Министерство образования Республики Беларусь
Учебно-методическое объединение по естественнонаучному образованию

УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель Министра образования
Республики Беларусь
__________ В.А. Богуш
«__» июля 2016 г.
Регистрационный № ТД-G.604/тип.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Типовая учебная программа по учебной дисциплине
для специальности
1-31 03 08 Математика и информационные технологии (по направлениям)

СОГЛАСОВАНО
Председатель
Учебно-методического объединения
по естественнонаучному
образованию
__________ А.Л. Толстик
«__» __________ 2015 г.

СОГЛАСОВАНО
Начальник Управления высшего
образования Министерства
образования Республики Беларусь
__________ С.И. Романюк
«4» июля 2016 г.

СОГЛАСОВАНО
Проректор по научно-методической
работе Государственного
учреждения образования
«Республиканский институт высшей
школы»
__________ И.В. Титович
«10» июня 2016 г.

Эксперт-нормоконтролер
__________ В.Г. Шваков
«19» 05 2016 г.

Минск 2016

СОСТАВИТЕЛИ:

Радыно Я.В. – заведующий кафедрой функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор;

Антоневич А.Б. –профессор кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Мазель М.Х. –доцент кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Леонов Н.Н. –доцент кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Гороховик В.В. – заведующий отделом нелинейного анализа Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси», член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор;

Астровский А. И. – профессор кафедры высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ:

Кафедрой функционального анализа Белорусского государственного университета
(протокол № 10 от 25.05.2015 г.)

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 1 от 23.09.201 г.)

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения по естественнонаучному образованию (протокол № 9 от 15.12.2015 г.)

Ответственный за редакцию: Майя Хаймовна Мазель
Ответственный за выпуск: Тимоховцева Ирина Александровна

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Функциональный анализ в наиболее широком подходе изучает такие темы: теория меры, интеграл Лебега, теорема Фубини, метрические пространства, принцип сжимающих отображений и его применения к интегральным уравнениям, компактные метрические пространства, нормированные векторные пространства, банаховы пространства, гильбертовы пространства, пространство линейных непрерывных операторов в нормированных пространствах, теорема Банаха-Штейнгауза, теорема Банаха об обратном операторе, теорема Хана-Банаха, спектр оператора, теория Рисса-Шаудера, применение основных принципов функционального анализа к интегральным уравнениям.

Функциональный анализ изучает множества с согласованными между собой алгебраическими и топологическими структурами, их отображения, а также методы, с помощью которых сведения об этих структурах применяются к конкретным задачам.

Математический анализ, высшая алгебра, топология являются подготовительными дисциплинами к изучению функционального анализа.

Среди областей применения функционального анализа можно указать математическую физику, теорию функций, теорию дифференциальных и интегральных уравнений, теорию вероятностей, методы вычислений, квантовую механику, математическую экономику и ряд других направлений. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Уравнения математической физики», «Методы оптимизации», «Экстремальные задачи и вариационное исчисление», «Численные методы».

В данном курсе излагаются основы теории меры и интеграла Лебега, метрические и нормированные пространства и операторы в них, основные принципы линейного функционального анализа. В качестве одного из примеров приложений рассматриваются интегральные уравнения.

Основными методами изучения дисциплины «Функциональный анализ» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала.

Цель дисциплины «Функциональный анализ»: освоение студентами языка современной математики, владение общими конструкциями и умение их применять в теоретических и прикладных задачах.

Образовательная цель: изложение основ теории меры и интеграла Лебега, изучение функциональных метрических пространств, теории нормированных, в частности, гильбертовых, пространств, теории линейных операторов и операторных уравнений.

Развивающая цель: формирование у студентов основ современного математического мышления, обучение методам математических, изучение конкретных функционально-аналитических конструкций.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Функциональный анализ»:

- формирование у студентов понятия меры и интеграла Лебега;

– изучение непрерывных, равномерно непрерывных отображений и отображений, удовлетворяющих условию Липшица, в функциональных пространствах;

– применение принципа сжимающих отображений к различным задачам;

– изучение основных свойств нормированных и гильбертовых пространств;

– изучение линейных ограниченных, в частности, интегральных, операторов;

– изучение компактных операторов и теории Рисса-Шаудера в гильбертовых пространствах;

– изучение альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений в пространствах $L_2[a,b]$ и $C[a,b]$.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

– основы теории меры и интеграла Лебега;

– основные функциональные пространства и операторы в них;

– основные принципы функционального анализа и примеры их приложений;

уметь:

– исследовать на разрешимость и корректную разрешимость операторных уравнений с линейным непрерывным оператором;

– использовать основные понятия функционального анализа при изучении других математических дисциплин;

– применять результаты функционального анализа для решения теоретических и прикладных задач;

владеть:

– основными методами вычисления интегралов Лебега;

– методами вычисления норм операторов и функционалов;

– методами исследования разрешимости уравнений в банаховых пространствах.

Требования к формированию компетентности специалиста.

Академические компетенции предполагают, что специалист должен:

– уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач;

– владеть системным и сравнительным анализом;

– владеть исследовательскими навыками;

– уметь работать самостоятельно;

– быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью);

– владеть междисциплинарным подходом при решении проблем;

– иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером;

– обладать навыками устной и письменной коммуникации;

– уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

Требования к профессиональным компетенциям специалиста.

Научно-исследовательская деятельность предполагает, что специалист должен:

– заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий;

– использовать и развивать современные достижения информационных технологий, в том числе в области математики;

– самостоятельно работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой, в том числе с доступной в компьютерных сетях;

– проводить исследования в области решения научно-производственных задач и оценивать эффективность таких решений.

Инновационная деятельность предполагает, что специалист должен:

– работать с научной, технической и патентной литературой.

В соответствии с Общеобразовательным стандартом высшего образования и типовыми учебными планами на изучение дисциплины для направлений специальности 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)» отводится 130 часов, в том числе аудиторных занятий -72 часа.

Примерное распределение аудиторных часов: 36 часов – лекции, 36 часов – практические занятия.

Текущий контроль освоения теоретического материала рекомендуется проводить в форме зачетов и экзаменов.

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН
для специальности 1-31 03 08 Математика и информационные технологии (по направлениям)

№	Наименование тем и разделов	Распределение часов по видам занятий		
		Всего	Лекц.	Пр.занятия
1	2	3	4	5
1	Тема 1. Метрические пространства	10	4	6
2	Тема 2. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения	4	2	2
3	Тема 3.Мера и интеграл Лебега	16	4	6
4	Тема 4. Нормированные пространства и линейные операторы	8	4	2
5	Тема 5. Гильбертовы пространства	6	4	2
6	Тема 6. Линейные операторы в банаховых пространствах	8	4	4
7	Тема 7. Сопряженные пространства и сопряженные операторы	8	4	4
8	Тема 8. Уравнения с компактными операторами	12	6	6
	ВСЕГО	72	36	36

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Наименование тем и разделов

Тема 1. Метрические пространства. Метрические пространства. Топология, порожденная метрикой. Основные примеры функциональных метрических пространств. Полные пространства. Теорема о пополнении.

Тема 2. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения. Теоремы о продолжении. Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям.

Тема 3. Мера и интеграл Лебега. Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры. Общее понятие меры. Сигма-аддитивные меры Продолжение меры по Лебегу. Основная теорема. Мера Лебега и меры Лебега-Стилтьеса на прямой. Измеримые функции, простые функции. Интеграл от простой функции. Общее определение интеграла Лебега. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.

Тема 4. Нормированные пространства и линейные операторы. Векторные, нормированные, банаховы пространства. Ряды в банаховых пространствах. Линейные операторы. Норма ограниченного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза

Тема 5. Гильбертовы пространства. Определение скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Теорема о проекции. Теорема о рядах Фурье.

Тема 6. Линейные операторы в банаховых пространствах. Обратимые операторы. Теоремы об обратимости. Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора.

Тема 7. Сопряженные пространства и сопряженные операторы. Линейные ограниченные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовых и некоторых других конкретных пространствах. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и его свойства. Теорема об условиях разрешимости линейного уравнения

Тема 8. Уравнения с компактными операторами. Альтернатива Фредгольма для уравнений с операторами конечного ранга. Компактные операторы. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах. Критерий конечно-мерности нормированного пространства. Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений.

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Методы обучения студентов практическим навыкам использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на лабораторных занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль освоения практических навыков осуществляется во время лабораторных занятий в форме проверки математических диктантов, лабораторных работ, домашних заданий, а также на контрольных работах, коллоквиумах и зачетах.

Список литературы

Основная литература:

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп. Минск, Изд-во БГУ, 2006.
2. Антоневич А.Б., Мазель М.Х., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Учебное пособие. Минск, Изд-во БГУ, 2011.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 2004.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М., Высшая школа, 1982.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Физматлит, 2002.

Дополнительная литература:

1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ю., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. Киев, Выща школа, 1990.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. СПб., Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2002.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., Наука, 1979.
4. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск, Вышэйшая школа, 1978.

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМЫХ СРЕДСТВ ДИАГНОСТИКИ

С целью текущего контроля предусматривается проведение контрольных работ (как правило, по одной на тему) и домашних работ по индивидуальным заданиям (как правило, по одной на лабораторное занятие), самостоятельные работы и опросы на практических занятиях По итогам каждого семестра рекомендуется проводить зачет и/или экзамен, коллоквиумы, компьютерные тестирования.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

Самостоятельная работа студентов - это любая деятельность, связанная с воспитанием мышления будущего профессионала. В широком смысле под самостоятельной работой следует понимать совокупность всей самостоятельной деятельности студентов как в учебной аудитории, так и вне её, в контакте с преподавателем и в его отсутствии.

Самостоятельная работа реализуется:

1. Непосредственно в процессе аудиторных занятий - на лекциях, практических и семинарских занятиях, при выполнении лабораторных работ.
2. В контакте с преподавателем вне рамок расписания - на консультациях по учебным вопросам, в ходе творческих контактов, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.
3. В библиотеке, дома, в общежитии, на кафедре при выполнении студентом учебных и творческих задач.

При изучении дисциплины организация самостоятельной работы студентов должна представлять единство трех взаимосвязанных форм:

1. Внеаудиторная самостоятельная работа;
2. Аудиторная самостоятельная работа, которая осуществляется под непосредственным руководством преподавателя;
3. Творческая, в том числе научно-исследовательская работа.

Виды внеаудиторной самостоятельной работы студентов разнообразны: подготовка и написание рефератов, докладов, очерков и других письменных работ на заданные темы.

Аудиторная самостоятельная работа может реализовываться при проведении практических занятий, семинаров, выполнении лабораторного практикума и во время чтения лекций.

При чтении лекционного курса непосредственно в аудитории необходимо контролировать усвоение материала основной массой студентов путем проведения экспресс-опросов по конкретным темам.

На практических и семинарских занятиях различные виды самостоятельной работы студентов позволяют сделать процесс обучения более интересным и поднять активность значительной части студентов в группе.

На практических занятиях рекомендуется не менее 1 часа из двух (50%

времени) отводить на самостоятельное решение задач. Практические занятия целесообразно строить следующим образом: 1. Вводное слово преподавателя (цели занятия, основные вопросы, которые должны быть рассмотрены). 2. Беглый опрос. 3. Решение 1-2 типовых задач. 4. Самостоятельное решение задач. 5. Разбор типовых ошибок при решении (в конце текущего занятия или в начале следующего).

Результативность самостоятельной работы студентов во многом определяется наличием активных методов ее контроля. Существуют следующие виды контроля:

– входной контроль знаний и умений студентов при начале изучения очередной дисциплины;

– текущий контроль, то есть регулярное отслеживание уровня усвоения материала на лекциях, практических и лабораторных занятиях;

– промежуточный контроль по окончании изучения раздела или модуля курса;

– самоконтроль, осуществляемый студентом в процессе изучения дисциплины при подготовке к контрольным мероприятиям;

– итоговый контроль по дисциплине в виде зачета или экзамена;

– контроль остаточных знаний и умений спустя определенное время после завершения изучения дисциплины.