СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОГО, АДАПТИВНОГО И НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО АЛГОРИТМОВ ОБНАРУЖЕНИЯ СЛАБЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

В. И. Никитенок[1], С. С. Ветохин[2]

[1]*Белорусский государственный университет*
[2]*Белорусский государственный технологический университет,*
Минск, Беларусь
e-mail: nikitavi44@mail.ru

Представлен сравнительный анализ по показателям качества алгоритмов обнаружения. Показано, что адаптивный алгоритм при малых отношениях сигнала к шуму вряд ли может быть применен. Рассмотренные непараметрические алгоритмы основаны на широко известном тесте Манна – Уитни, менее используемом тесте Вальда – Вольфовица и малоизвестном тесте Сэвиджа. Даны рекомендации к применению обнаружителей.

Ключевые слова: счет фотонов; показатель качества обнаружения; непараметрический тест; вероятность правильного обнаружения; ложная тревога.

COMPARATIVE ANALYSIS OF OPTIMAL, ADAPTIVE, AND NONPARAMETRIC ALGORITHMS OF WEAK OPTICAL SIGNALS DETECTION

V. I. Nikitionok[1], S. S. Vetokhin[2]

[1]*Belarusian State University*
[2]*Belarusian State Technological University*
Minsk, Belarus

The comparative analysis of the detection algorithms is done through their quality indexes. Adaptive algorithm is shown could not be applied under law signal-to noise ratio. Instead, the non-parametric algorithms that use Mann – Whitney, Wald – Wolfowitz or Savage tests are considered. Some recommendations on their application are given.

Keywords: photon counting; quality of detection indexes; non-parametric test; detection probability; false alarm.

Понятие «слабый оптический сигнал» применяется в связи с его приемом на уровне фотонов [1]. Метод счета отдельных оптических фотонов, возникший полвека назад, в настоящее время хорошо разработан с теоретической и практической позиций. В качестве фотоприемников используют фотоэлектронные умножители, диссекторы и лавинные фотодиоды. Статистика фотоэлектронов повторяет статистику фотонов в плоскости чувствительного слоя фотоприемника, и квантовый характер оптического сигнала проявляется в случайном количестве фотоэлектронов и в случайных моментах их появления. Слабый оптический сигнал на выходе детектора оптического излучения представляет собой последовательность видеоимпульсов. Несмотря на широкое многообразие оптических полей, в практически важных случаях приема теплового излучения (струи двигателей, Солнце, звезды, Земля, атмосфера и т. д.), излучения одномодового лазера (постановщик помех), отраженного лазерного излучения модели сигнала и помех, а также их смеси описываются при определенных условиях, стационарными (или простейшими) пуассоновскими потоками (ППП).

Таким образом, в качестве модели входных сигналов обнаружителей можно принять ППП коротких видеоимпульсов. При отсутствии полезного сигнала они обусловлены внешним фоном и темновыми импульсами. Имеем ППП, обусловленный чистым шумом, с интенсивностью λ_0. При наличии полезного сигнала ППП представляет собой смесь шумовых и сигнальных импульсов с интенсивностью $\lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_c$, где λ_c – интенсивность ППП, обусловленного только полезным сигналом.

Известно, что ППП может быть представлен двумя законами распределения: Пуассона и экспоненциальным. Для принятия решения на обнаружение полезного сигнала с соответствующим порогом надо сравнивать в первом случае количество импульсов m за фиксированное время T, во втором – время T прихода фиксированного количества m импульсов. Можно полагать, что оба представления имеют право на практическое применение в задачах обнаружения. Тем не менее в теории и практике обнаружения слабых оптических сигналов используется первое представление.

В этой связи в настоящей работе показаны возможности второго представления ППП. Оперирование с непрерывными случайными величинами, распределенными по экспоненциальному закону, позволило авторам по-новому подойти к проблеме обеспечения постоянного уровня вероятности ложной тревоги в автоматических обнаружителях при неконтролируемом увеличении интенсивности шума: применение мощных непараметрических, в том числе ранговых, тестов возможно в реальном времени.

