[2], получим характеристическое уравнение для нахождения скоростей распространения поверхностных волн. Ниже показано формирование списка res1 его решений относительно безразмерной скорости волны Рэлея $v = c/c_2$ ($p = c_1/c_2$ - безразмерный параметр, характеризующий упругие свойства среды).

```
row1 = Coefficient[bc, C[2]]; row2 = Coefficient[bc, C[4]];
Det[Transpose[{row1, row2}]] // Simplify // PowerExpand;
% /. {\beta 1 -> Sqrt[-Coefficient[eq[[1, 1]], w1[x]]],
\beta 2 -> Sqrt[-Coefficient[
eq[[2, 1]], w2[x]]]} // Simplify // PowerExpand;
% /. {c -> c2 v, c1 -> c2 p} // Simplify;
res1 = v /. (Solve[% == 0, v, InverseFunctions -> True]);
```

Зависимость безразмерной скорости распространения поверхностной волны от параметра p , удовлетворяющая требованию $v < 1$ [6], представлена на рисунке. При построении максимальное и минимальное значения для отношения скоростей продольных и поперечных волн принимаем равными 1,4 (бериллий, $c_1 = 12660$ м/с, $c_2 = 8900$ м/с [7]) и 2,44 (сталь, $c_1 = 6100$ м/с, $c_2 = 2500$ м/с [7]) соответственно. Заметим, что аналогично могут быть выполнены решения других динамических задач теории упругости, для которых определяющие уравнения и граничные условия записываются с помощью скалярного и векторного потенциалов, например решения задач о нахождении скоростей распространения волн Лява, упругих волн в слое и др. [6, 8].



Зависимость безразмерной скорости распространения поверхностной волны от отношения скоростей продольной и поперечной упругих волн

Продемонстрируем подходы к преобразованию выражений, полученных с использованием функций подпакета GoverningEquations, при формулировке системы уравнений движения упругой изотропной среды в компонентах

вектора перемещений. Заметим, что с помощью функции `EquilibriumEquations` уравнения движения можно записать в компонентах тензора напряжений. В качестве примера нами приведены два уравнения движения, сформулированные в декартовой системе координат (аналогичные уравнения можно записать в цилиндрических и сферических координатах):

```
epeq=EquilibriumEquations [ $\sigma$ ,  $u$ ,  $f$ ,  $\rho$ ,  $t$ , Cartesian[ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ]];
Take [epeq, {1, 2}]
{Dt[ $\sigma$ [ $x$ ,  $x$ ][ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ],  $x$ ] + Dt[ $\sigma$ [ $y$ ,  $x$ ][ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ],  $y$ ] +
  Dt[ $\sigma$ [ $z$ ,  $x$ ][ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ],  $z$ ] +  $f$ [ $x$ ][ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ] ==
   $\rho$  Dt[ $u$ [ $x$ ][ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ],  $t$ ,  $t$ ],
Dt[ $\sigma$ [ $x$ ,  $y$ ][ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ],  $x$ ] + Dt[ $\sigma$ [ $y$ ,  $y$ ][ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ],  $y$ ] +
  Dt[ $\sigma$ [ $z$ ,  $y$ ][ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ],  $z$ ] +  $f$ [ $y$ ][ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ] ==
   $\rho$  Dt[ $u$ [ $y$ ][ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ],  $t$ ,  $t$ ]}
```

Здесь σ , u , f - символы, используемые при записи компонент тензора напряжений, вектора перемещений и массовых сил соответственно, ρ - плотность, t - время.

Представленный результат демонстрирует ряд недостатков в записи дифференциальных уравнений. Так, компоненты вектора перемещений $u[x][x,y,z]$, $u[x][x,y,z]$ и $u[x][x,y,z]$ не являются функцией времени, тогда как их дифференцирование в правой части уравнений выполняется именно по этой переменной. Кроме этого, компоненты тензора напряжений в левой части уравнений не симметричны, на что указывает, например, наличие компонент $\sigma[y,x][x,y,z]$ и $\sigma[x,y][x,y,z]$. Чтобы устранить эти недостатки, сформируем два трехэлементных списка подстановок для компонент вектора перемещений (`dspl`) и тензора напряжений (`str`), используя заданный список декартовых координат `coord`.

```
dspl=u[#] [coord[[1]], coord[[2]], coord[[3]]]→u[#] [
coord[[1]], coord[[2]], coord[[3]],  $t$ ] & /@ Drop [coord, -1];
str=Table [(sigma@@@Reverse /@ KSubsets [
Drop [coord, -1], 2]) [[ $i$ ]] [coord[[1]], coord[[2]],
coord[[3]]] → (sigma@@@KSubsets [Drop [coord, -1], 2]) [[ $i$ ]] [
coord[[1]], coord[[2]], coord[[3]]], {1, 1, 3});
```

