УДК 517.9

М. Г. КОТ

О РЕЗОЛЬВЕНТНОЙ СХОДИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ С δ-ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Изучены уравнения вида $L_0u=-\Delta u+a(\varepsilon)\delta u=f,$ которые рассматриваются в разных приложениях. Они включают в себя произведение δu, которое не определено в классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание смысла данному выражению. Поэтапно исследован один из главных подходов к решению этой задачи, основанный на аппроксимации выражения семейством корректно заданных операторов L_ε и нахождении предела резольвент, включающий в себя: построение аппроксимаций рассматриваемого выражения операторами конечного ранга; нахождение явного вида резольвенты аппроксимирующего семейства; установление предела резольвенты и выделение случаев резонанса. Получены результаты, отличные от имеющихся в скалярном виде: возникают случаи, когда предел $D(\lambda)$ равен бесконечности.

Ключевые слова: обобщенная функция; семейство операторов; аппроксимация выражения; резольвента.

This article describes the equations of the type $L_0u=-\Delta u+a(\varepsilon)\delta u=f$ that occur in different applications. They include multiplication δu, which is not defined in the classical theory of generalized functions, therefore one of the main objectives is to give meaning to the expression on the left side. Considered one of the main approaches to solving this problem based on an approximation expression family correctly defined operators L_ε, and then finding the limit of resolvents. In this article, we have to do the following steps of this approach: the construction of approximations considered expression operators of finite rank; finding the explicit form of the resolvent approximating family; finding resolutions and limit the selection of cases resonance. The results obtained differ from the results obtained in the scalar form, there are cases when the limit $D(\lambda)$ is equal to infinity.

Key words: generalized function; family of operators; approximation of expression; resolvent.

Уравнения, записываемые в виде

$$L_0u=-\Delta u+a(\varepsilon)\delta u=f, \tag{1}$$

возникают в разных приложениях [1] и интенсивно изучаются. Входящее в (1) произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание смысла выражению в левой части (1), т. е. фактически построение оператора, соответствующего формальному выражению (1).

Один из главных подходов к решению этой задачи основан на аппроксимации выражения семейством корректно заданных операторов L_ε и нахождении предела резольвент

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(L_\varepsilon-\lambda)^{-1}:=R(\lambda).$$

Если такой предел существует, то операторно-значная функция $R(\lambda)$ оказывается резольвентой некоторого оператора, который соответствует рассматриваемой аппроксимации формального выражения. В пространстве операторов $L_2(R^3)$ скалярных функций было обнаружено, что в типичных случаях $R_0(\lambda)$ есть резольвента невозмущенного оператора $R_0(\lambda)=(-\Delta-\lambda I)^{-1}$, но возможны случаи *резонанса*, когда $R_0(\lambda)$ есть резольвента некоторого оператора, отличного от $-\Delta$. Резольвента $R_0(\lambda)$ действует по формуле

$$R_0(\lambda)f=E_\lambda * f,$$

где * – свертка функций; $E_\lambda(x)$ – фундаментальное решение для оператора $-\Delta u-\lambda u,$ заданное формулой

$$E_\lambda(x)=\frac{1}{4\pi\|x\|}e^{-\mu\|x\|},$$

где $\mu^2=-\lambda,$ $\operatorname{Re}\mu>0.$ Отметим, что $E_\lambda\in L_2(R^3).$

Анализ систем уравнений обычно сложнее, нежели анализ одного уравнения, и содержит большее число возможных вариантов. Цель настоящей работы – исследование в пространстве вектор-функций $L_2(R^3)^2$ системы уравнений (1), где $u=(u_1,u_2),$ а коэффициент является матрицей вида

$$a(\varepsilon)=\begin{pmatrix}0 & a_1(\varepsilon)\\ a_2(\varepsilon) & 0\end{pmatrix}.$$

Специальный вид матрицы коэффициентов соответствует тому, что в данной системе вторая компонента воздействует на первую, а первая – на вторую. Заметим, что системы с такими матрицами коэффициентов возникают в квантовой механике.

Наиболее простыми являются аппроксимации с помощью операторов конечного ранга. Мы применяем подход, развитый в [2, 3] для исследования уравнений с δ-образными коэффициентами. Основные этапы этого подхода: построение аппроксимаций рассматриваемого выражения операторами конечного ранга; нахождение явного вида резольвенты аппроксимирующего семейства; установление предела резольвенты и выделение случаев резонанса; описание спектра построенных предельных операторов; исследование поведения собственных значений аппроксимирующих операторов. Ввиду ограничения объема в данной статье представлены только первые три этапа, следующие два предполагается изложить в последующих работах.

