

О ПРЕПОДАВАНИИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

К. В. Василевский, В. В. Дайняк, Е. С. Чеб

*Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
e-mail: cheb@bsu.by*

В работе рассматриваются приближенные методы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода: метод замены ядра на вырожденное, метод Бубнова – Галеркина и нахождение характеристических чисел ядра интегрального уравнения для представления решения в виде ряда Фурье. Демонстрируется применение методов компьютерной математики для таких расчетов.

Ключевые слова: интегральные уравнения Фредгольма второго рода; приближенные методы решения.

ABOUT TEACHING OF SOLVING METHODS OF INTEGRAL EQUATIONS IN THE DISCIPLINE «FUNCTIONAL ANALYSIS AND INTEGRAL EQUATIONS»

K. V. Vasilevsky, V. V. Dainjak, E. S. Cheb

*Belarusian State University
Minsk, Belarus*

The following approximate methods of solving Fredholm integral equations of the second kind are considered: method of replacement of the kernel by degenerated kernel, Bubnov-Galerkin method and finding characteristic numbers of the kernel of an integral equation to represent it in the form of Fourier series. Applying of methods of computer mathematics for such calculations is demonstrated.

Keywords: integral Fredholm equations of the second kind; approximate methods of solving.

Для повышения качества образования необходимо создавать современное научно-методическое обеспечение учебного процесса, использовать современные технологии обучения, создавать систему контроля качества образования, развивать у студентов навыки и потребность в самообразовании и активной самостоятельной деятельности, постоянно повышать качество профессиональной подготовки кадров.

Интенсивное внедрение в учебный процесс новых информационных технологий обучения открывает широкие перспективы относительно углубления и расширения теоретической базы знаний, предоставления результатам обучения практического значения, активизации познавательной деятельности студентов.

В связи с переходом с переходом на новые учебные планы значительная часть материала отводится на самостоятельную работу студентов. В курсе лекций не рассматриваются подробно приближенные методы решения интегральных уравнений. Применение методов компьютерной математики позволяет студентам самостоятельно овладеть этой частью материала. В настоящей работе рассматривается применение методов компьютерной алгебры для решения интегральных уравнений различными методами, в частности, методом замены ядра на вырожденное и методом Бубнова – Галекина.

Задача 1.

Решить интегральное уравнение заменой ядра вырожденным

$$y(x) = \sin x + \int_0^1 (1 - x \cos xt) y(t) dt.$$

Алгоритм решения задачи 1:

1. Раскладываем ядро в ряд Тейлора по x и по t . Берем первые N членов разложения и получаем вырожденное ядро.
2. Заменяем в уравнении ядро вырожденным.
3. Решаем полученное интегральное уравнение классическим методом и получаем приближенное решение.

Пример реализации в системе «Mathematica»:

```

K[x_, t_] := 1 - x Cos[x t];
L[x_, t_] := Normal[Series[K[x, t],
  {x, 0, 3}, {t, 0, 3}]];
L[x, t]
1 - x +  $\frac{t^2 x^3}{2}$ 

z[x_] := Sin[x] + C1 (1 - x) + C2 x^3;
Collect[C1 -  $\int_0^1 z[t] dt$ , {C1, C2}]
-1 + Cos[1] +  $\frac{C1}{2}$  -  $\frac{C2}{4}$ 
Collect[C2 -  $\frac{1}{2} \int_0^1 t^2 z[t] dt$ , {C1, C2}]
1 -  $\frac{\text{Cos}[1]}{2}$  - Sin[1] -  $\frac{C1}{24}$  +  $\frac{11 C2}{12}$ 

```

```

M = {{1/2, -1/4}, {-1/24, 11/12}};
F = {1 - Cos[1], -1 + Cos[1]/2 + Sin[1]};
{C1, C2} = LinearSolve[M, F] // N
{1.00308, 0.167364}

z[x]
1.00308 (1 - x) + 0.167364 x^3 + Sin[x]

```

Задача 2.

Решить интегральное уравнение методом Вубнова - Галёркина

$$y(x) = x + \int_{-1}^1 x t y(t) dt.$$

Алгоритм решения задачи 2:

1. В качестве полной системы функций на $[-1,1]$ выбираем систему полиномов Лежандра.
2. Решение исходного уравнения ищем в виде линейной комбинации неопределенных коэффициентов, умноженных на полученные полиномы Лежандра.
3. Подставляем эту линейную комбинацию в исходное уравнение, составляем систему и находим неопределенные коэффициенты. Убеждаемся в том, что получено точное решение исходного уравнения.

Пример реализации в системе «Mathematica»:

```

P[x_] := {LegendreP[0, x], LegendreP[1, x],
  LegendreP[2, x]};
P[x]
{1, x, 1/2 (-1 + 3 x^2)}

z[x_] := a1 P[x][[1]] + a2 P[x][[2]] + a3 P[x][[3]]; z[x]
a1 + x a2 + 1/2 (-1 + 3 x^2) a3

Collect[Integrate[P[x][[1]] (z[x] - x - Integrate[x t z[t] dt, {t, -1, 1}]) dx, x]
2 a1

Factor[Collect[Integrate[P[x][[2]] (z[x] - x - Integrate[x t z[t] dt, {t, -1, 1}]) dx, x]]
2/9 (-3 + a2)

```

```
Collect[ $\int_{-1}^1 P[x] \llbracket 3 \rrbracket \left( z[x] - x - \int_{-1}^1 x t z[t] dt \right) dx, x]$ 

$$\frac{2 a_3}{5}$$


$$z[x] = z[x] /. \{a_1 \rightarrow 0, a_2 \rightarrow 3, a_3 \rightarrow 0\}$$


$$3 x$$

```

Задача 3.

Найти приближённое значение характеристического числа ядра уравнения

$$y(x) = \lambda \int_{-1}^1 x t y(t) dt.$$

Алгоритм решения задачи 3:

1. В качестве координатной системы функций на $[0; 1]$ выбираем систему полиномов Лежандра.
2. Приближенное решение исходного уравнения ищем в виде линейной комбинации неопределённых коэффициентов, умноженных на полученные полиномы Лежандра.
3. Составляем характеристическое уравнение, находим его корни, наибольшее характеристическое число и наименьшее собственное значение.

Пример реализации в системе «Mathematica»:

```
K[x_, t_] := x t;
P[x_] := {LegendreP[0, 2 x - 1], LegendreP[1, 2 x - 1]};
P[x]
{1, -1 + 2 x}
z[x_] := a1 P[x] \llbracket 1 \rrbracket + a2 P[x] \llbracket 2 \rrbracket; z[x]
a1 + (-1 + 2 x) a2

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 K[x, t] P[t] \llbracket 1 \rrbracket dt \right) P[x] \llbracket 1 \rrbracket dx$$


$$\frac{1}{4}$$


$$\int_0^1 \left( \int_0^1 K[x, t] P[t] \llbracket 1 \rrbracket dt \right) P[x] \llbracket 2 \rrbracket dx$$


$$\frac{1}{12}$$


$$\int_0^1 \left( \int_0^1 K[x, t] P[t] \llbracket 2 \rrbracket dt \right) P[x] \llbracket 2 \rrbracket dx$$


$$\frac{1}{36}$$

```

$$\mathbf{M} = \left\{ \left\{ \frac{1}{4} - \sigma, \frac{1}{12} \right\}, \left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{36} - \frac{1}{3} \sigma \right\} \right\}; \text{Solve}[\text{Det}[\mathbf{M}] = 0, \sigma]$$

$$\left\{ \left\{ \sigma \rightarrow 0 \right\}, \left\{ \sigma \rightarrow \frac{1}{3} \right\} \right\}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. (Введение в теорию). М. : Наука, 1975. 304 с.