Приведем примеры элементов списков `dspl` и `str`:

```
List [dspl[[1]], str[[1]]]
{ $u$ [ $x$ ][ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ] →  $u$ [ $x$ ][ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ ],
   $\sigma$ [ $y$ ,  $x$ ][ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ] →  $\sigma$ [ $x$ ,  $y$ ][ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ]}
```

Заметим, что списки `dspl` и `str` заданы таким образом, что для замены декартовых координат на цилиндрические (или сферические) в выражениях для перемещений и напряжений достаточно первые три компонента списка `coord` изменить на r , ϕ , z (или r , ϕ , ψ).

Выразим компоненты тензора напряжений через компоненты вектора перемещений. Для этого последовательно применим функции `StrainDisplacementRelations` и `IsotropicStressStrainRelations` подпакета `GoverningEquations` [4] вместе со стандартными функциями системы `Mathematica`. Кроме этого, используем ранее описанный список `subst`, предварительно установив для функции `Dt` опцию `Constants` со значением $\{\lambda, \mu\}$.

```
deform=(ToRules /@ ReleaseHold /@ StrainDisplacementRelations [
 $\epsilon$ ,  $u$ , Cartesian[ $x$ ,  $y$ ,  $z$ ]] / . subst) // Flatten;
dspl1=Derivative [nx_Integer, ny_Integer, nz_Integer] [u[#]] [
coord[[1]], coord[[2]], coord[[3]]] → Derivative [
nx, ny, nz, 0] [u[#]] [
```

```
coord[[1]], coord[[2]], coord[[3]], t]&/@Drop[coord, -1];
guck=(ToRules/@ReleaseHold/@IsotropicStressStrainRelations[
σ, ε, {μ, λ}, Cartesian[x, y, z]])/.deform/.displ1//Flatten;
```

Формирование и использование списка подстановок `displ1` обусловлено необходимостью замены частных производных от компонент вектора перемещений. Примеры элементов списков `deform`, `displ1` и `guck` приведены ниже.

```
Map[#[[1]]&, {deform, displ1, guck}]
{ε[x, x][x, y, z] → u[x](1,0,0)[x, y, z],
 u[x](nx_Integer, ny_Integer, nz_Integer)[x, y, z] →
 u[x](nx, ny, nz, 0)[x, y, z, t],
 σ[x, x][x, y, z] → 2 μ u[x](1,0,0,0)[x, y, z, t] +
 λ (u[z](0,0,1,0)[x, y, z, t] + u[y](0,1,0,0)[
 x, y, z, t] + u[x](1,0,0,0)[x, y, z, t])}
```

Окончательный результат в виде системы уравнений движения, записанной в компонентах вектора перемещений (список `res2`), получим, подставив списки `displ1`, `str` и `guck` в уравнения `eqeq`. Для сравнения приведем уравнения в индексированной и операторной формах:

```
res2=ReleaseHold[eqeq/.displ1/.str/.guck] /. subst;
IndicialForm[%]//TableForm
```

```
%%[[1]]
fx + 2 μ ux,xx + μ (ux,yy + uy,xy) + μ (ux,zz + uz,xz) + λ (ux,xx + uy,xy + uz,xz) == ρ ux,tt
fy + μ (ux,xy + uy,xx) + 2 μ uy,yy + λ (ux,xy + uy,yy + uz,yz) + μ (uy,zz + uz,yz) == ρ uy,tt
fz + μ (ux,xz + uz,xx) + μ (uy,yz + uz,yy) + 2 μ uz,zz + λ (ux,xz + uy,yz + uz,zz) == ρ uz,tt
f[x][x, y, z] + μ (u[x](0,0,2,0)[x, y, z, t] + u[z](1,0,1,0)[x, y, z, t]) +
 μ (u[x](0,2,0,0)[x, y, z, t] + u[y](1,1,0,0)[x, y, z, t]) +
 2 μ u[x](2,0,0,0)[x, y, z, t] +
 λ (u[z](1,0,1,0)[x, y, z, t] + u[y](1,1,0,0)[x, y, z, t] +
 u[x](2,0,0,0)[x, y, z, t]) == ρ u[x](0,0,0,2)[x, y, z, t]
```

С помощью функции `ConvertCoefficients` подпакета `GoverningEquations` константы Ламе в системе уравнений движения и законе Гука могут быть преобразованы на два других коэффициента упругости. Покажем формирование списка подстановок, позволяющего заменить λ и μ на технические постоянные E_m и ν (модуль упругости и коэффициент Пуассона).

```
cc=ConvertCoefficients[{λ, μ}, {Em, ν}, ##]&@{YoungsModulus→Em,
LameCoefficients→{λ, μ}, PoissonsRatio→ν}
```

```
{λ → - $\frac{\nu E_m}{(1+\nu)(-1+2\nu)}$ , μ →  $\frac{E_m}{2(1+\nu)}$ }
```

Заметим, что аналогичным образом можно сформировать список подстановок, формулирующий определяющие соотношения теории упругости изотропной среды с использованием двух материальных постоянных, которыми могут выступать константы Ламе, объемный модуль упругости, модуль сдвига, модуль Юнга, коэффициент Пуассона.

Используем дифференциальные уравнения второго порядка из списка `res2` для определения скоростей распространения продольной и поперечной волн. Поскольку форма записи частных производных от компонент вектора перемещений является индексированной, необходимо сформировать список, позволяющий выполнить дифференцирование при подстановке экспоненциальной функции. Покажем его формирование с использованием списка декартовых координат `coord` и приведем первый элемент:

```
subs1=Derivative[
nx_Integer, ny_Integer, nz_Integer, nt_Integer][u[#]][
```

```

coord[[1]], coord[[2]], coord[[3]], t] -> D[
(A[Position[coord, #][[1, 1]]] Exp[I (ω t - (k1 x + k2 y +
k3 z))], {x, nx}, {y, ny}, {z, nz}, {t, nt}] & @ Drop[coord, -1];
%[[1]]
u[x]^(nx_Integer, ny_Integer, nz_Integer, nt_Integer) [x, y, z, t] :=
  D_{x, nx}, {y, ny}, {z, nz}, {t, nt} {A[Position[coord, x][[1, 1]]] e^{i (ω t - (k1 x + k2 y + k3 z))}}

```

Найдем дисперсионное уравнение (массовые силы отсутствуют).

```

masf = Table[
ForceComponents[f, Cartesian[x, y, z]][[i]] -> 0, {i, 1, 3}];
Simplify[Map[#[[1]] &, Simplify[res2/.masf/.subs1]]] /. Exp[
-I (k1 x + k2 y + k3 z - t ω)] -> 1;
Table[Coefficient[%[[i]], {A[1], A[2], A[3]}], {i, 3}];
Det[%] // FullSimplify
-((k1^2 + k2^2 + k3^2) μ - ρ ω^2)^2 ((k1^2 + k2^2 + k3^2) (λ + 2 μ) - ρ ω^2)

```

Из последнего уравнения достаточно легко можно найти выражения для скоростей распространения продольной и поперечной упругих волн.

Изложенная методика развития функциональных возможностей внешнего пакета *Structural Mechanics* может найти применение при решении граничных задач теории упругости изотропного и анизотропного тела и подготовке собственных пакетов расширений системы *Mathematica*. Предложенные подходы позволяют также использовать пакет *Structural Mechanics* в качестве дополнительного учебно-методического материала при проведении лекционных и практических (лабораторных) занятий.

Авторы выражают благодарность А.С. Гаркуну за помощь, оказанную при подготовке статьи.

1. Босяков С.М., Журавков М.А., Медведев Д.Г. Пакет расширения *Structural Mechanics* компьютерной системы *Mathematica*. В 4 ч. Ч. 1. Геометрические характеристики плоских сечений. Мн., 2004.

2. Там же. Ч. 2. Кручение и изгиб консольных балок.

3. Там же. Ч. 3. Элементы теории упругости.

4. Там же. Ч. 4. Метод конечных элементов.

5. Wolfram S. *The Mathematica Book*. Fourth Edition. Cambridge, 1999.

6. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975.

7. Таблицы физических величин: Справ. / Под ред. И.К. Кикоина. М., 1976.

8. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М., 1977.

Поступила в редакцию 29.04.05.

Сергей Михайлович Босяков - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.

Михаил Анатольевич Журавков - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики.

Дмитрий Георгиевич Медведев - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.