Построение аппроксимации

Мы рассматриваем формальную систему

$$-\Delta u_1 + a_1(\varepsilon)\delta u_2 = f_1,$$

$$-\Delta u_2 + a_2(\varepsilon)\delta u_1 = f_2.$$

Пусть φ – финитная функция из пространства Шварца $D(R^3)$ [4] такая, что $\int \varphi(x)dx = 1.$ Тогда семейство гладких функций $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ задает аппроксимацию δ-функции как элемента пространства обобщенных функций, а семейство функционалов $\widehat{O}_\varepsilon(u) = \int u(x)\varphi_\varepsilon(x)dx$ – аппроксимацию δ-функции как функционала. В связи с этим для гладких функций *u* имеем $\widehat{O}_\varepsilon(u)\varphi_\varepsilon \to u(0)\delta = \delta u$ [3], т. е. на гладких функциях семейство операторов $\widehat{O}_\varepsilon(u)\varphi_\varepsilon$ сходится к произведению δ*u*.

Таким образом, оператор

$$L_\varepsilon u = -\Delta u + a(\varepsilon)\int u(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\,\varphi_\varepsilon(x)$$

задает аппроксимацию формального выражения $-\Delta u + a(\varepsilon)\delta u,$ в покоординатной записи это семейство имеет вид

$$L_\varepsilon(u)_1 = -\Delta u_1 + a_1(\varepsilon)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\,\varphi_\varepsilon(x);$$

$$L_\varepsilon(u)_2 = -\Delta u_2 + a_2(\varepsilon)\int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\,\varphi_\varepsilon(x).$$

Задача заключается в исследовании поведения решений уравнения $(L_\varepsilon - \lambda)u = f$ при $\varepsilon \to 0.$

Резольвента аппроксимирующих операторов

При фиксированном ε > 0 найдем для данных аппроксимаций такие решения непосредственно, т. е. построим резольвенту $(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} f = u$ и найдем, для каких λ она определена.

Лемма. *Резольвента* $(L_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ *аппроксимирующего семейства* $L_\varepsilon(u)$ *записывается в виде*

$$(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} = R_0(\lambda)f - S(\varepsilon,\lambda)\tilde{f}\left(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\right)(x), \qquad (2)$$

где

$$R_0(\lambda)f = \begin{bmatrix} R_0(\lambda)f_1 \\ R_0(\lambda)f_2 \end{bmatrix};\ \tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix},\ \tilde{f}_1 = \int\left(R_0(\lambda)f_2\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,\ \tilde{f}_2 = \int\left(R_0(\lambda)f_1\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy;$$

$S(\varepsilon,\lambda)$ *– матрица вида*

$$S(\varepsilon,\lambda)=\frac{1}{1-a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b^2(\varepsilon,\lambda)}\begin{bmatrix} a_1(\varepsilon) & -a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda) \\ -a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda) & a_2(\varepsilon)\end{bmatrix},$$

$$b(\varepsilon,\lambda)=\int\left(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy. \tag{3}$$

Резольвента определена, если $\lambda\notin R^+$ *и* $1-a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b^2(\varepsilon,\lambda)\neq 0.$

Доказательство. Построение резольвенты эквивалентно нахождению решения системы

$$\begin{gathered} -\Delta u_1-\lambda u_1+a_1(\varepsilon)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy\,\varphi_\varepsilon(x)=f_1, \\ -\Delta u_2-\lambda u_2+a_2(\varepsilon)\int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy\,\varphi_\varepsilon(x)=f_2. \end{gathered} \tag{4}$$

Из системы (4) получаем, что если решение существует, то оно имеет вид

$$\begin{gathered} u_1(x)=R_\lambda f_1-C_1(\varepsilon)\left(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\right)(x), \\ u_2(x)=R_\lambda f_2-C_2(\varepsilon)\left(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\right)(x), \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} C_1(\varepsilon)=a_1(\varepsilon)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy, \\ C_2(\varepsilon)=a_2(\varepsilon)\int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy. \end{gathered} \tag{6}$$

Преобразовав выражения (5) и (6), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1(\varepsilon)+a_1(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_2(\varepsilon)=a_1(\varepsilon)\tilde{f}_1, \\ a_2(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon)=a_2(\varepsilon)\tilde{f}_2, \end{cases}$$

где

$$\tilde{f}_1=\int\left(R_0(\lambda)f_2\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy;\quad \tilde{f}_2=\int\left(R_0(\lambda)f_1\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy,$$

и $b(\varepsilon,\lambda)$ задается формулой (3).

Система имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_1(\varepsilon)} & b(\varepsilon,\lambda) \\ b(\varepsilon,\lambda) & \dfrac{1}{a_2(\varepsilon)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1(\varepsilon) \\ C_2(\varepsilon)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2\end{bmatrix}.$$

Поэтому если $\det\begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_1(\varepsilon)} & b(\varepsilon,\lambda) \\ b(\varepsilon,\lambda) & \dfrac{1}{a_2(\varepsilon)}\end{bmatrix}\neq 0,$ то $\begin{bmatrix} C_1(\varepsilon) \\ C_2(\varepsilon)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_1(\varepsilon)} & b(\varepsilon,\lambda) \\ b(\varepsilon,\lambda) & \dfrac{1}{a_2(\varepsilon)}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2\end{bmatrix}.$

Выполнив все необходимые вычисления, получаем

$$\begin{bmatrix} C_1(\varepsilon) \\ C_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon,\lambda) \right) \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_2(\varepsilon)} & -b(\varepsilon,\lambda) \\ -b(\varepsilon,\lambda) & \dfrac{1}{a_1(\varepsilon)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, решение (5) представляется в виде

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0(\lambda) f_1 \\ R_0(\lambda) f_2 \end{bmatrix} - S(\varepsilon,\lambda) \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix} \left(R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon \right)(x),$$

что эквивалентно (2). Лемма доказана.

Предел резольвент

Основной задачей является исследование поведения построенных резольвент (5) при $\varepsilon \to 0.$ В полученное выражение входят величины, имеющие вид и поведение, аналогичные скалярному случаю. Пусть

$$\left(u_0^1, u_0^2\right) = \left(E_\lambda * f_1, E_\lambda * f_2\right).$$

Тогда

$$\tilde{f}_1(\varepsilon) \to u_0^2(0), \quad \tilde{f}_2(\varepsilon) \to u_0^1(0).$$

Кроме того, известно, что $E_\lambda(\varepsilon) = E_\lambda * \varphi_\varepsilon \to E_\lambda,$ причем сходимость имеет место не только в смысле обобщенных функций, но и в $L_2\left(R^3\right).$

Из существования указанных пределов получаем, что нахождение предела резольвент сводится к нахождению предела

$$\lim_{\varepsilon \to 0} S(\varepsilon,\lambda) := D(\lambda) \tag{7}$$

и предел резольвент имеет вид

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) f - D(\lambda) \begin{bmatrix} u_0^2(0) \\ u_0^1(0) \end{bmatrix} E(\lambda).$$

В трехмерном случае для величины (3) имеет место разложение [3]

$$b(\varepsilon,\lambda) = M \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\mu}{4\pi} + o(\varepsilon),$$

где

$$M(\varepsilon,\lambda) = \frac{1}{4\pi} \int \left(\int \varphi(y) \bar{\varphi}(x-y)\,dy \right) \frac{1}{\|x\|}\,dx.$$

Задача заключается в том, чтобы выяснить, для каких коэффициентов $a(\varepsilon)$ существует ненулевой предел (7), и найти его. Рассмотрим коэффициенты $a_1(\varepsilon)$ и $a_2(\varepsilon),$ для которых обратные величины имеют вид

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-2}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + o(\varepsilon). \tag{8}$$

В скалярном случае наиболее содержательные результаты имеют место именно для коэффициентов такого вида.

Теорема. *Для коэффициентов* $a_1(\varepsilon)$ и $a_2(\varepsilon)$ *вида (8) предел* $D(\lambda)$ *может быть ненулевым только в трех случаях.*

1) $\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_0^1 + k_1^1\varepsilon + k_2^1\varepsilon^2 + o(\varepsilon)$, $\dfrac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-2}^2\dfrac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^2\dfrac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + o(\varepsilon)$,

т. е. $k_{-2}^1 = 0$, $k_{-1}^1 = 0$.
Тогда

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{k_{-2}^2}{k_0^1 k_{-2}^2 - M^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

если $k_0^1 k_{-2}^2 - M^2 \neq 0$.

В случае, когда $k_0^1 k_{-2}^2 = M^2$, *предел (7) равен бесконечности.*

2) $\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-1}^1\dfrac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + k_1^1\varepsilon + o(\varepsilon)$, $\dfrac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-1}^2\dfrac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + k_1^2\varepsilon + o(\varepsilon)$,

т. е. $k_{-2}^1 = 0$, $k_{-2}^2 = 0$ *и при этом выполнено условие резонанса* $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M^2$.
Следовательно,

$$D(\lambda) = \frac{1}{k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + \dfrac{M\mu}{2\pi}} \begin{bmatrix} k_{-1}^2 & -M \\ -M & k_{-1}^1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

3) $\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-2}^1\dfrac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^1\dfrac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + o(\varepsilon)$, $\dfrac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_0^2 + k_1^2\varepsilon + k_2^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon)$,

т. е. $k_{-2}^2 = 0$, $k_{-1}^2 = 0$.
Имеем

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{k_{-2}^1}{k_0^2 k_{-2}^1 - M^2} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

если $k_0^2 k_{-2}^1 - M^2 \neq 0$.

В случае, когда $k_0^2 k_{-2}^1 = M^2$, *предел (7) равен бесконечности.*
Для всех остальных коэффициентов вида (8) предел (7) нулевой.

Доказательство. Запишем $S(\varepsilon, \lambda)$ в виде

$$S(\varepsilon,\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\dfrac{1}{a_2(\varepsilon)}}{\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon,\lambda)} & \dfrac{-b(\varepsilon,\lambda)}{\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon,\lambda)} \\ \dfrac{-b(\varepsilon,\lambda)}{\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon,\lambda)} & \dfrac{\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)}}{\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon,\lambda)} \end{bmatrix}.$$

Согласно (8)

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} = k_{-2}^1 k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^4} + \left(k_{-2}^1 k_{-1}^2 + k_{-1}^1 k_{-2}^2\right)\frac{1}{\varepsilon^3} + \left(k_{-2}^1 k_0^2 + k_{-1}^1 k_{-1}^2 + k_0^1 k_{-2}^2\right)\frac{1}{\varepsilon^2} +$$
$$+ \left(k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2\right)\frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 k_0^2 + o(\varepsilon);$$

$$b^2(\varepsilon, \lambda) = M^2 \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{M\mu}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\mu^2}{16\pi^2}.$$

Знаменатель запишется в виде

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon, \lambda) = k_{-2}^1 k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^4} + \left(k_{-2}^1 k_{-1}^2 + k_{-1}^1 k_{-2}^2\right)\frac{1}{\varepsilon^3} + \left(k_{-2}^1 k_0^2 + k_{-1}^1 k_{-1}^2 + k_0^1 k_{-2}^2 - M^2\right)\frac{1}{\varepsilon^2} +$$
$$+ \left(k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + \frac{M\mu}{2\pi}\right)\frac{1}{\varepsilon} + \left(k_0^1 k_0^2 - \frac{\mu^2}{16\pi}\right) + o(\varepsilon).$$

Получаем, что для существования ненулевого предела (7) необходимо, чтобы хотя бы один из элементов матрицы при разложении по степеням ε в числителе и знаменателе имел одинаковую степень.

В общем случае разложение числителя имеет степень $\frac{1}{\varepsilon^2}$, а знаменателя – $\frac{1}{\varepsilon^4}$. Предел (7) в этом случае равен нулю. Для существования ненулевого предела необходимо, чтобы коэффициенты при $\frac{1}{\varepsilon^4}$ и $\frac{1}{\varepsilon^3}$ были равны нулю.

$$\begin{cases} k_{-2}^1 k_{-2}^2 = 0, \\ k_{-2}^1 k_{-1}^2 + k_{-1}^1 k_{-2}^2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим три случая.

1. $\begin{cases} k_{-2}^1 = 0, \\ k_{-1}^1 = 0. \end{cases}$

Степени числителя и знаменателя равны, тогда существует конечный ненулевой предел (9), если $k_0^1 k_{-2}^2 - M^2 \neq 0.$

2. $\begin{cases} k_{-2}^1 = 0, \\ k_{-2}^2 = 0. \end{cases}$

Степень числителя меньше степени знаменателя, таким образом, необходимо, чтобы коэффициент при $\frac{1}{\varepsilon^2}$ был равен нулю. Следовательно, для существования ненулевого предела необходимо выполнение условия резонанса $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M^2$ и тогда справедливо (10).

Таким образом, при данном виде величин $a_1(\varepsilon)$ и $a_2(\varepsilon)$ получили условия резонанса, аналогичные условиям в скалярном случае.

3. $\begin{cases} k_{-2}^2 = 0, \\ k_{-1}^2 = 0. \end{cases}$

Аналогично случаю 1 получаем, что если $k_0^2 k_{-2}^1 - M^2 \neq 0,$ то имеет место (11).

Теорема доказана.

Из пунктов 1 и 3 вышеизложенного доказательства видно, что при анализе системы возникают варианты, когда предел $D(\lambda)$ равен бесконечности, т. е. предела резольвент не существует. Таким образом, в векторном пространстве появляются ситуации, которые не встречались в скалярном.

В терминах исходных коэффициентов случай 1 соответствует коэффициентам вида

$$a_1(\varepsilon) = a_0^1 + a_1^1\varepsilon + a_2^1\varepsilon^2 + o(\varepsilon), \quad a_2(\varepsilon) = a_2^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon),$$

случай 2

$$a_1(\varepsilon) = a_1^1\varepsilon + a_2^1\varepsilon^2 + o(\varepsilon), \quad a_2(\varepsilon) = a_1^2\varepsilon + a_2^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon),$$

а случай 3 – коэффициентам вида

$$a_1(\varepsilon) = a_2^1\varepsilon^2 + o(\varepsilon), \quad a_2(\varepsilon) = a_0^2 + a_1^2\varepsilon + a_2^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Холден Х.* Решаемые модели в квантовой механике. М., 1991.
2. *Антоневич А. Б., Романчук Т. А.* Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами // Актуальные проблемы математики : сб. науч. тр. / Гродн. гос. ун-т ; редкол.: Е. Н. Ровба [и др.]. Гродно, 2008. С. 11–28.
3. *Антоневич А. Б., Романчук Т. А.* Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций. Саарбрюккен, 2012.
4. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.

Поступила в редакцию 05.04.2015.

Марина Геннадьевна Кот – аспирантка кафедры функционального анализа механико-математического факультета БГУ. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа механико-математического факультета БГУ А. Б. Антоневич.

УДК 517.925.51

М. М. ВАСЬКОВСКИЙ, Я. Б. ЗАДВОРНЫЙ, И. В. КАЧАН

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Доказаны теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости по вероятности решений неавтономных стохастических дифференциальных систем с запаздыванием с разрывными коэффициентами. Использован метод функционалов Ляпунова для исследования устойчивости, асимптотической устойчивости, устойчивости по линейному приближению. Определено решение стохастической системы с запаздыванием с разрывными коэффициентами как решение стохастического включения с запаздыванием, построенного по исходной системе. Приведено доказательство общих теорем об устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономных стохастических систем с запаздыванием в предположении о существовании соответствующих функционалов Ляпунова. Кроме того, доказана теорема об асимптотической устойчивости по линейному приближению для неавтономных систем с запаздыванием с разрывными коэффициентами с помощью функционала Ляпунова, построенного по системе линейного приближения, в предположении, что нулевое решение системы линейного приближения является равномерно экспоненциально устойчивым.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение; слабое решение; устойчивость по вероятности; функции Ляпунова.

The purpose of the present paper consists is to prove theorems on stability and asymptotic stability in probability of solutions of stochastic non-autonomous delay systems with discontinuous right-hand sides. We have used Lyapunov functionals method for investigating of stability, asymptotic stability and stability in the first approximation. We define a solution of stochastic delay systems with discontinuous right-hand sides as a solution of a stochastic delay inclusion constructed through the original system. There are proved general theorems of stability and asymptotic stability of zero solution to non-autonomous stochastic delay systems providing the existence of appropriate Lyapunov functionals. Moreover we have proved a version of the theorem on asymptotic stability in probability in the first approximation for stochastic non-autonomous delay systems with discontinuous right-hand sides with help of the Lyapunov functional constructed through the first approximation system providing that linear approximation has uniformly exponential stable zero solution.

Key words: stochastic differential equation; weak solution; stability in probability; Lyapunov functions.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$dx(t) = f(t, x(t), x_t)dt + g(t, x(t), x_t)dW(t), \tag{1}$$

где $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times C_h \to \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times C_h \to \mathbb{R}^{d\times d}$ – измеримые по Борелю функции; $x_t = \{x(t+\tau) \mid -h \leq \leq \tau \leq 0\} \in C_h$, $C_h = C([-h, 0], \mathbb{R}^d)$, $h > 0$, – время запаздывания; $W(t)$ – d-мерное броуновское движение.