1981 г. Февраль Том 133, вып. 2
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

530.145

СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЭНЕРГИЯ — ВРЕМЯ ИЗМЕРЕНИЯ

Ю. И. Воронцов

СОДЕРЖАНИЕ

1. РАЗНОГЛАСИЯ В ОЦЕНКЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОСТИ СООТНОШЕНИЯ ГЕЙЗЕНБЕРГА — БОРА

Среди большинства физиков существует убеждение, что неопределенность изменения энергии системы $\Delta\,(E' - E_0)$ при измерении связана с длительностью измерения Δt соотношением

$$\Delta\,(E' - E_0)\cdot\Delta t \geqslant \hbar, \tag{1}$$

называемым соотношением Бора или Гейзенберга — Бора [1-4] (E_0, E' — энергия системы до и после акта измерения). Следствием соотношения (1) считаются следующие принципиальные положения:

а) энергия без изменения ее величины может быть измерена лишь с точностью

$$\Delta E > \frac{\hbar}{\Delta t}. \tag{1а}$$

Соответственно, только с такой точностью может быть проверен закон сохранения энергии.

б) Неизбежно изменение скорости свободной частицы при измерении ее импульса такое, что

$$(v' - v_0)\cdot\Delta p\cdot\Delta t \geqslant \hbar \tag{1б}$$

(Δp — ошибка измерения импульса, $(v' - v_0)$ — известное изменение скорости частицы во время акта измерения импульса).

Точное измерение за конечное время только E' или только E_0 предполагается возможным в [1-3] и отрицается в [4].

Однако среди специалистов, интересующихся теорией квантовых измерений, нет единого мнения о фундаментальности соотношения (1). Причина существования различных мнений о соотношении Гейзенберга — Бора заключается в том, что оно не могло быть обосновано так же однозначно, как соотношение неопределенности для координаты и импульса. Поскольку (1) относится к акту измерения, оно не может вытекать из уравнения Шрёдингера и требует для своего обоснования привлечения некоторых дополнительных соображений, связанных с формализмом теории квантовых измерений, развитие которой в настоящее время еще далеко от завершения. В работе [4] соотношение (1) рассматривается как некоторый физический принцип, который может быть подтвержден лишь путем анализа примеров мысленных экспериментов. (Сопоставление различных взглядов на смысл соотношения (1) имеется в [5].) Соотношение (1) следует отличать от другого типа соотношений между энергией и временем, связывающих либо время полураспада почти стационарного состояния с шириной уровня [4], либо время смещения волнового пакета с неопределенностью энергии при свободной эволюции системы [5]. Они не связаны с измерением и имеют строгое обоснование. Обоснование же соотношения (1) в [1-4] покоится на одном и том же примере столкновения двух частиц. В 1961 г. Ааронов и Бом [6] предложили пример, который, по их мнению, опровергал соотношение Гейзенберга — Бора. После категорического возражения Фока [7] авторы [6] привели дополнительные, однако не совсем убедительные аргументы в защиту своей позиции [8]. В результате В. А. Фок пришел к выводу, что положения Ааронова и Бома противоречат основам квантовой механики, а непризнание соотношения (1) равносильно отрицанию всей квантовой механики в целом [9]. Однако в 1968 г. в работе [10] снова было высказано убеждение, что обсуждение соотношения неопределенности энергия — время еще не закончено и правильную его интерпретацию еще предстоит найти. В статье [11] приведен пример мысленного эксперимента, доказывающего, что энергия консервативной системы может быть измерена без изменения ее величины с ошибкой, не ограничиваемой соотношением (1). Там же показано, что ошибка невозмущающего, т. е. без изменения величины, измерения энергии ΔE связана с увеличением неопределенности энергии $\Delta\varepsilon$ квантовой считывающей системы (КСС) соотношениями

$$\begin{aligned} &(\Delta E+\Delta\varepsilon)\cdot\Delta t\geqslant h, \quad &\text{(a)}\\ &\Delta E\cdot\Delta\varepsilon\geqslant\left(\frac{h}{2\Delta t}\right)^2. \quad &\text{(б)}\end{aligned} \tag{2}$$

(КСС названо квантовое звено в схеме косвенного измерения. Численные множители в (2) определены приближенно.)

В данной статье с позиций современной теории квантовых измерений [12] дается критический анализ обоснования соотношения (1) в работах [1-4,7], показаны слабости и ошибки доказательства в [6,8], дано развернутое обоснование изложенных в [11] положений на примере различных схем невозмущающего измерения энергии.

2. КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОБОСНОВАНИЙ СООТНОШЕНИЯ ГЕЙЗЕНБЕРГА — БОРА

Процесс квантового измерения требует, чтобы одно из звеньев измерительной схемы было классическим (точнее, квазиклассическим), т. е. таким, который осуществляет «деквантизацию» сигнала и, следовательно, после которого квантовые неопределенности в других звеньях не влияют на ошибку измерения. Если исследуемая квантовая система взаимодействует непосредственно с классическим звеном, измерение называется прямым. Когда между системой и классическим звеном имеется квантовое звено (квантовая считывающая система — КСС), измерение называется косвенным [13]. Измерение, косвенное по отношению к исследуемой системе, является прямым по отношению к КСС. Процесс взаимодействия системы с КСС, если КСС в это время не взаимодействует с классическим звеном, подчиняется уравнению Шрёдингера и является обратимым. Процесс прямого измерения необратим, и описание его требует привлечения специального математического аппарата [14]. Ни в одной из цитированных выше работ, посвященных обоснованию соотношения Гейзенберга — Бора, не рассматривается последовательно вся схема измерения. Анализируется только процесс взаимодействия с КСС, причем в качестве КСС рассматривается только свободная частица и анализируется изменение ее импульса при столкновении с исследуемой частицей. В итоге рассчитывается изменение импульса (энергии) пробной частицы и по этому изменению предполагается определять импульс (энергию) исследуемой частицы. Результат исследования, хотя и разными путями, по существу, одного и того же примера столкновения пробной частицы с исследуемой частицей, не может быть доказательством фундаментальности соотношения (1). Кроме того, не вполне последовательным является сам подход к проблеме, поскольку преобразование импульса исследуемой частицы в импульс пробной частицы еще не есть измерение импульса.

В квантовой теории измерений известно, что ошибка измерения принципиально зависит от характера взаимодействия прибора с системой и от структуры прибора [12]. Гамильтониан взаимодействия должен быть функцией только того оператора $\hat{A}$, собственные значения которого хотим измерить. Если же он зависит от некоммутирующего с $\hat{A}$ оператора, то точное измерение $\hat{A}$, естественно, будет невозможно. Кроме того, как будет показано ниже, даже при соответствующем подборе гамильтониана взаимодействия, ошибка измерения может быть ограничена в результате неправильного выбора КСС и неоптимального прямого измерения.

В том случае, когда гамильтониан взаимодействия является функцией оператора координаты системы (только такое взаимодействие считалось возможным в [1]), воздействие на прибор будет определяться координатой системы. Следовательно, непосредственно измеряемой величиной будет координата. Энергию (импульс) системы можно вычислять только через значения координаты в различные моменты времени. Импульс системы должен определяться через скорость, определяемую как $v = [x(t+\Delta t) - x(t)]/\Delta t$. В силу некоммутативности гейзенберговских операторов $\hat{x}(t+\Delta t)$ и $\hat{x}(t)$ величина v не может быть определена точно. В случае свободной частицы $[\hat{x}(t+\Delta t), \hat{x}(t)] = i\hbar\cdot\Delta t/m$ и, следовательно, [15]

$$\Delta v \geqslant \sqrt{\frac{\hbar}{m\cdot\Delta t}}. \tag{3}$$

Такой неопределенности скорости соответствует неопределенность энергии свободной частицы

$$\Delta E \geqslant \frac{m(\Delta v)^2}{2} \geqslant \frac{\hbar}{2\Delta t}. \tag{3a}$$

В этом случае соотношение (1) выполняется при любых значениях средней скорости, т. е. вместо (1б) имеем $\Delta v\cdot\Delta p\cdot\Delta t > \hbar$.

Нарушение соотношения (1) может иметь место лишь в таких экспериментах, в которых гамильтониан взаимодействия зависит от энергии системы (или от импульса в случае свободной частицы [1,14]). Результат анализа взаимодействия частиц в [1-3] был заранее предрешен, поскольку там гамильтониан взаимодействия считался функцией координаты частицы.

Несколько с других позиций рассматривалось столкновение частицы-объекта с пробной частицей в [4]. Исходя из того, что при измерении импульса увеличение неопределенности координаты должно соответствовать соотношению неопределенности $\Delta x \cdot \Delta p > \hbar/2$, Н. С. Крылов и В. А. Фок приходят, как и в [1], к соотношению (1б).

Не совсем логичным являются следствия соотношения (1б). Исходя из него, считают, что количество движения (в нерелятивистской области) «может быть измерено сколь угодно быстро, причем измерение будет сопровождаться значительным приращением количества движения, правда, поддающимся контролю» [4]. Аналогичное заключение о возможности точного измерения энергии, однако, считается неправильным, так как $\Delta E' = v' \cdot \Delta p$, а v' возрастает при уменьшении Δp.

С одной стороны, рассмотрен только процесс преобразования импульса частицы-объекта в импульс пробной частицы, а не процесс получения информации об импульсе. Снова возникает вопрос, можно ли измерить импульс теперь уже пробной частицы быстро и точно? Например, в случае, когда пробными частицами являются световые кванты, точность измерения их импульса спектральными приборами обратно пропорциональна времени измерения. С другой стороны, если возможно каким-либо способом точное и быстрое измерение импульса частицы-объекта, то тогда неправильно заключение о невозможности точного и быстрого измерения энергии, поскольку измерительную систему можно дополнить некоторым устройством, которое будет после измерения импульса компенсировать известное изменение скорости объекта за время, меньшее Δt.

3. ДИСКУССИЯ В. А. ФОКА С И. ААРОНОВЫМ И Д. БОМОМ

Ааронов и Бом [6] исходили из следующего. Допустим, что гамильтониан системы, состоящей из двух взаимодействующих частиц, может быть равен

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{y}\hat{p}g(t) + \frac{\hat{p}_y^2}{2M}, \tag{4}$$

где $\hat{p}$, $\hat{x}$ — операторы импульса и координаты исследуемой частицы, $\hat{p}_y$, $\hat{y}$ — операторы импульса и координаты пробной частицы. (Движение рассматривается одномерным.) $g(t)$ не равно нулю только в интервале от t_0 до $t_0 + \Delta t$. Тогда $\hat{p}(t)$ остается постоянным во всем интервале времени, несмотря на включение $(g(t) \neq 0)$ и выключение взаимодействия $(g(t) = 0)$ между частицами. Но оператор скорости частицы, равный в данном случае

$$\dot{\hat{x}} = \frac{\hat{p}}{m} + \hat{y}g(t), \tag{5}$$

меняется при включении и выключении связи. Причем как до, так и после взаимодействия будет $\dot{\hat{x}} = \hat{p}/m$. Следовательно, если можно измерить точно $\hat{p}$ в момент взаимодействия, то можно точно определить энергию, которую имеет частица-объект до и после взаимодействия с пробной частицей.

Импульс пробной частицы во время взаимодействия меняется пропорционально $\hat{p}$:

$$\dot{\hat{p}}_y = -\hat{p} \cdot g(t) \tag{6}$$

и за время Δt изменится на

$$\hat{p}_y - \hat{p}_y^0 = -\hat{p}g \cdot \Delta t. \tag{7}$$

Далее в [6] предполагается возможность точного измерения p_y и неопределенность $\Delta(p_y - p_y^0)$ считают равной только начальной неопределенности Δp_y^0. Тогда из (7) получают $\Delta p \approx \Delta p_y^0/g \cdot \Delta t$. Следовательно, при $g \to \infty$ будет $\Delta p \to 0$.

В. А. Фок не согласился с таким доказательством [7]. Он считал, что в [6] допущена логическая ошибка в результате предположения об определенном значении g в течение короткого времени Δt, т. е. принято за истинное и используется в доказательстве то положение, которое еще требуется доказать. В своем ответе [8] В. А. Фоку И. Ааронов и Д. Бом ссылались на то, что если связь определяется движением некоторого вспомогательного тела большой массы, то координата (z) и скорость последней могут быть определены как угодно точно. Тогда коэффициент g будет явной хорошо определенной функцией координаты z, отличной от нуля в некотором интервале от z_0 до $z_0 + \Delta z$. Слабость этого доказательства в следующем: логично предположить, что связь реально будет зависеть не от z, а от разности координат исследуемой частицы x, пробной частицы y и вспомогательного тела, т. е. $g = g(x, y, z)$. Но тогда нарушается условие неизменности $\hat{p}$, так как $\hat{H}$ будет зависеть от $\hat{x}$.

Тем не менее, предположение В. А. Фока о логической ошибке в [6] не является основанием для отрицания выводов Ааронова и Бома. Соотношение (1), если даже оно применимо к $g(t)$, ограничивает только абсолютную ошибку. Относительная же ошибка может быть сколь угодно малой. Поэтому при $g \to \infty$ неопределенность величины g не будет играть роли.

В. А. Фок, анализируя ошибку измерения величины $E = (1/2)\, m\dot{x}^2$ в примере [6], не опирается на неопределенность $g(t)$ и рассматривает E не до или после взаимодействия, а во время взаимодействия, и показывает, что в это время неопределенность E удовлетворяет соотношению (1). Этот результат связан с тем, что величина $\dot{x}$ при $g(t) \neq 0$ даже при заданном p неопределена на величину $\Delta y \cdot g \geqslant (1/2)\, \hbar g/\Delta p_y$, где Δy — неопределенность $y(t)$ во время взаимодействия. Поскольку ошибка измерения p равна $\Delta p_y/g \cdot \Delta t$, то фактическая неопределенность $\dot{x}$ будет равна

$$\Delta\dot{x} \geqslant \sqrt{\left(\frac{\Delta p_y}{m \cdot g \cdot \Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\hbar g}{2\Delta p_y}\right)^2} \geqslant \sqrt{\frac{\hbar}{m\Delta t}}. \qquad (8)$$

Однако это есть неопределенность $\dot{x}$ в момент взаимодействия. Нас же интересует значение $\dot{x}$ до и после взаимодействия. В этом случае неопределенность $\dot{x}$ во время взаимодействия не играет роли и может быть сколь угодно большой. Тем не менее, после взаимодействия неопределенность $\dot{x}$ будет равна только ошибке измерения величины p/m. Требующее доказательства предположение в [6] о возможности точного измерения импульса p_y за конечное время не является необходимым. Допустим, что изменение импульса пробной частицы определяется через измерение ее координаты и поэтому известно с ошибкой $\Delta p_y = \sqrt{\hbar M/\Delta t}$. Тогда импульс p может быть определен с точностью $\Delta p = (1/g\Delta t)\sqrt{\hbar M/\Delta t}$. В случае $g \to \infty$ будет $\Delta p \to 0$. И. Ааронов и Д. Бом не рассматривают процесс прямого измерения, что, в частности, послужило одним из поводов для критики их позиции со стороны В. А. Фока [9]. Однако для определения ошибки измерения p достаточно учесть, что в результате прямого измерения координаты КСС с точностью Δy происходит увеличение неопределенности импульса КСС на $\Delta p_y \geqslant \hbar/2\Delta y$. Поскольку изменения операторов $\hat{y}(t)$

и $\hat{p}_y(t)$ в случае гамильтониана (4) не влияют на эволюцию оператора $\hat{p}(t)$, постольку взаимодействие КСС с классическим прибором не изменит $\hat{p}(t)$. В процессе измерения произойдет лишь редукция значений импульса системы. Если система до измерения находилась в состоянии с заданным импульсом, то она останется в этом состоянии и после измерения. Если же начальное состояние системы было произвольным, то после точного измерения она перейдет в состояние с заданным импульсом, равным одному из возможных значений импульса в начальном состоянии.

Наиболее принципиальным моментом в анализируемых работах является допущение реализуемости систем с гамильтонианом (4). В дискуссии Фока с Аароновым и Бомом почему-то не было обращено внимание на то, что принятие этого гамильтониана, при любой неопределенности величины $g(t)$, приводит к выводу о возможности измерения импульса без изменения скорости, что противоречит соотношению (1б). Следует подчеркнуть, что результат формального анализа в работах Ааронова и Бома не был неожиданным. Еще в самой первой работе, посвященной обоснованию соотношения Бора [1], Ландау и Пайерлс отметили как очевидное, что если бы в природе были возможны взаимодействия, гамильтониан которых коммутирует с оператором импульса, то можно было бы измерять импульс точно и быстро без изменения скорости. Однако по непонятным причинам Ландау и Пайерлс считали такое взаимодействие невозможным. Таким образом, проведенный Аароновым и Бомом анализ будет иметь смысл только в том случае, когда будет доказана реализуемость гамильтониана(4).

И. Ааронов и Д. Бом считали, что гамильтониан (4) соответствует системе из двух взаимодействующих свободных частиц. Однако это не так — гамильтониан (4) не является положительно определенным, т. е. он не описывает замкнутую систему. В качестве мысленного эксперимента в [6] рассматривается измерение одной из составляющих импульса заряженной частицы с помощью свободно движущегося заряженного массивного плоского конденсатора. Импульс частицы предлагается измерять, наблюдая изменение механической энергии конденсатора. Нет необходимости в подробном описании этого эксперимента, поскольку его несостоятельность достаточно очевидна: энергия взаимодействия заряженной частицы с электростатическим полем является функцией координаты частицы. Следовательно, гамильтониан этой схемы, в принципе, не соответствует соотношению (4). (В [6] он не выписан.) То, что результат сделанного в [6] расчета этого примера не согласуется с соотношением (1), является следствием ошибок в расчете: не учитываются влияние краевых полей конденсатора на движение частицы и смещение конденсатора в процессе взаимодействия. Таким образом, реализуемость гамильтониана (4), а следовательно, и практическая значимость формального анализа в работах [6,8] остались недосказанными. Однако статьи Ааронова и Бома поставили вопрос о критической переоценке общепринятой трактовки соотношения Гейзенберга — Бора, а некоторые высказанные в них идеи помогли на определенном этапе развития теории невозмущающих квантовых измерений [12] по-новому подойти к решению этой проблемы.

4. СХЕМА НЕВОЗМУЩАЮЩЕГО ИЗМЕРЕНИЯ ЭНЕРГИИ

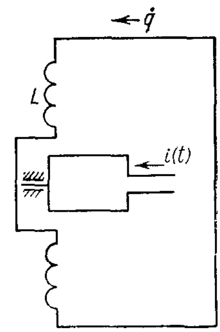
Пример схемы, гамильтониан которой удовлетворяет условию невозмущающего измерения энергии (импульса), изображен на рисунке ([11]). Это схема измерения энергии тока в короткозамкнутой сверхпроводящей катушке L. Рядом с катушкой помещена рамка, способная свободно вращаться вокруг своей оси. Рамка играет роль КСС — ее движение зависит от поля катушки. Ток $i(t)$ задается от некоторого источника с настолько большим внутренним сопротивлением, что можно пренебречь влиянием поля катушки на $i(t)$.

Взяв в качестве обобщенных координат заряд q, протекший через какое-либо сечение катушки и угол поворота рамки φ, найдем лагранжиан схемы

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} L\dot{q}^2 - M(\varphi)\cdot i(t)\cdot\dot{q} + \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 \tag{9}$$

(I — момент инерции рамки, $M(\varphi)$ — коэффициент взаимной индукции). Соответственно, обобщенными импульсами будут

$$p_q \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}} = L\dot{q} - M(\varphi)\cdot i(t), \quad p_\varphi \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}} = I\dot{\varphi}, \tag{10}$$



а оператор Гамильтона равен

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_q^2}{2L} + \hat{p}_q\hat{\varphi}g(t) + \frac{\hat{p}_\varphi^2}{2I} + \frac{Lg^2(t)\hat{\varphi}^2}{2}. \tag{11}$$

Здесь использовано приближение $M(\varphi) = M_0\varphi$, $\varphi \ll \pi$ и обозначено $g(t) \equiv M_0 i(t)/L$, $\hat{p}_q$, $\hat{p}_\varphi$, $\hat{\varphi}$ — операторы импульсов и координаты. Гамильтониан (11) отличается от (4) членом $Lg^2(t)\cdot\hat{\varphi}^2/2$, соответствующим внесению жесткости $Lg^2(t)/2$ в движение рамки, но, тем не менее, удовлетворяет условиям невозмущающего измерения импульса $\hat{p}_q$, так как $\hat{H}$ не зависит от оператора координаты $\hat{q}$, а гамильтониан взаимодействия пропорционален $\hat{p}_q$. Чтобы исключить последний член в (11), следовало бы связать рамку с отрицательной жесткостью — Lg^2. Но в этом нет необходимости.

Используя (11), получим гейзенберговские уравнения

$$\begin{aligned} &\dot{\hat{p}}_q(t) = 0 \quad (а), \qquad \dot{\hat{q}}(t) = \frac{\hat{p}_q(t)}{L} + \hat{\varphi}(t)\cdot g(t) \quad (б), \\ &\dot{\hat{p}}_\varphi(t) = -Lg^2(t)\hat{\varphi}(t) - \hat{p}_q(t)g(t) \quad (в), \qquad \dot{\hat{\varphi}}(t) = \frac{\hat{p}_\varphi(t)}{I} \quad (г). \end{aligned} \tag{12}$$

Следовательно, импульс p_q не меняется при включении и выключении тока в рамке. Ток в катушке $\dot{q}$ во время взаимодействия с КСС меняется и не определен в силу неопределенности величины φ. Однако после выключения связи ($g(t) = 0$) восстанавливается значение $\dot{q}$, существовавшее до взаимодействия с КСС. Неизменность p_q и восстановление значения $\dot{q}$ после взаимодействия отражают известное явление сохранения магнитного потока в сверхпроводящем кольце. Подобная изображенной схема может быть использована для измерения энергии вращающегося диэлектрического заряженного кольца. И в этом случае обобщенный импульс

$$p_q = \left(\frac{m}{\rho^2} + L\right)\dot{q} - M(\varphi)\cdot i(t)$$

($\dot{q} = l\rho\dot{\alpha}$, m — масса, l — радиус кольца, ρ — линейная плотность зарядов, $\dot{\alpha}$ — угловая скорость вращения) будет оставаться постоянным, однако магнитный поток через кольцо уже не будет интегралом движения.

Таким образом, наблюдая изменение φ во время взаимодействия, можно определить p_q, $\dot{q}$ и энергию E катушки до и после взаимодействия с КСС. После такого измерения скорость и энергия сохраняют свои значения, т. е. $\dot{q}' - \dot{q}_0 = 0$ и $E' - E_0 = 0$. Соотношения (1) и (1б) в данном случае нарушаются.

Найдем точность измерения p_q путем измерения какого-либо оператора КСС. Уравнения (12в), (12г) аналогичны уравнениям движения осциллятора с жесткостью $Lg^2(t)$ под действием силы $F = -p_q g(t)$. Если в интервале Δt величина $g(t)$ остается постоянной и равной g, то информацию о значении p_q можно получить, измеряя среднее за период колебаний значение φ, которое равно $\varphi_0 = -p_q/Lg$. Эту величину можно измерять двумя способами: 1) путем непрерывного измерения координаты $\varphi(t)$; 2) путем измерения мгновенной координаты в два момента времени, отличающихся на нечетное число полупериодов колебаний (стробоскопический метод [16,17]). В первом случае предельная точность измерения φ_0 равна [18]:

$$\Delta\varphi_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{I\omega^2\Delta t}} = \sqrt{\frac{\hbar}{Lg^2\Delta t}} \tag{13}$$

($\omega = \sqrt{\frac{Lg^2}{I}}$ — собственная частота осциллятора, $\omega \cdot \Delta t \gg 1$). Следовательно, $\Delta p_q \gg \sqrt{\hbar L/\Delta t}$, $\Delta E \gg \hbar/2\,\Delta t$. На этом пути мы снова приходим к соотношению (1а).

Стробоскопический метод измерения среднего за период значения состоит в следующем: гейзенберговский оператор координаты гармонического осциллятора зависит от времени по закону

$$\hat{\varphi}(t) = \varphi_0 + \hat{\varphi}(0)\cos\omega t + \frac{1}{I\omega}\cdot\hat{\rho}_\varphi(0)\sin\omega t, \tag{14}$$

а

$$[\hat{\varphi}(t), \hat{\varphi}(t+\tau)] = \frac{i\hbar}{I\omega}\sin\omega\tau. \tag{15}$$

Следовательно, возмущение импульса при измерении координаты в момент t не влияет на значение координаты в моменты $t_k = (k\pi/\omega) + t$ (k — целое). Поэтому сумма значений $\varphi(t)$, измеренных в момент t и и $t + (\pi/\omega)$, будет равна $2\varphi_0$. Если значение параметра ω известно точно, то точность измерения φ_0 будет ограничиваться только релятивистскими эффектами, которые влияют на ошибку измерения мгновенной координаты и на период колебаний. В нашем случае определенность ω зависит от определенности g. Допустим, что величина g в течение времени Δt может быть определена лишь с точностью Δg. Тогда неопределенность периода колебаний рамки будет равна $\Delta T = (\pi\,\Delta g/g^2)\sqrt{I/L}$. Ошибка в определении φ_0 за счет ΔT равна

$$\Delta\varphi_0 = \sqrt{(\Delta\varphi_1)^2 + (p_\varphi\cdot\Delta T/I)^2} \geqslant \sqrt{(\Delta\varphi_1)^2 + \left(\frac{\hbar}{2\Delta\varphi_1}\frac{\Delta T}{I}\right)^2} \geqslant \sqrt{\frac{\pi\hbar\Delta g}{\sqrt{LI}\,g^2}}, \tag{16}$$

где $\Delta\varphi_1$ — неопределенность мгновенной координаты после первого ее измерения. Так как $\Delta p_q = Lg\cdot\Delta\varphi_0$, то

$$\Delta p_q \geqslant \sqrt{\frac{L\hbar}{\Delta t}\cdot\frac{\pi^2\Delta g}{g}}, \tag{17}$$

$\Delta t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{I/Lg^2}$ — время измерения импульса p_q.

Поскольку величина $\Delta g/g$ может быть сколь угодно малой, то ошибка измерения импульса p_q может быть много меньше, чем $\sqrt{L\hbar/\Delta t}$. Соответственно, ошибка измерения энергии катушки до и после взаимодействия $\Delta E = \dot{q}\cdot\Delta p_q + (\Delta p_q)^2/2L$ может быть меньше, чем $\hbar/\Delta t$. Кроме того, если до измерения система находилась в состоянии с заданной энергией, то и после измерения она останется в этом же состоянии ($\Delta(E' - E_0) = 0$). В этом смысле данное измерение энергии является невозмущающим.

5. СВЯЗЬ ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЯ С ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ИЗМЕРЕНИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ ЭНЕРГИИ ПРИБОРА

Сравнение результатов при двух методах измерения φ_0 показывает, что условие коммутативности гамильтониана взаимодействия с оператором энергии системы является необходимым и достаточным условием невозмущающего измерения, но оно не достаточно для достижения ошибки невозмущающего измерения $\Delta E < \hbar/\Delta t$. Прямое измерение в КСС должно быть таким, чтобы воздействие на КСС со стороны системы могло быть измерено с заданной точностью за минимальное время. Причем измеряемый оператор КСС должен быть выбран так, чтобы через него можно было однозначно определить импульс (энергию) системы. Если, например, в рассматриваемой схеме измерять не φ_0, а энергию КСС, то невозможно будет определить импульс p_q, так как изменение энергии КСС зависит не только от p_q, но и от случайной начальной фазы колебаний рамки.

Процесс измерения φ_0 путем непрерывного наблюдения за координатой φ отличается от процесса стробоскопического измерения величиной случайного изменения энергии КСС $\Delta\varepsilon$. В случае непрерывного измерения в течение времени $\Delta t \gg \omega^{-1}$ будет $\Delta\varepsilon \geqslant (1/2)\, I\omega^2\,(\Delta\varphi_0)^2 \geqslant \hbar/2\Delta t$. При стробоскопическом измерении ошибка измерения φ_0 равна $\Delta\varphi_0 = \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta\varphi_1)^2 + (\Delta\varphi_2)^2}$ ($\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$ — ошибки измерения мгновенных координат в моменты t и $t + (T/2)$). Неопределенность изменения импульса КСС после первого измерения φ будет равна

$$\Delta p_\varphi \geqslant \frac{\hbar}{2\Delta\varphi_1}. \tag{18}$$

Если $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$, то

$$\Delta\varepsilon \geqslant (\Delta p_\varphi)^2/2I \geqslant \frac{\hbar^2}{16I\,(\Delta\varphi_0)^2}. \tag{19}$$

Учтя, что $\Delta\varphi_0 = \Delta p_q/Lg$, $\Delta E \geqslant (\Delta p_q)^2/2L$, $\Delta t = \pi\sqrt{I/Lg^2}$, из (19) получим

$$\Delta\varepsilon \geqslant \frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{\hbar^2}{(2\Delta t)^2}\cdot\frac{1}{E}. \tag{20}$$

Численный множитель в (20) зависит от соотношения между $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$. Когда $\Delta\varphi_2 \ll \Delta\varphi_1$, вместо $\pi^2/8$ будет $\pi^2/16$. Таким образом, при стробоскопическом измерении φ_0 возмущение энергии КСС обратно пропорционально ошибке измерения энергии ΔE. Этот расчет является одним из обоснований соотношений (2): как при первом, так и при втором способе измерения φ_0 имеют место соотношения $(\Delta E + \Delta\varepsilon) \geqslant \hbar/\Delta t$, $\Delta E\cdot\Delta\varepsilon \geqslant (\hbar/2\Delta t)^2$. (Численные множители в (2) определены приближенно.)

Сделаем аналогичный анализ несколько измененной схемы измерения, когда рамка не свободна, а связана с отрицательной жесткостью — Lg^2. В этом случае гамильтониан схемы будет аналогичен (4):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_q^2}{2L} + \hat{\varphi}\hat{p}_q g(t) + \hat{p}_\varphi^2/2I. \tag{21}$$

Во время взаимодействия с полем катушки рамка будет вести себя как свободная под действием момента силы $\hat{p}_q\cdot g$. Измерив дважды с интервалом

Δt мгновенное значение φ с точностью $(\Delta\varphi)^2 = \hbar\Delta t/2I$, определим импульс p_q с минимально возможной ошибкой [15] $\Delta p_q \geqslant (1/g)\sqrt{4I\hbar/(\Delta t)^3}$, чему соответствует $\Delta E \geqslant 2I\hbar/Lg^2\ (\Delta t)^3$. Увеличивая g, можно найти p_q со сколь угодно высокой точностью при заданном значении Δt.

Измерение φ с точностью $\Delta\varphi = \sqrt{\hbar\Delta t/2I}$ увеличит неопределенность импульса КСС на $\Delta p_\varphi \geqslant \sqrt{\hbar I/2\ \Delta t}$, что соответствует изменению кинетической энергии рамки на $\Delta\varepsilon_k \geqslant \hbar/4\ \Delta t$. Неопределенность потенциальной энергии рамки в поле, создающем отрицательную жесткость $-Lg^2$, будет равна $\Delta\varepsilon_п \geqslant Lg^2\hbar\ \Delta t/4I$. Следовательно, полное изменение неопределенности энергии КСС, как и в рассмотренных выше примерах, связано с ΔE соотношениями (2).

Общее обоснование соотношений (2) для случая измерения импульса свободной частицы при одномерном движении можно сделать следующим образом: измерение импульса с точностью Δp должно сопровождаться увеличением неопределенности координаты на величину $\Delta x \geqslant \hbar/2\Delta p$ (в противном случае можно было бы приготовить состояние с $\Delta x\cdot\Delta p < \hbar/2$). Увеличение Δx является следствием движения с неопределенной скоростью $\Delta\dot{x}\ (t)$ в течение времени измерения импульса Δt. Представив зависимость Δx от $\Delta\dot{x}\ (t)$ в виде $\Delta x = \gamma\cdot\Delta\dot{x}_m\cdot\Delta t$, где $\Delta\dot{x}_m$ — максимальное значение неопределенности $\Delta\dot{x}\ (t)$ в интервале Δt, γ — численный множитель меньше единицы, зависящий от вида функции $\Delta\dot{x}\ (t)$, получим

$$\gamma\cdot\Delta\dot{x}_m\cdot\Delta t \geqslant \frac{\hbar}{2\Delta p} \tag{22}$$

или

$$\frac{m\,(\Delta\dot{x}_m)^2}{2}\cdot\Delta E \geqslant \frac{\hbar^2}{4\gamma^2\,(2\Delta t)^2}. \tag{22a}$$

Но $m\,(\Delta\dot{x}_m)^2/2$ есть неопределенность изменения энергии исследуемой системы в процессе измерения. Поскольку энергия в систему поступает от КСС, то неопределенность энергии КСС $\Delta\varepsilon$ будет не меньше, чем $(1/2)\cdot m\,(\Delta\dot{x}_m)^2$. Следовательно, из (22a) получим

$$\Delta\varepsilon\cdot\Delta E \geqslant \frac{\hbar^2}{4\gamma^2\,(2\,\Delta t)^2}. \tag{23}$$

Если $\Delta\dot{x}\ (t)$ зависит от времени в интервале Δt почти по гармоническому закону, то $\gamma \approx 2/\pi$. Тогда численный множитель в (23) будет в два раза меньше, чем в (20). Это значение множителя соответствует такому режиму стробоскопического измерения φ_0, при котором $\Delta\varphi_2 \ll \Delta\varphi_1$.

Под $\Delta\varepsilon$ выше подразумевалась неопределенность энергии КСС в процессе измерения, в частности, до второго измерения мгновенного значения φ при стробоскопическом методе. Какова будет неопределенность энергии КСС после измерения? Если φ_0 определяется путем прямого измерения φ, то каждое измерение φ будет увеличивать неопределенность энергии КСС. Тогда после определения p_q она будет больше $\Delta\varepsilon$. Можно, изменив схему измерения, получать информацию о φ_0 без регистрации мгновенных значений φ. Для этого следует ввести еще одно квантовое звено, которое взаимодействует с рамкой импульсно дважды, с интервалом в $T/2$. Например, если короткий электромагнитный импульс после первого отражения от рамки попадает на неподвижное зеркало, а затем снова на рамку, то в результате он будет нести информацию не о мгновенном значении координаты, а о сумме $\varphi\,(t) + \varphi\,(t + \Delta t)$. Когда $\Delta t = T/2$, то будет

$\varphi(t)+\varphi\left(t+\frac{1}{2}T\right)=2\varphi_0$. Поскольку такое измерение не дает информации о состоянии осциллятора, то в результате оно не будет и возмущать его. В данном примере возмущение механического импульса рамки при первом отражении будет компенсироваться при втором отражении, так как через $T/2$ импульс КСС будет иметь обратный знак. (Степень компенсации тем выше, чем меньше отношение линейной скорости рамки v_φ к скорости света c_0.) Чтобы получить $\Delta t = T/2$, нужно расположить зеркало на расстоянии $l = c_0T/4$ от положения равновесия рамки. Но в нашем случае координата равновесия x_0 является искомой величиной. Однако если $x_0 \ll l$, то отсчитывая l от точки, соответствующей $\varphi = 0$, получим с точностью до членов порядка v_φ/c_0 информацию о величине φ_0.

После такого измерения неопределенность энергии рамки может быть меньше $\Delta\varepsilon$, однако неопределенность энергии электромагнитного импульса будет больше $\Delta\varepsilon$. Поэтому в общем случае под $\Delta\varepsilon$ в соотношениях (2) можно понимать изменение неопределенности энергии всей измерительной цепи до классического звена.

6. НЕВОЗМУЩАЮЩЕЕ ИЗМЕРЕНИЕ ЭНЕРГИИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Под изменением энергии осциллятора подразумевается измерение оператора $\hat{E}=\frac{\hat{p}^2}{m}+\frac{k\hat{x}^2}{2}$. Очевидно, что нельзя точно измерить $\hat{E}$, измеряя отдельно $\hat{x}$ и $\hat{p}$, так как измерение одной из этих величин вызывает увеличение неопределенности другой. Для точного измерения $\hat{E}$ необходимо, чтобы гамильтониан взаимодействия осциллятора с КСС коммутировал с $\hat{E}$, т. е. в простейшем случае должно быть

$$\hat{H}_I=\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{k\hat{x}^2}{2}\right)f(\hat{y}) \tag{24}$$

(здесь $\hat{y}$ — оператор координаты КСС).

Следовательно, гамильтониан осциллятора, связанного с КСС, будет иметь следующий вид:

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}(1+f(\hat{y}))+\frac{kx^2}{2}(1+f(\hat{y}))+\hat{H}_k(\hat{y},\hat{p}_y) \tag{25}$$

($\hat{H}_k$ — гамильтониан КСС). Таким образом, эквивалентная масса и жесткость осциллятора во время измерения будут операторами, зависящими от оператора координаты КСС.

Рассмотрим, например, измерение энергии электромагнитного LC-контура[16,18]. Емкость контура может зависеть от расстояния между пластинами конденсатора или от положения диэлектрического сердечника, а индуктивность может зависеть от расстояния между витками или от положения магнитного сердечника. Связав жестко между собой подвижные части катушки и конденсатора, можно получить взаимодействие нужного вида. Пусть $L = L(y)$, $C = C(y)$, причем КСС представляет собой некоторую массу M, связанную с жесткостью k_0. Тогда лагранжиан схемы будет равен

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}L(y)\dot{q}^2-\frac{1}{2}q^2/C(y)+\frac{1}{2}M\dot{y}^2-\frac{1}{2}k_0y^2. \tag{26}$$

Соответственно,

$$\hat{H}=\frac{\frac{1}{2}\hat{p}^2}{L(\hat{y})}+\frac{\frac{1}{2}\hat{q}^2}{C(\hat{y})}+\frac{\frac{1}{2}\hat{p}_y^2}{M}+\frac{1}{2}k_0\hat{y}^2. \tag{27}$$

Можно подобрать параметры взаимодействия таким образом, чтобы было

$$\frac{1}{L(y)}=\frac{1}{L_0}(1+f(y)),\quad \frac{1}{C(y)}=\frac{1}{C_0}(1+f(y)),$$

где L_0, C_0 — значения параметров контура до взаимодействия с КСС.

В этом случае гамильтониан (27) будет удовлетворять условию (25):

$$\hat{H}=\left(\frac{\hat{p}^2}{2L_0}+\frac{\hat{q}^2}{2C_0}\right)[1+f(\hat{y})]+\frac{\hat{p}_y^2}{2M}+\frac{k_0\hat{y}^2}{2}. \tag{28}$$

Оператор $\hat{E}_0=(\hat{p}^2/2L_0)+(\hat{q}^2/2C_0)$, есть оператор энергии контура при фиксированных значениях L и C, равных их значениям до взаимодействия с КСС. Выразим $\hat{E}_0$ через оператор числа квантов $\hat{N}$: $\hat{E}_0=\left(\hat{N}+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$ $(\omega_0=(L_0C_0)^{-1/2})$. Тогда из (28) получим

$$\hat{H}=\left(\hat{N}+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0(1+f(\hat{y}))+\frac{\hat{p}_y^2}{2M}+\frac{k_0\hat{y}^2}{2}. \tag{29}$$

Поскольку $[\hat{N},\hat{H}]=0$, то $\frac{d\hat{N}}{dt}=0$, т. е. число квантов энергии резонатора не меняется в процессе измерения. Однако частота колебаний зависит от оператора координаты КСС и поэтому сама является оператором:

$$\hat{\omega}_e=\omega_0(1+f(\hat{y})). \tag{30}$$

Таким образом, не меняющейся в процессе измерения наблюдаемой является не текущая энергия резонатора, а только число квантов (и E_0). Энергия, в принципе, не может оставаться постоянной в процессе измерения, поскольку в процессе измерения энергии должна увеличиваться неопределенность фазы. Изменение неопределенности фазы в случае гамильтониана (25) может быть следствием только неопределенности частоты. Следовательно, в процессе измерения не могут быть одновременно постоянными число квантов и частота. Но после измерения N может быть восстановлено начальное значение частоты. Для этого достаточно обратить в единицу восприимчивость сердечников или зафиксировать их положение в исходных состояниях. Измерив N, мы можем определить энергию, которую имел резонатор до начала измерения, а восстановив исходные значения параметров L и C, определим значение энергии E после измерения. Поскольку значения энергии до и после измерения будут одинаковыми, т. е. $E'-E_0=0$, то в этом смысле можно говорить о невозмущающем измерении энергии.

Найдем связь ошибки определения N с ошибкой измерения координаты КСС. Рассмотрим наиболее простой случай, когда форма сердечников подобрана такой, что $f(\hat{y})=-\beta\hat{y}$. Тогда из (29) получим

$$\begin{gathered}\dot{\hat{p}}_y=-k_0\hat{y}+\beta\hat{E}_0,\\ \dot{\hat{y}}=\frac{\hat{p}_y}{M}.\end{gathered} \tag{31}$$

(Подобная аппроксимация может быть справедлива только при $1-\beta y>$ >0, так как в противном случае L и C должны менять знак.) Движение КСС подобно движению гармонического осциллятора под действием постоянной силы βE_0. Поэтому будет $\Delta E_0=k_0\cdot\Delta y_0/\beta$, где Δy_0 — ошибка измерения координаты положения равновесия. При стробоскопическом измерении значение мгновенной координаты спустя половину периода колебаний КСС после первого измерения равно с обратным знаком значению координаты при первом измерении. Следовательно, необходимым условием выполнения неравенства $1 - \beta y > 0$ будет $\beta \Delta y_1 < 1$, где Δy_1 — ошибка первого измерения мгновенной координаты. Хотя в процессе движения КСС ширина ее волнового пакета достигает значения $\Delta y_m = \sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\hbar/2\, \Delta y_1 M\omega)^2}$ и может быть много больше, чем Δy_1, условие $\beta \cdot \Delta y_1 < 1$ является достаточным. Дело в том, что при первом измерении КСС может быть сообщен в среднем отрицательный импульс такой величины, что среднее квантовомеханическое значение $\langle y \rangle$ между измерениями будет иметь амплитуду больше, чем Δy_m. Учтя, что $\Delta y_0 \geqslant \Delta y_1/2$, а увеличение неопределенности энергии КСС $\Delta\varepsilon \geqslant (1/2M)\ (\hbar/2\ \Delta y_1)^2$, получим

$$\Delta E_0 \cdot \Delta\varepsilon \geqslant \frac{k_0 \Delta y_1}{2\beta} \cdot \frac{1}{2M} \left(\frac{\hbar}{2\Delta y_1}\right)^2 = \frac{\hbar^2\omega^2}{16\beta\Delta y_1} > \frac{\hbar^2\omega^2}{16} = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\hbar}{2\Delta t}\right)^2. \tag{32}$$

Таким образом, и в этом случае справедливы соотношения (2) и может быть $\Delta E_0 \ll h/\Delta t$.

Найдем соотношение между ошибкой измерения N и неопределенностью изменения фазы в процессе измерения. Неопределенность частоты колебаний в резонаторе во время измерения определяется неопределенностью координаты y. Неопределенность изменения фазы равна

$$\Delta\psi = \int_0^{\Delta t} \Delta\omega_e(t)\, dt = \gamma\, (\Delta\omega_e)_m \cdot \Delta t. \tag{33}$$

Так как

$$(\Delta\omega_e)_m = \omega_0 \beta \Delta y_m > \omega_0 \beta \frac{\hbar}{2\Delta y_1 M\omega},$$

то

$$\frac{\Delta E_0}{\hbar\omega_0} \cdot \Delta\psi \geqslant \frac{k_0 \gamma \cdot \Delta t}{4M\omega} = \frac{\gamma\pi}{4}. \tag{34}$$

При стробоскопическом измерении в случае $\Delta y_1 \ll \Delta y_m$, будет $\gamma \approx 2/\pi$. Следовательно, ошибка невозмущающего измерения числа квантов в резонаторе $\Delta N \equiv \Delta E_0/\hbar\omega_0$ связана с неопределенностью изменения фазы колебаний во время измерения соотношением

$$\Delta N \cdot \Delta\psi > \frac{1}{2}. \tag{35}$$

Соотношение (35) лишь по форме совпадает с традиционным (и не вполне корректным соотношением неопределенности число — фаза [10]). В последнем под $\Delta\psi$ понимается неопределенность фазы осциллятора, и значения ее ограничиваются интервалом $0 \div 2\pi$. Совершенно не так, как здесь, определяется и сам оператор фазы, который оказывается неэрмитовым [10]. В соотношении (35) $\Delta\psi$ есть неопределенность изменения фазы в процессе измерения энергии и в соответствии с (32) может иметь любое значение в интервале от 0 до ∞. Сам оператор фазы выражается через эрмитов оператор частоты. При обычном же описании состояния осциллятора частота является числом.

Соотношение (35), тем не менее, является необходимым следствием традиционного соотношения неопределенности число — фаза. Если бы не соблюдалось (35), то можно было бы приготовить состояние, в котором произведение неопределенности фазы и числа было бы меньше 1/2. Допустим, что каким-либо способом приготовлено состояние осциллятора с некоторой малой неопределенностью фазы $\Delta\psi_0$ и с $\Delta N_0 > 1/2\ \Delta\psi_0$. Произведем затем измерение числа квантов с точностью $\Delta N \ll \Delta N_0$. Если в процессе измерения не произойдет увеличение неопределенности фазы на величину $\Delta\psi \geqslant 1/2\ \Delta N$, то возникшее после измерения N состояние будет иметь $\Delta N \cdot \Delta\psi < 1/2$.

Все сделанные в данной статье расчеты, как уже говорилось, справедливы в нерелятивистском приближении, т. е. когда скорости механического движения в любых звеньях измерительной цепи много меньше скорости света c_0 Следовательно, минимальное значение Δy_1, например, ограничивается условием $\hbar/2\ \Delta y_1 M \ll c_0$. Соответственно,

$$\Delta E_0 \geqslant \frac{k_0 \Delta y_1}{2\beta} \gg \frac{\pi^2}{4\beta c_0 \Delta t} \cdot \frac{\hbar}{\Delta t}. \tag{36}$$

7. ВЫВОДЫ

Возможность измерения энергии за конечное время без изменения ее начального значения (т. е. при условии $E' = E_0$), вопреки распространенному мнению, не противоречит основам квантовой механики. Соотношение $\Delta (E' - E_0) \cdot \Delta t > \hbar$ справедливо только в том случае, когда энергия взаимодействия исследуемой квантовой системы с прибором является функцией координат системы.

Условием невозмущающего измерения энергии является зависимость гамильтониана взаимодействия системы с прибором $\hat{H}_{\mathrm{I}}$ от оператора энергии системы $\hat{E}$ и коммутативность операторов $\hat{H}_{\mathrm{I}}$ и $\hat{E}$. Возможно такое невозмущенное измерение, при котором ошибка измерения энергии $\Delta E \ll \ll \hbar/\Delta t$.

Измерение энергии исследуемой системы сопровождается увеличением неопределенности энергии прибора $\Delta\varepsilon$. Ошибка измерения энергии системы ΔE и возмущение энергии прибора связаны между собой соотношениями:

$$\Delta E + \Delta\varepsilon \geqslant \frac{\hbar}{\Delta t}, \quad \Delta E \cdot \Delta\varepsilon \geqslant \left(\frac{\hbar}{2\Delta t}\right)^2.$$

Общность этих соотношений, как найденных на частных примерах, не является абсолютно доказанной, однако, автор не нашел примеров, противоречащих им.

Полученные соотношения (2) не отрицают фундаментального характера соотношения типа $\Delta H \cdot \Delta t > \hbar$, являющегося частным случаем более общего соотношения, найденного Л. И. Мандельштамом и И. Е. Таммом [5], если под ΔH понимается неопределенность энергии свободной частицы, а под Δt — время смещения ее волнового пакета на расстояние, равное его ширине.

Автор выражает искреннюю благодарность В. Б. Брагинскому и Ф. Я. Халили, беседы с которыми во многом способствовали написанию данной статьи.

Московский государственный университет им М В Ломоносова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Landau L, Peierls R — Zs. Phys., 1931, Bd. 69, S. 56; перевод трудов Ландау Л Д Собрание трудов. Т. 1 — М.: Наука
2. Ландау Л Д, Лифшиц Е. М Квантовая механика — М.: Физматгиз, 1963
3. Блохинцев Д И Основы квантовой механики.— М: Высшая школа, 1963.
4. Крылов Н С, Фок В А — ЖЭТФ, 1947, т. 17, с 93.
5. а) Мандельштам Л И Полное собрание трудов Т. 3 — М; Л.: Изд-во АН СССР, 1950 (об энергии в волновой механике)
   б) Мандельштам Л И., Тамм И. Е.— Изв. АН СССР Сер физ, 1945, т. 9, № 1/2
6. Aharonov V, Bohm D — Phys. Rev., 1961, v. 122, No. 5.

7. Фок В. А.— ЖЭТФ, 1962, т. 42, вып. 4.
8. Aharonov Y., Bohm D.— Phys. Rev. Ser. B, 1964, v. 134, No. 6.
9. Фок В. А.— УФН, 1965, т. 86, с. 363.
10. Carruthers P., Nieto M.— Rev. Mod. Phys., 1968, v. 40, p. 411; перевод в кн. *Новости фундаментальной физики. Вып. 1.*—М: Мир, 1972.
11. Воронцов Ю. И.— ДАН СССР, 1980, т. 251, №. 5.
12. Braginskiy V., Vorontsov Ju., Thorn K.— Science, 1980, v. 209, p. 547.
13. Мандельштам Л. И. *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике.*— М.: Наука, 1972.
14. фон Нейман Дж. Математические основы квантовой механики.— М.: Наука, 1964.
15. Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И.— УФН, 1974, т. 114, с. 41.
16. Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, вып. 4.
17. Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я.— Письма ЖЭТФ, 1978, т. 27, вып. 5.
18. Халили Ф. Я. Автореферат кандидатской диссертации.— МГУ, Москва: МГУ, Физ. фак-т, 1979.