ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.А. Леваков

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
levakov@tut.by

Пусть H и U — сепарабельные гильбертовы пространства; $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с потоком $\mathcal{F}_t$; Q — ограниченный симметрический положительно определенный оператор на U; L_2^0 — пространство операторов Гильберта — Шмидта $B : U_0 \to H$ с нормой $B = (\sum_{i=1}^{\infty} \|Bu_i\|^2)^{1/2}$ (u_i — полный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $U_0 = Q^{1/2}U$, состоящем из элементов пространства U, скалярное произведение в котором задается следующим образом: $\langle u,v\rangle = \langle Q^{-1/2}u, Q^{-1/2}v\rangle)$; $W(t)$ — $(\mathfrak{F}_t)$-согласованный Q-винеровский процесс со значениями в U; $\mathrm{cl}\,(Y)$ $(\mathrm{conv}\,(Y))$ — пространство всех непустых ограниченных замкнутых (выпуклых компактных) подмножеств пространства Y с метрикой Хаусдорфа α; $q:[0,t_1]\times\Omega\times H\to \mathrm{cl}\,(H)$, $g:[0,t_1]\times\Omega\times H\to \mathrm{cl}\,(L_2^0)$, $f:[0,t_1]\times\Omega\times H\to$ $\to \mathrm{conv}\,(H)$ — многозначные отображения; $\eta:\Omega\to H$ — $(\mathfrak{F}_0)$-измеримая случайная величина.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное включение

$$dx(t)\in (f(t,\omega,x(t))+q(t,\omega,x(t)))\,dt+g(t,\omega,x(t))\,dW(t). \tag{1}$$

Определение 1. Под сильным решением включения (1) с начальным условием $\eta(\omega)$ понимаем непрерывный случайный процесс $x(t,\omega)$, $t\in[0,t_1]$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, удовлетворяющий условиям:

а) $x(t,\omega)$ согласован с потоком $\mathcal{F}_t$;

б) существует абсолютно непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс $\xi(t,\omega)$ такой, что с вероятностью 1 $\xi'(t,\omega)\in f(t,\omega,x(t,\omega))$ для почти всех $t\in[0,t_1]$;

в) существуют измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы $v(t,\omega),u(t,\omega)$, удовлетворяющие условиям: для каждого $t\in[0,t_1]$ с вероятностью 1 $\int_0^t\|v(s,\omega)\|\,ds<\infty$, $\int_0^t\|u(s,\omega)\|^2\,ds<\infty$, $v(t,\omega)\in q(t,\omega,x(t,\omega))$, $u(t,\omega)\in g(t,\omega,x(t,\omega))$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,t_1]\times\Omega$;

г) для каждого $t\in[0,t_1]$ с вероятностью 1 $x(t,\omega)=\eta(\omega)+\xi(t,\omega)+\int_0^t v(s,\omega)\,ds+$ $+\int_0^t u(s,\omega)\,dW(s)$.

Будем говорить, что отображения f, q и g удовлетворяют условию A), если при каждом фиксированном x процессы $f(\cdot,\cdot,x)$, $q(\cdot,\cdot,x)$ и $g(\cdot,\cdot,x)$ измеримы и $(\mathfrak{F}_t)$-согласованы; существует вещественный измеримый процесс $k(t,\omega)\geqslant 1$, определенный на $[0,t_1]\times\Omega$, который удовлетворяет условию $E(\int_0^{t_1}k(t,\omega)\,dt)<\infty$, и такой, что при всех $t\in[0,t_1], z\in H, y\in H$, $x\in H$, $\omega\in\Omega$ выполняются неравенства

$$(\alpha(q(t,\omega,y),q(t,\omega,z)))^2\leqslant k(t,\omega)\|y-z\|^2,\quad (\alpha(g(t,\omega,y),g(t,\omega,z)))^2\leqslant k(t,\omega)\|y-z\|^2,$$

$$2\langle (y-z),(d_1-d_2)\rangle\leqslant k(t,\omega)\|y-z\|^2\quad \forall d_1\in f(t,\omega,y),\quad \forall d_2\in f(t,\omega,z),$$

$$\|d\|^2+\|v\|^2+\|u\|^2\leqslant k(t,\omega)(1+\|x\|^2)$$

для всех $d\in f(t,\omega,x)$, $v\in q(t,\omega,x)$, $u\in g(t,\omega,x)$.

Теорема. *Пусть q, g, f — многозначные отображения, удовлетворяющие условию A), кроме того, отображение f является непрерывным по x при каждых фиксированных (t,ω). Тогда для любой $(\mathcal{F}_0)$-измеримой ограниченной случайной величины $\eta(\omega)$ включение (1) имеет сильное решение $X(t,\omega)$ с начальным условием η.*