Указанные выше алгоритмы обнаружения слабых оптических сигналов рассмотрены нами ранее [1–5]. Представленные в них структурные схемы и показатели качества (при $m >> 1$) используются далее для проведения сравнительного анализа и выработки соответствующих рекомендаций.

Оптимальный алгоритм обнаружения включает счетчик времени T прихода фиксированного количества m видеоимпульсов и пороговую схему [2]. Условная вероятность правильного обнаружения равна

$$D_o = \Phi\{g\sqrt{m} - (1+g)\,\Phi^{-1}(1-F)\}, \tag{1}$$

где $g = \lambda_c / \lambda_0$ – отношение сигнала к шуму; $\Phi(x) = 1/(2\pi)\int_{-\infty}^{x} \exp\{-t^2/2\}dt$ – интеграл вероятности; $\Phi^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная интегралу вероятности; F – задаваемая условная вероятность ложной тревоги. Расчеты показывают, что эта вероятность оказывается весьма чувствительной к неконтролируемым увеличениям интенсивности шума, от которой зависит порог обнаружения. Ее значение в большей мере возрастает при меньших значениях задаваемой вероятности ложной тревоги, больших величинах условной вероятности правильного обнаружения и меньших значениях отношения сигнала к шуму. Например, при g = 0,1, задаваемых $F = 10^{-4}$, 10^{-5} и 10^{-6}, заданной D_o = 0,5–0,9 увеличение λ_0 даже на 1 % приводит к увеличению условной вероятности ложной тревоги соответственно в 4,1–6,4, 6,2–10,4 и 9,4–16,6 раз от задаваемой. При 2 %-м увеличении λ_0 указанное возрастание составляет 14,6–32,7, 32,3–80,1 и 71,6–

195,2 раз. В автоматических обнаружителях такой рост F недопустим. Таким образом, априорная неопределенность относительно параметра экспоненциального распределения (или ППП) приводит к трудностям принципиального характера и требует применения специальных мер. Они основаны на двух известных принципах преодоления априорной неопределенности.

Один и них состоит в разработке адаптивных алгоритмов, другой – в применении непараметрических, в том числе ранговых, алгоритмов. Адаптивный алгоритм обнаружения сложнее оптимального [3]. В дополнение к оптимальному он содержит блок оценки интенсивности шумового ППП. Эта оценка используется для установки порога обнаружения. Иначе адаптивный обнаружитель должен быть двухканальным. Причем работа их может быть одновременной либо последовательной: сначала выполняется оценка порога обнаружения, затем собственно обнаружение полезного сигнала. Условные вероятности правильного обнаружения D_a и ложной тревоги F_a определяются выражениями [3]

$$D_a \cong 1 - a(1+2bg^2(d+\sqrt{m}-\sqrt{1/b\ln(a/F)})^2/m_0)^{-0,5} \times \exp\{-b(d(2+g)+g\sqrt{m}-$$

$$-(1+g)\sqrt{1/b\ln(a/F)})^2/(1+2bg^2 \times (d+\sqrt{m}-\sqrt{1/b\ln(a/F)})^2/m_0)\},\ D_a > 0{,}5, \quad (2)$$

$$F_a \cong a(1+2b(\sqrt{1/b\ln(a/F)}-d-\sqrt{m})^2/m_0)^{-0,5} \times$$

$$\times \exp\{-\ln(a/F)/(1+2b(\sqrt{1/b\ln(a/F)}-d-\sqrt{m})^2/m_0)\}, \quad (3)$$

где m_0 – объем классифицированной обучающей выборки; $a = 0{,}65$, $b = 0{,}443$, $d = 0{,}75$. В (3) значения m должны выбираться не произвольно, а с учетом обеспечения задаваемых D и F при располагаемом g:

$$m = ((\Phi^{-1}(D)+(1+g)\Phi^{-1}(1-F))/g)^2. \quad (4)$$

Расчеты по (2) при $g = 0{,}1$ и 1, $F = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ показывают:

1) с ростом m_0 адаптивный обнаружитель по эффективности приближается к оптимальному. Если, например, при $m_0 = 20$ адаптивный обнаружитель «далек» до оптимального, то при увеличении m_0 до 500 имеем практически характеристики оптимального обнаружителя;

2) при $g = 0{,}1$ требуемый объем ППП гораздо больше m_0. При $g = 1$ они оказываются сопоставимыми.

Практически интерес представляет сопоставление обнаружителей по коэффициенту относительной эффективности (КОЭ). Последний показывает величину отношения объемов обрабатываемых ППП, сравниваемых обнаружителями при одинаковых условиях. Расчеты для $D = 0{,}9$, $F = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ показывают:

1) КОЭ адаптивного обнаружителя практически не зависит от задаваемой F;

2) без учета m_0 КОЭ адаптивного обнаружителя увеличивается при возрастании g. Но при больших m_0 этой зависимости нет (при $g = 0{,}1$ имеем 0,75–0,99, при $g = 1$ – – 0,84–0,99);

3) с учетом m_0 КОЭ адаптивного обнаружителя заметно уменьшается при большем g (при $g = 0{,}1$ имеем 0,75–0,88, при $g = 1$ – 0,69–0,13), причем при $g = 0{,}1$ с ростом объема обучающей выборки наблюдается рост КОЭ, а при $g = 1$ – уменьшение КОЭ до недопустимых значений.

Таким образом, адаптивный обнаружитель, уступая по эффективности оптимальному обнаружителю, с увеличением m_0 приближается к его качественным показателям и достигает их практически при m_0 = 500.

Обратимся к рассмотрению условной вероятности ложной тревоги адаптивного обнаружителя. Важно заметить, что в известных работах эту вероятность не рассматривают.

Из расчетов по (3) с учетом (4) для D = 0,9, $F = 10^{-4}$, 10^{-5}, 10^{-6} следует:

1) при g = 0,1 задаваемая $F = 10^{-4}$ достигается при значительном объеме m_0 = = 21 000, превышающем примерно в 40 раз объем m_0 = 500, обеспечивающий равенство D адаптивного и оптимального обнаружителей. $F = 10^{-5}$ и 10^{-6} достигаются при еще больших m_0;

2) при g = 1 задаваемые F реализуются при m_0 = 500.

Таким образом, если показатели качества работы адаптивного обнаружителя при g = 1 разработчиков могут устраивать, то при g = 0,1 требуемый объем обучающей выборки в реализации может быть проблематичным.

Обратимся к другому принципу преодоления априорной неопределенности, основанному на применении двухканальных непараметрических, в том числе ранговых, алгоритмов, обеспечивающих устойчивость F при изменении λ_0. Рассмотрим изученные авторами настоящей статьи быстрые двухканальные алгоритмы: ранговые Манна – Уитни и Сэвиджа и непараметрический Вальда – Вольфовица [1, 4, 5].

Алгоритм работы обнаружителя Манна – Уитни определяется видом одноименного рангового двухвыборочного теста [1]:

$$S_{\text{М}} = \sum\nolimits_{j=1}^{m} R_j - 0{,}5m(m+1) = \sum\nolimits_{j=1}^{m} R_j - \sum\nolimits_{j=1}^{m} j = \sum\nolimits_{j=1}^{m} (R_j - j)\,. \tag{5}$$

где R_j – ранг j-го импульса первого ППП в объединенном ППП. Структурная схема обнаружителя содержит четыре ключа, блок сравнения, два блока нормирования, три накопители (или счетчика) импульсов, блок разности и пороговый блок. Условная вероятность правильного обнаружения равна

$$D_{\text{М}} = \Phi\{(1+g)/\sqrt{1+2g}\;(\sqrt{1{,}5m}\,(1-1/(1+g)) - \Phi^{-1}(1-F/2))\}\,. \tag{6}$$

Алгоритм работы обнаружителя Сэвиджа определяется видом одноименного рангового двухвыборочного теста [4–5]

$$S_{\text{С}} = \sum\nolimits_{i=1}^{m} \sum\nolimits_{j=2m-R_i+1}^{2m} 1/j\,. \tag{7}$$

Структурная схема обнаружителя содержит суммирующий блок с управлением, сумматор, три ключа, два блока нормирования, накопитель (или счетчик) импульсов, блок сравнения и пороговый блок. Условная вероятность правильного обнаружения равна

$$D_{\text{С}} = \Phi\{(-\sqrt{2m}\,g/(2+g)\ln(0{,}5g/(1+g)) - \Phi^{-1}(1-F/2))/$$

$$/(2/(2+g)\sqrt{(1+2(1+g)/(2+g))\ln(0{,}5g/(1+g))}\times$$

$$\times\sqrt{(g^2/(2+g)\ln(0{,}5g/(1+g)) - 2)}\,)\}\,. \tag{8}$$

Алгоритм работы обнаружителя Вальда – Вольфовица определяется видом одноименного непараметрического двухвыборочного теста [1]

$$S_С = s_1 + s_2, \qquad (9)$$

где s_1, s_2 – число серий импульсов первого ППП и второго ППП соответственно в общем (объединенном) ППП (серией называют последовательность элементов одной выборки в общем вариационном ряду, ограниченную с двух сторон элементами другой выборки). Структурная схема обнаружителя содержит два ключа, блок сравнения, RS-триггер, дифференцирующий блок, два диода, инвертор, блок «ИЛИ», блок нормирования, счетчик импульсов и пороговый блок.

Условная вероятность правильного обнаружения равна

$$D_В = \Phi\{0,5(2+g)^2 / \sqrt{2(1+g)(1+(1+g)^2)}\,(\sqrt{2m}\,g/(2+g) - \Phi^{-1}(1-F))\}. \qquad (10)$$

Перед сопоставлением алгоритмов обнаружения заметим, что оптимальный и адаптивный обнаружители «настроены» на экспоненциальные распределения, а непараметрические – на гипотетические равномерные распределения, связанные с экспоненциальными распределениями [1].

Из расчетов по представленным формулам следует:

1) наиболее эффективным является малоизученный обнаружитель Сэвиджа. Затем следуют обнаружитель Манна – Уитни, оптимальный обнаружитель и обнаружитель Вальда – Вольфовица:

• при D = 0,5–0,9 и F = 10^{-6}–10^{-4}, g = 0,1–1,0 КОЭ обнаружителя Сэвиджа по сравнению с обнаружителем Манна – Уитни составляет 3,50–1,09;

• при D = 0,5–0,9 и F = 10^{-6}–10^{-4}, g = 0,1–3,1 КОЭ обнаружителя Манна – Уитни составляет по сравнению с оптимальным обнаружителем 2,24–0,84, с обнаружителем Вальда – Вольфовица 3,12–1,05;

2) наибольшая эффективность непараметрических обнаружителей приходится на меньшие условные вероятности ложной тревоги и малые отношения сигнала к шуму;

3) алгоритм Сэвиджа оказывается сложнее в практической реализации алгоритмов Манна – Уитни и Вальда – Вольфовица;

4) при $g \geq 1,4$, когда оптимальный обнаружитель сравнивается по эффективности с обнаружителем Манна – Уитни и незначительно превосходит его, возможно применение адаптивного алгоритма.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Никитенок В. И., Ветохин С. С. Быстрые непараметрические алгоритмы обнаружения слабых оптических сигналов // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 1 (22). С. 104–113.

2. Никитенок В. И., Ветохин С. С. Об оптимальном обнаружении слабых оптических сигналов // Тр. БГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки и информатика. 2015. № 6 (179). С. 88–91.

3. Никитенок В. И., Ветохин С. С. Методика расчета рабочих характеристик адаптивного обнаружителя слабых оптических сигналов // Тр. БГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки и информатика. 2016. № 7 (180).

4. Никитенок В. И. Быстрый двухканальный ранговый обнаружитель Сэвиджа // Вестн. Воен. акад. Респ. Беларусь. 2012. № 1, ч. 1. С. 92–99.

5. Патент на изобретение № 17152 от 30.06.2013. Заявка № а 20110949 от 08.07.2011.