ОБ ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ МОДЕЛИ КРАТКОСРОЧНЫХ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Г.А. Медведев
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
MedvedevGA@bsu.by

В рамках теории диффузионных процессов существуют разнообразные версии изменения краткосрочных процентных ставок доходности. Тем не менее до сих пор не появилось такой модели, которая смогла бы быть подходящей основой для построения временной структуры доходности, близкой к существующей на реальном финансовом рынке. Наиболее известны модели процентных ставок, приводящие к аффинным временным структурам доходности, поскольку они просты и подразумевают решение в аналитическом виде. Однако воспроизведения реальных временных структур с помощью аффинных моделей неточны. В последнее время развитие моделей идет в двух направлениях: увеличение размерности моделей и отказ от аффинных свойств. В качестве представителей такого развития наиболее популярны сейчас так называемые квалратичные модели процессов процентных ставок, в которых процесс процентной ставки $r(t)$ задается уравнениями

$$dX(t) = \xi(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dW(t), \quad t > t_0, \quad X(t_0) = X_0,$$

$$r(t) = \alpha + X(t)^\top \Psi X(t), \quad X(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1, \quad \Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Обычно $\alpha \geqslant 0$, Ψ — симметрическая положительно определенная матрица. Когда вектор $\xi(X)$ линейно зависит от X, а матрица $\sigma(X)$ не зависит от X, процесс $X(t)$ является гауссовым и в стационарном режиме имеет, скажем, математическое ожидание μ и матрицу ковариации V.

Утверждение. *При принятых условиях производящая функция моментов процесса процентной ставки $r(t)$ определяется соотношением*

$$M(z) = e^{\alpha z - \mu^\top V^{-1}\mu/2 + \mu^\top (V - 2zV\Psi V)^{-1}\mu/2} \frac{|V|^{1/2}}{|V - 2zV\Psi V|^{1/2}},$$

где z — вещественная переменная с областью определения, задаваемой неравенством

$$|V - 2zV\Psi V| > 0.$$

Следствие 1. *Стационарное математическое ожидание процесса $r(t)$ имеет вид*

$$E[r] = \alpha + \mu^\top \Psi \mu + V \circ \Psi,$$

где $\circ$ — сумма произведений соответствующих элементов матриц, $V \circ \Psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{i,j}\Psi_{i,j}$.

Следствие 2. *Пусть Ψ и V — диагональные матрицы $\Psi = \psi I$, $V = vI$. В этом случае*

$$M(z) = e^{\alpha z - \mu^\top \mu z\psi/(1-2zv\psi)} \frac{1}{(1-2zv\psi)^{n/2}},$$

а основные стационарные моменты процесса $r(t)$ вычисляются по формулам

$$E[r] = \alpha + nv\psi + \mu^\top \mu\psi, \quad \mathrm{Var}\,[r] = 2v(nv + 2\mu)\psi^2,$$

$$E[(r - E[r])^3] = 8v^2(nv + 3\mu)\psi^3.$$

Следствие 3. *Если условия следствия 2 дополнить равенством $\mu = 0$, то маргинальным распределением процесса $r(t)$ будет сдвинутое распределение гамма с параметром сдвига α, параметром маситаба $1/(2v\psi)$ и параметром формы $n/2$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция».