

Варыяцыйнае злічэнне і матэматычная тэорыя аптымальнага кіравання

УДК 519.852

Л. А. Пилипчук, А. С. Пилипчук

**ЗАДАЧИ ОБРАТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ:
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НИЖНИХ (ВЕРХНИХ)
ГРАНИЦ И ПАРАМЕТРОВ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ**

В первой части работы приведена постановка задачи и описание ее параметров. Вторая часть посвящена моделированию ограничений (нижних и верхних границ) в соответствии с выбранной нормой. В результате решения обратной задачи для изменения параметров нижних и верхних границ в соответствии с выбранной нормой частично допустимое решение становится допустимым решением. В третьей части работы рассмотрен численный пример моделирования параметров нижних и верхних границ. В четвертой части работы рассматривается математическая модель задачи обратной оптимизации для моделирования параметров целевой функции. В результате решения обратной задачи оптимизации получены новые параметры целевой функции. Для новых параметров целевой функции допустимое решение прямой задачи становится ее оптимальным решением. В заключительной части работы рассмотрен численный пример моделирования параметров целевой функции в соответствии с выбранной нормой. Полученные результаты могут быть применены для решения линейных задач оптимизации потоков в сетях, когда неизвестны параметры нижних и верхних границ и параметры целевой функции.

Ключевые слова: линейная задача математического программирования, обратная оптимизация, моделирование параметров, нижняя и верхняя границы, целевая функция, допустимое решение, оптимальное решение.

1. Математическая модель прямой задачи. Рассмотрим математическую модель линейной задачи потокового программирования с вложенной сетевой структурой ограничений и преобразованием дуговых потоков (1)–(5):

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I^*} c_i x_i \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{j \in I^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I^-(U)} \mu_{ji} x_{ji} = \begin{cases} x_i, i \in I^*, \\ a_i, i \in I \setminus I^*, \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{(i,j) \in U} \lambda_j^p x_{ij} + \sum_{i \in I^*} \lambda_i^p x_i = \alpha_p, \quad p = \overline{1, l}, \quad (3)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad (i, j) \in U, \quad (4)$$

$$b_i \leq x_i \leq b_i^*, \quad i \in I^*, \quad (5)$$

где $c_{ij}, c_i, \mu_{ij}, a_i, \lambda_j^p, \lambda_i^p, \alpha_p, d_{ij}, b_i, b_i^*$ – известные параметры, I – множество узлов, U – множество дуг ориентированного связного графа $G = (I, U)$, $|U| \gg |I|$, где U определено на множестве $I \times I$ ($|I| < \infty, |U| < \infty$); x_{ij} – величина дугового потока дуги $(i, j) \in U$; μ_{ij} – коэффициент преобразования дугового потока x_{ij} дуги (i, j) : дуговой поток дуги $(i, j) \in U$ величины x_{ij} исходит из узла i и входит в узел j в преобразованном виде $\mu_{ij} x_{ij}$, причем преобразование дугового потока x_{ij} осуществляется непосредственно перед

Пилипчук Людмила Андреевна, канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. компьютерных технологий и систем БГУ (Беларусь).

Адрес для корреспонденции: пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь; e-mail: pilipchuk@bsu.by

Пилипчук Андрей Станиславович, соискатель каф. методов оптимального управления БГУ (Беларусь); науч. рук. – А. И. Калинин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. методов оптимального управления БГУ (Беларусь).

Адрес для корреспонденции: пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь; e-mail: pilipchuk@bsu.by

узлом j ; $x = (x_{ij}, (i, j) \in U)$ – вектор дуговых потоков графа $G = (I, U)$, $\mu = (\mu_{ij}, (i, j) \in U)$ – вектор коэффициентов преобразования дуговых потоков; $I_i^+(U) = \{j \in I : (i, j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j \in I : (j, i) \in U\}$; I^* – множество узлов с переменной интенсивностью $x_i, i \in I^*$.

Обозначим через Z множество допустимых решений $x = (x_{ij}, (i, j) \in U; x_i, i \in I^*)$ задачи (1)–(5), $x \in Z$. Это означает, что для компонент вектора $x = (x_{ij}, (i, j) \in U; x_i, i \in I^*)$, $x \in Z$, выполняются ограничения (2)–(5). Введем понятие частично допустимого решения. Пусть $x^0 \notin Z$ – некоторое известное частично допустимое решение задачи (1)–(5). Это означает, что для компонент вектора $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in U; x_i^0, i \in I^*)$, $x^0 \notin Z$, выполняется некоторая часть ограничений (2)–(5).

2. Математическая модель обратной задачи: моделирование параметров ограничений (нижних и верхних границ). Для построения оптимальных решений экстремальных линейных сетевых задач при известных значениях параметров в [1–3] разработаны конструктивные методы, основанные на применении общих принципов оптимизации для сетевой структуры ограничений. Теория декомпозиции [4; 5] позволяет получить независимые ограничения в сетевой форме для задач, содержащих ограничения общего вида. Однако, когда значения параметров экстремальных задач неизвестны, либо известны частично, но приведены некоторые оценки этих параметров, то могут быть применены принципы обратной оптимизации для моделирования значений как можно меньшего числа параметров ограничений экстремальной задачи так, что частично допустимое решение становится допустимым решением. Для задачи (1)–(5) сформулируем обратную задачу оптимизации для моделирования параметров ограничений. Необходимо смоделировать параметры ограничений таким образом, чтобы частично допустимое решение $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in U; x_i^0, i \in I^*)$ стало допустимым решением скорректированной прямой задачи с новыми значениями параметров: $\tilde{a}_i = a_i + \kappa_i - \psi_i, i \in I \setminus I^*$, причем $\kappa_i \geq 0, \psi_i \geq 0$, где $\kappa_i \geq 0$ и $\psi_i \geq 0$ соответственно увеличение и уменьшение параметра a_i ; $\tilde{\alpha}_p = \alpha_p + \varphi_p - \delta_p, \varphi_p \geq 0, \delta_p \geq 0, p = \overline{1, l}$; $\tilde{d}_{ij} = d_{ij} + m_{ij} - n_{ij}, m_{ij} \geq 0, n_{ij} \geq 0, (i, j) \in U$; $\tilde{b}_{s_i} = b_{s_i} + k_i - s_i, k_i \geq 0, s_i \geq 0$ и $\tilde{b}_i^* = b_i^* + u_i - h_i, u_i \geq 0, h_i \geq 0$, где $i \in I^*$. Заметим, что значения увеличения и уменьшения каждого параметра не могут быть одновременно положительными. Коэффициенты матрицы ограничений $\mu_{ij}, \lambda_{ij}^p, \lambda_i^p$ задачи (1)–(5) не изменяются. Причем общая корректировка параметров является минимальной в соответствии с нормой l_p , которая определяется, например, для параметров \tilde{d}_{ij}, d_{ij} следующим образом:

$$l_p = \|\tilde{d} - d\|_p = \sum_{(i,j) \in U} |\tilde{d}_{ij} - d_{ij}|^p.$$

Применим принципы обратной оптимизации для изменения значений параметров $a_i, \alpha_p, d_{ij}, b_{s_i}, b_i^*$ так, чтобы частично допустимое решение $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in U; x_i^0, i \in I^*)$ стало допустимым решением скорректированной прямой задачи с новыми значениями параметров $\tilde{a}_i, \tilde{\alpha}_p, \tilde{d}_{ij}, \tilde{b}_{s_i}, \tilde{b}_i^*$. Математическая модель обратной задачи для моделирования параметров нижних и верхних границ имеет вид (6)–(7):

$$\sum_{i \in I \setminus I^*} [(\kappa_i + \psi_i)] + \sum_{p=1}^l [(\varphi_p + \delta_p)] + \sum_{(i,j) \in U} [(m_{ij} + n_{ij})] + \sum_{i \in I^*} [(k_i + s_i) + (u_i + h_i)] \rightarrow \min, \quad (6)$$

$$\begin{cases} \sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}^0 - \sum_{j \in I_i^-(U)} \mu_{ji} x_{ji}^0 = \begin{cases} x_i^0, i \in I^*, \\ a_i + \kappa_i - \psi_i, \kappa_i \geq 0, \psi_i \geq 0, i \in I \setminus I^*; \end{cases} \\ \sum_{(i,j) \in U} \lambda_{ij}^p x_{ij}^0 + \sum_{i \in I^*} \lambda_i^p x_i^0 = \alpha_p + \varphi_p - \delta_p, \varphi_p \geq 0, \delta_p \geq 0, p = \overline{1, l}; \end{cases} \quad (7)$$

$$0 \leq x_{ij}^0 \leq d_{ij} + m_{ij} - n_{ij}, m_{ij} \geq 0, n_{ij} \geq 0, (i, j) \in U;$$

$$b_{s_i} + k_i - s_i \leq x_i^0 \leq b_i^* + u_i - h_i, k_i \geq 0, s_i \geq 0, u_i \geq 0, h_i \geq 0, i \in I^*,$$

где новые параметры нижних и верхних границ вычисляются согласно (8):

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_i &= a_i + \kappa_i - \psi_i, \quad \kappa_{ij} \geq 0, \quad \psi_i \geq 0, \quad i \in I \setminus I^*; \\
 \tilde{\alpha}_p &= \alpha_p + \varphi_p - \delta_p, \quad \varphi_p \geq 0, \quad \delta_p \geq 0, \quad p = \overline{1, l}; \\
 \tilde{d}_{ij} &= d_{ij} + m_{ij} - n_{ij}, \quad m_{ij} \geq 0, \quad n_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in U; \\
 \tilde{b}_i &= b_i + k_i - s_i, \quad k_i \geq 0, \quad s_i \geq 0, \quad i \in I^*; \quad \tilde{b}_i^* = b_i^* + u_i - h_i, \quad u_i \geq 0, \quad h_i \geq 0, \quad i \in I^*.
 \end{aligned} \tag{8}$$

В результате решения обратной задачи (6)–(7) получены значения параметров (8), которые отличаются от исходных значений параметров наименьшим образом и для которых вектор $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in U; x_i^0, i \in I^*)$ – допустимое решение задачи (1)–(5), $x^0 \in Z$.

3. Численный пример моделирования параметров нижних и верхних границ. Для связного ориентированного графа $S = (I, U)$, $|I| = 8$, $|U| = 12$, $I^* = \{1, 4, 5, 7, 8\}$ (рисунок 1) рассмотрим математическую модель экстремальной линейной задачи потокового программирования с вложенной сетевой структурой ограничений (9)–(14):

$$\begin{aligned}
 x_{12} + 6x_{18} + 7x_{31} + 7x_{28} + 3x_{37} + 8x_{43} + 8x_{46} + 9x_{74} + 4x_{65} + 4x_{67} + 9x_{85} + 8x_{78} + \\
 + x_1 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_7 + 4x_8 \rightarrow \min,
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 x_{12} + x_{18} - \frac{1}{2}x_{31} = x_1, \quad x_{28} - \frac{1}{2}x_{12} = -\frac{1}{4}, \quad x_{31} + x_{37} - \frac{1}{7}x_{43} = \frac{23}{3}, \\
 x_{43} + x_{46} - \frac{2}{5}x_{74} = x_4, \quad -\frac{3}{5}x_{65} - \frac{1}{4}x_{85} = x_5, \quad x_{65} + x_{67} - x_{46} = \frac{19}{4},
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$x_{74} + x_{78} - \frac{2}{3}x_{37} - \frac{3}{4}x_{67} = x_7, \quad x_{85} - \frac{1}{3}x_{18} - \frac{1}{5}x_{28} - \frac{4}{5}x_{78} = x_8;$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}x_{12} + \frac{1}{7}x_{18} + \frac{5}{8}x_{31} + 5x_{28} + x_{37} + x_{43} + 4x_{46} + \frac{2}{5}x_{74} + x_{65} + 4x_{67} + \frac{1}{4}x_{85} + \frac{1}{2}x_{78} + \\
 + 7x_1 + 12x_4 + 19x_5 - 2x_7 + 13x_8 = \frac{109889}{1800},
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 2x_{12} + \frac{1}{4}x_{18} + x_{31} + \frac{1}{3}x_{37} + \frac{1}{7}x_{43} + 2x_{46} + x_{74} + \frac{2}{5}x_{65} + 8x_{67} + \frac{1}{2}x_{85} + 2x_{78} + \\
 + \frac{1}{7}x_1 + \frac{1}{6}x_4 + \frac{1}{4}x_5 - 3x_7 - 4x_8 = \frac{52151}{3600};
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 0 \leq x_{12} \leq 4, \quad 0 \leq x_{18} \leq 9, \quad 0 \leq x_{31} \leq 7, \quad 0 \leq x_{28} \leq 2, \quad 0 \leq x_{37} \leq 5, \quad 0 \leq x_{43} \leq 8, \\
 0 \leq x_{46} \leq 3, \quad 0 \leq x_{74} \leq 5, \quad 0 \leq x_{65} \leq 8, \quad 0 \leq x_{67} \leq 4, \quad 0 \leq x_{78} \leq 3, \quad 0 \leq x_{85} \leq 12;
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$8 \leq x_1 \leq 11, \quad 12 \leq x_4 \leq 19, \quad -8 \leq x_5 \leq 8, \quad -5 \leq x_7 \leq 5, \quad -3 \leq x_8 \leq 5. \tag{14}$$

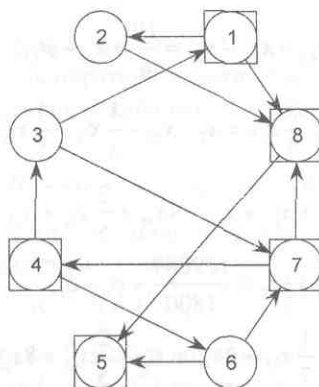


Рисунок 1 – Связный ориентированный граф $S = (I, U)$, $|I| = 8$, $|U| = 12$, $I^* = \{1, 4, 5, 7, 8\}$

Пусть значения некоторого заданного частично допустимого решения $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in U; x_i^0, i \in I^*)$ экстремальной задачи (9)–(14) определены согласно (15):

$$\begin{aligned} x_{12}^0 = 2, x_{18}^0 = 7, x_{31}^0 = 8, x_{28}^0 = \frac{1}{5}, x_{37}^0 = \frac{2}{3}, x_{43}^0 = 7, x_{46}^0 = 1, x_{74}^0 = 5, x_{65}^0 = 5, x_{67}^0 = \frac{3}{4}, \\ x_{85}^0 = 4, x_{78}^0 = 0, x_1^0 = 7, x_4^0 = 6, x_5^0 = -4, x_7^0 = \frac{575}{144}, x_8^0 = \frac{122}{75}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для частично допустимого решения (15) не выполняются следующие ограничения: основное ограничение $x_{28} - \frac{1}{2}x_{12} = -\frac{1}{4}$; дополнительное ограничение (11); прямое ограничение

$0 \leq x_{31} \leq 7$ (нарушена верхняя граница, $x_{31}^0 = 8$); прямое ограничение $8 \leq x_1 \leq 11$ (нарушена нижняя граница, $x_1 = 7$); прямое ограничение $12 \leq x_4 \leq 19$ (нарушена нижняя граница, $x_4 = 6$).

Выполним моделирование значений как можно меньшего числа параметров (8) так, чтобы частично допустимое решение x^0 рассматриваемой экстремальной задачи (9)–(14) стало ее допустимым решением. Итак, необходимо смоделировать параметры ограничений (нижних и верхних границ) таким образом, чтобы частично допустимое решение (15) стало допустимым решением скорректированной прямой задачи с новыми значениями параметров: $\tilde{a}_i = a_i + \kappa_i - \psi_i, i \in I \setminus I^* = \{2, 3, 6\}$, где $\kappa_i \geq 0$ и $\psi_i \geq 0$ – соответственно увеличение и уменьшение параметра a_i ; $\tilde{\alpha}_p = \alpha_p + \varphi_p - \delta_p, \varphi_p \geq 0, \delta_p \geq 0, p = 1, 2$; $\tilde{d}_{ij} = d_{ij} + m_{ij} - n_{ij}, m_{ij} \geq 0, n_{ij} \geq 0, (i, j) \in U = \{(1, 2), (1, 8), (2, 8), (3, 1), (3, 7), (4, 3), (4, 6), (6, 5), (7, 4), (6, 7), (7, 8), (8, 5)\}$; $\tilde{b}_i = b_i + k_i - s_i, k_i \geq 0, s_i \geq 0$ и $\tilde{b}_i^* = b_i^* + u_i - h_i, u_i \geq 0, h_i \geq 0$, где $i \in I^* = \{1, 4, 5, 7, 8\}$. Значения увеличения и уменьшения каждого параметра не могут быть одновременно положительными.

Для задачи (9)–(14) построим математическую модель обратной задачи оптимизации для моделирования параметров верхних и нижних границ. Целевая функция обратной задачи оптимизации для задачи (9)–(14) в соответствии с l_1 нормой для моделирования параметров верхних и нижних границ (8) имеет вид (16):

$$\begin{aligned} \kappa_2 + \psi_2 + \kappa_3 + \psi_3 + \kappa_6 + \psi_6 + \varphi_1 + \delta_1 + \varphi_2 + \delta_2 + m_{12} + n_{12} + m_{18} + n_{18} + m_{31} + n_{31} + m_{28} + n_{28} + \\ + m_{37} + n_{37} + m_{43} + n_{43} + m_{46} + n_{46} + m_{74} + n_{74} + m_{65} + n_{65} + m_{67} + n_{67} + m_{78} + n_{78} + m_{85} + n_{85} + \\ + k_1 + s_1 + k_4 + s_4 + k_5 + s_5 + k_7 + s_7 + k_8 + s_8 + u_1 + h_1 + u_4 + h_4 + u_5 + h_5 + u_7 + h_7 + u_8 + h_8 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (16)$$

Ограничения обратной задачи оптимизации для моделирования параметров $\tilde{a}_i, \tilde{\alpha}_p, \tilde{d}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{b}_i^*$ имеют вид (17)–(21):

$$x_{12} + x_{18} - \frac{1}{4}x_{31} = x_1, \quad x_{28} - \frac{1}{2}x_{12} = -\frac{1}{4} + \kappa_2 - \psi_2, \quad x_{31} + x_{37} - \frac{1}{7}x_{43} = \frac{23}{3} + \kappa_3 - \psi_3, \quad (17)$$

$$x_{43} + x_{46} - \frac{2}{5}x_{74} = x_4, \quad -\frac{3}{5}x_{65} - \frac{1}{4}x_{85} = x_5,$$

$$x_{65} + x_{67} - x_{46} = \frac{19}{4} + \kappa_6 - \psi_6,$$

$$x_{74} + x_{78} - \frac{2}{3}x_{37} - \frac{3}{4}x_{67} = x_7, \quad x_{85} - \frac{1}{3}x_{18} - \frac{1}{5}x_{28} - \frac{4}{5}x_{78} = x_8,$$

$$\frac{1}{2}x_{12} + \frac{1}{7}x_{18} + \frac{5}{8}x_{31} + 5x_{28} + x_{37} + x_{43} + 4x_{46} + \frac{2}{5}x_{74} + x_{65} + 4x_{67} + \frac{1}{4}x_{85} + \frac{1}{2}x_{78} +$$

$$+ 7x_1 + 12x_4 + 19x_5 - 2x_7 + 13x_8 = \frac{109889}{1800} + \varphi_1 - \delta_1, \quad (18)$$

$$2x_{12} + \frac{1}{4}x_{18} + x_{31} + \frac{1}{3}x_{37} + \frac{1}{7}x_{43} + 2x_{46} + x_{74} + \frac{2}{5}x_{65} + 8x_{67} + \frac{1}{2}x_{85} + 2x_{78} +$$

$$+ \frac{1}{7}x_1 + \frac{1}{6}x_4 + \frac{1}{4}x_5 - 3x_7 - 4x_8 = \frac{52151}{3600} + \varphi_2 - \delta_2;$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{12} \leq 4 + m_{12} - n_{12}, \quad 0 \leq x_{18} \leq 9 + m_{18} - n_{18}, \quad 0 \leq x_{31} \leq 7 + m_{31} - n_{31}, \quad 0 \leq x_{28} \leq 2 + m_{28} - n_{28}, \\ 0 \leq x_{37} \leq 5 + m_{37} - n_{37}, \quad 0 \leq x_{43} \leq 8 + m_{43} - n_{43}, \quad 0 \leq x_{46} \leq 3 + m_{46} - n_{46}, \quad 0 \leq x_{74} \leq 5 + m_{74} - n_{74}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{65} \leq 8 + m_{65} - n_{65}, \quad 0 \leq x_{67} \leq 4 + m_{67} - n_{67}, \quad 0 \leq x_{78} \leq 3 + m_{78} - n_{78}, \quad 0 \leq x_{85} \leq 12 + m_{85} - n_{85}; \\ 8 + k_1 - s_1 \leq x_1 \leq 11 + u_1 - h_1, \quad 12 + k_4 - s_4 \leq x_4 \leq 19 + u_4 - h_4, \quad -8 + k_5 - s_5 \leq x_5 \leq 8 + u_5 - h_5, \\ -5 + k_7 - s_7 \leq x_7 \leq 5 + u_7 - h_7, \quad -3 + k_8 - s_8 \leq x_8 \leq 5 + u_8 - h_8; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \kappa_2 \geq 0, \psi_2 \geq 0, \kappa_3 \geq 0, \psi_3 \geq 0, \kappa_6 \geq 0, \psi_6 \geq 0, \varphi_1 \geq 0, \delta_1 \geq 0, \varphi_2 \geq 0, \delta_2 \geq 0, \\ m_{12} \geq 0, n_{12} \geq 0, m_{18} \geq 0, n_{18} \geq 0, m_{31} \geq 0, n_{31} \geq 0, m_{28} \geq 0, n_{28} \geq 0, m_{37} \geq 0, n_{37} \geq 0, \\ m_{43} \geq 0, n_{43} \geq 0, m_{46} \geq 0, n_{46} \geq 0, m_{74} \geq 0, n_{74} \geq 0, m_{65} \geq 0, n_{65} \geq 0, m_{67} \geq 0, n_{67} \geq 0, \\ m_{78} \geq 0, n_{78} \geq 0, m_{85} \geq 0, n_{85} \geq 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} k_1 \geq 0, s_1 \geq 0, k_4 \geq 0, s_4 \geq 0, k_5 \geq 0, s_5 \geq 0, k_7 \geq 0, s_7 \geq 0, k_8 \geq 0, s_8 \geq 0, \\ u_1 \geq 0, h_1 \geq 0, u_4 \geq 0, h_4 \geq 0, u_5 \geq 0, h_5 \geq 0, u_7 \geq 0, h_7 \geq 0, u_8 \geq 0, h_8 \geq 0. \end{aligned}$$

В результате решения обратной задачи (16)–(21) получены новые параметры (22):

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2 = a_2 + \kappa_2 - \psi_2 = a_2 - \frac{1}{20} = -\frac{3}{10}, \quad \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 + \varphi_1 - \delta_1 = \alpha_1 + \frac{250}{9} = \frac{159889}{1800}, \\ \tilde{d}_{31} = d_{31} + m_{31} - n_{31} = d_{31} + 1 = 8, \quad \tilde{b}_{*1} = b_{*1} + k_1 - s_1 = b_{*1} - 1 = 7, \quad \tilde{b}_{*4} = b_{*4} + k_4 - s_4 = b_{*4} - 6 = 6. \end{aligned} \quad (22)$$

Остальные параметры не изменяются. Частично допустимое решение (15) является допустимым решением задачи (9)–(14) для новых значений параметров (22).

4. Математическая модель обратной задачи: моделирование параметров целевой функции. Пусть $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in U; x_i^0, i \in I^*)$ – допустимое решение задачи (1)–(5), $x^0 \in Z$. Обозначим через α_{ij} и β_{ij} соответственно увеличение и уменьшение параметра c_{ij} целевой функции (1). Положим $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} + \alpha_{ij} - \beta_{ij}$, причем $\alpha_{ij} \geq 0$, $\beta_{ij} \geq 0$ для всех дуг $(i, j) \in U$, при этом α_{ij} и β_{ij} не могут одновременно принимать положительные значения. Кроме этого, положим $\tilde{c}_i = c_i + \alpha_i - \beta_i$, $i \in I^*$, причем $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, где α_i и β_i – соответственно увеличение и уменьшение параметра c_i целевой функции (1). При этом α_i и β_i одновременно не могут принимать положительные значения. В обратной задаче оптимизации [6] необходимо смоделировать параметры целевой функции (вектор стоимости $\tilde{c} = (\tilde{c}_{ij}, (i, j) \in U; \tilde{c}_i, i \in I^*)$) таким образом, чтобы заданное допустимое решение x^0 задачи (1)–(5) стало оптимальным решением скорректированной задачи с новыми значениями компонент вектора стоимости $\tilde{c} = (\tilde{c}_{ij}, (i, j) \in U; \tilde{c}_i, i \in I^*)$. Остальные параметры задачи (1)–(5) не изменяются. При этом общая корректировка параметров целевой функции является минимальной в соответствии с нормой:

$$I_p = \|\tilde{c} - c\|_p = \sum_{(i,j) \in U} |\tilde{c}_{ij} - c_{ij}|^p + \sum_{i \in I^*} |\tilde{c}_i - c_i|^p.$$

Для моделирования параметров $\tilde{c} = (\tilde{c}_{ij}, (i, j) \in U; \tilde{c}_i, i \in I^*)$ целевой функции необходимо построить математическую модель обратной задачи. Для этого, в зависимости от значений дуговых потоков $x_{ij}^0, (i, j) \in U$ заданного допустимого решения x^0 задачи (1)–(5), сформируем множества:

$$B_1 = \{(i, j) \in U : x_{ij}^0 = 0\}, \quad B_2 = \{(i, j) \in U : x_{ij}^0 = d_{ij}\}, \quad B_3 = \{(i, j) \in U : 0 < x_{ij}^0 < d_{ij}\}.$$

В зависимости от значений интенсивностей узлов $x_i^0, i \in I^*$ заданного допустимого решения x^0 задачи (1)–(5) сформируем множества:

$$R_1 = \{i \in I^* : x_i^0 = b_i\}, \quad R_2 = \{i \in I^* : x_i^0 = b_i^*\}, \quad R_3 = \{i \in I^* : b_i < x_i^0 < b_i^*\}.$$

Математическая модель обратной задачи для прямой задачи (1)–(5) для моделирования параметров целевой $\tilde{c} = (\tilde{c}_{ij}, (i, j) \in U; \tilde{c}_i, i \in I^*)$ имеет вид (23)–(24):

$$\sum_{(i,j) \in U} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) + \sum_{i \in I^*} (\alpha_i + \beta_i) \rightarrow \min, \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p &\leq c_{ij} + \alpha_{ij} - \beta_{ij}, \alpha_{ij} \geq 0, \beta_{ij} \geq 0 \text{ для всех дуг } (i, j) \in B_1; \\
y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p - v_{ij} &= c_{ij} + \alpha_{ij} - \beta_{ij}, v_{ij} \geq 0, \alpha_{ij} \geq 0, \beta_{ij} \geq 0 \text{ для всех дуг } (i, j) \in B_2; \\
y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p &= c_{ij} + \alpha_{ij} - \beta_{ij}, \alpha_{ij} \geq 0, \beta_{ij} \geq 0 \text{ для всех дуг } (i, j) \in B_3; \\
-y_i + \sum_{p=1}^l \lambda_i^p r_p + w_i &= c_i + \alpha_i - \beta_i, w_i \geq 0, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0 \text{ для всех узлов } i \in R_1; \\
-y_i + \sum_{p=1}^l \lambda_i^p r_p - t_i &= c_i + \alpha_i - \beta_i, t_i \geq 0, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0 \text{ для всех узлов } i \in R_2; \\
-y_i + \sum_{p=1}^l \lambda_i^p r_p &= c_i + \alpha_i - \beta_i, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0 \text{ для всех узлов } i \in R_3.
\end{aligned} \tag{24}$$

В результате решения обратной задачи (23)–(24) получены значения параметров $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} + \alpha_{ij} - \beta_{ij}$ и $\tilde{c}_i = c_i + \alpha_i - \beta_i$ для вектора стоимости $\tilde{c} = (\tilde{c}_{ij}, (i, j) \in U; \tilde{c}_i, i \in I^*)$, которые отличаются от исходных значений параметров $c = (c_{ij}, (i, j) \in U; c_i, i \in I^*)$ наименьшим образом и для которых заданное допустимое решение $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in U; x_i^0, i \in I^*)$, $x^0 \in Z$, является оптимальным решением скорректированной задачи (25)–(29) с новыми значениями компонент вектора стоимости $\tilde{c} = (\tilde{c}_{ij}, (i, j) \in U; \tilde{c}_i, i \in I^*)$, $x = x^0, x \in Z$.

$$\sum_{(i,j) \in U} (c_{ij} + \alpha_{ij} - \beta_{ij}) x_{ij} + \sum_{i \in I^*} (c_i + \alpha_i - \beta_i) x_i \rightarrow \min, \tag{25}$$

$$\sum_{j \in I_1^*(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_2^*(U)} \mu_{ij} x_{ij} = \begin{cases} x_i, i \in I^*, \\ \tilde{a}_i, i \in I \setminus I^*, \end{cases} \tag{26}$$

$$\sum_{(i,j) \in U} \lambda_{ij}^p x_{ij} + \sum_{i \in I^*} \lambda_i^p x_i = \tilde{\alpha}_p, \quad p = \overline{1, l}, \tag{27}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq \tilde{d}_{ij}, \quad (i, j) \in U, \tag{28}$$

$$\tilde{b}_* \leq x_i \leq \tilde{b}^*, \quad i \in I^*, \tag{29}$$

где $\tilde{a}_i = a_i, i \in I \setminus I^*$, $\tilde{\alpha}_p = \alpha_p, p = \overline{1, l}$, $\tilde{d}_{ij} = d_{ij}, (i, j) \in U$, $\tilde{b}_* = b_*, \tilde{b}^* = b^*, i \in I^*$, если x^0 является допустимым решением задачи (1)–(5). Если $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in U; x_i^0, i \in I^*)$ – частично допустимое решение задачи (1)–(5), $x^0 \notin Z$, то необходимо получить значения параметров (8) (результат решения обратной задачи (6)–(7)), которые отличаются от исходных значений параметров наименьшим образом и для которых вектор $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in U; x_i^0, i \in I^*)$ становится допустимым решением $x = x^0, x \in Z$, задачи (1)–(5) для новых значений параметров (8). Затем, в результате решения задачи (23)–(24), получим новые параметры $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} + \alpha_{ij} - \beta_{ij}$ и $\tilde{c}_i = c_i + \alpha_i - \beta_i$ целевой функции $\sum_{(i,j) \in U} \tilde{c}_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I^*} \tilde{c}_i x_i$, для которых допустимое решение $x = x^0, x \in Z$, прямой задачи вида (1)–(5) является оптимальным решением. Для решения задач вида (6)–(7) используются концепции теории графов [7], результаты, полученные в теории потоков [2], а также эффективные технологии декомпозиции [4; 5] построения численных решений.

5. Численный пример моделирования параметров целевой функции. Для связного ориентированного графа $S = (I, U)$, $|I| = 8, |U| = 12, I^* = \{1, 4, 5, 7, 8\}$ (рисунок 1) рассмотрим пример математической модели экстремальной линейной задачи потокового программирования с вложенной сетевой структурой ограничений (9)–(14). В результате решения обратной задачи (16)–(21) получены новые параметры (22), для которых вектор $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in U; x_i^0, i \in I^*)$, компоненты которого определены согласно (15), является допустимым решением задачи (9)–(14) для новых значений параметров (22). Составим множества $B_i, R_i, i = 1, 2, 3$:

$$B_1 = \{(7,8)\}, B_2 = \{(3,1), (7,4)\}, B_3 = \{(1,2), (1,8), (2,8), (3,7), (4,3), (4,6), (6,5), (6,7), (8,5)\},$$

$$R_1 = \{1,4\}, R_2 = \emptyset, R_3 = \{5,7,8\}.$$

Для моделирования параметров $\tilde{c} = (\tilde{c}_{ij}, (i,j) \in U; \tilde{c}_i, i \in I^*)$, $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} + \alpha_{ij} - \beta_{ij}, (i,j) \in U$, $\tilde{c}_i = c_i + \alpha_i - \beta_i, i \in I^*$, необходимо найти решение обратной задачи оптимизации (30)–(32) в соответствии с нормой l_1 .

$$\alpha_{12} + \beta_{12} + \alpha_{18} + \beta_{18} + \alpha_{31} + \beta_{31} + \alpha_{28} + \beta_{28} + \alpha_{37} + \beta_{37} + \alpha_{43} + \beta_{43} + \alpha_{46} + \beta_{46} + \alpha_{74} + \beta_{74} + \alpha_{65} + \beta_{65} + \alpha_{67} + \beta_{67} + \alpha_{78} + \beta_{78} + \alpha_{85} + \beta_{85} + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_4 + \beta_4 + \alpha_5 + \beta_5 + \alpha_7 + \beta_7 + \alpha_8 + \beta_8 \rightarrow \min, \quad (30)$$

$$y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}r_1 + 2r_2 = 1 + \alpha_{12} - \beta_{12},$$

$$y_1 - \frac{1}{3}y_8 + \frac{1}{7}r_1 + \frac{1}{4}r_2 = 6 + \alpha_{18} - \beta_{18},$$

$$y_2 - \frac{1}{5}y_8 + 5r_1 = 7 + \alpha_{28} - \beta_{28},$$

$$y_3 - \frac{1}{4}y_1 + \frac{5}{8}r_1 + r_2 - v_{31} = 7 + \alpha_{31} - \beta_{31}, v_{31} \geq 0,$$

$$y_3 - \frac{2}{3}y_7 + r_1 + \frac{1}{3}r_2 = 3 + \alpha_{37} - \beta_{37},$$

$$y_4 - \frac{1}{7}y_3 + r_1 + \frac{1}{7}r_2 = 8 + \alpha_{43} - \beta_{43},$$

$$y_4 - y_6 + 4r_1 + 2r_2 = 8 + \alpha_{46} - \beta_{46}, \quad (31)$$

$$y_6 - \frac{3}{5}y_5 + r_1 + \frac{2}{5}r_2 = 4 + \alpha_{65} - \beta_{65},$$

$$y_6 - \frac{3}{4}y_7 + 4r_1 + 8r_2 = 4 + \alpha_{67} - \beta_{67},$$

$$y_7 - \frac{2}{5}y_4 + \frac{2}{5}r_1 + r_2 - v_{74} = 9 + \alpha_{74} - \beta_{74}, v_{74} \geq 0,$$

$$y_7 - \frac{4}{5}y_8 + \frac{1}{2}r_1 + 2r_2 \leq 8 + \alpha_{78} - \beta_{78},$$

$$y_8 - \frac{1}{4}y_5 + \frac{1}{4}r_1 + \frac{1}{2}r_2 = 9 + \alpha_{85} - \beta_{85},$$

$$-y_1 + 7r_1 + \frac{1}{7}r_2 + w_1 = 1 + \alpha_1 - \beta_1, w_1 \geq 0,$$

$$-y_4 + 12r_1 + \frac{1}{6}r_2 + w_4 = 2 + \alpha_4 - \beta_4, w_4 \geq 0,$$

$$-y_5 + 19r_1 + \frac{1}{4}r_2 = 5 + \alpha_5 - \beta_5, \quad (32)$$

$$-y_7 - 2r_1 - 3r_2 = 3 + \alpha_7 - \beta_7,$$

$$-y_8 + 13r_1 - 4r_2 = 4 + \alpha_8 - \beta_8.$$

$$\begin{aligned} &\alpha_{12} \geq 0, \beta_{12} \geq 0, \alpha_{18} \geq 0, \beta_{18} \geq 0, \alpha_{31} \geq 0, \beta_{31} \geq 0, \alpha_{28} \geq 0, \beta_{28} \geq 0, \\ &\alpha_{37} \geq 0, \beta_{37} \geq 0, \alpha_{43} \geq 0, \beta_{43} \geq 0, \alpha_{46} \geq 0, \beta_{46} \geq 0, \alpha_{74} \geq 0, \beta_{74} \geq 0, \\ &\alpha_{65} \geq 0, \beta_{65} \geq 0, \alpha_{67} \geq 0, \beta_{67} \geq 0, \alpha_{78} \geq 0, \beta_{78} \geq 0, \alpha_{85} \geq 0, \beta_{85} \geq 0, \\ &\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \alpha_4 \geq 0, \beta_4 \geq 0, \alpha_5 \geq 0, \beta_5 \geq 0, \alpha_7 \geq 0, \beta_7 \geq 0, \alpha_8 \geq 0, \beta_8 \geq 0. \end{aligned}$$

В результате решения обратной задачи оптимизации (30)–(32) получены новые коэффициенты $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} + \alpha_{ij} - \beta_{ij}, (i, j) \in U, \tilde{c}_i = c_i + \alpha_i - \beta_i, i \in I^*$:

$$\tilde{c}_{ij} = \begin{cases} 1 + \frac{9607509}{6475622}, & \text{если } (i, j) = (1, 2); \\ 6 - \frac{527954843}{135988062}, & \text{если } (i, j) = (1, 8); \\ 8 - \frac{45696997}{6475622}, & \text{если } (i, j) = (4, 6); \\ 9 - \frac{58627649}{16189055}, & \text{если } (i, j) = (7, 4); \\ 9 - \frac{78591213}{25902488}, & \text{если } (i, j) = (8, 5); \\ c_{ij}, & \text{если } (i, j) \in U \setminus \{(1, 2), (1, 8), (4, 6), (7, 4), (8, 5)\}; \end{cases} \quad (33)$$

$$\tilde{c}_i = \begin{cases} 3 - \frac{39979393}{32378111}, & \text{если } i = 7, \\ c_i, & \text{если } i \in I^* \setminus \{7\}. \end{cases} \quad (34)$$

Для рассматриваемого примера (9)–(14) допустимое решение (15) экстремальной задачи вида (25)–(29) для скорректированных значений параметров нижних и верхних границ (8) и скорректированных значений параметров целевой функции $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} + \alpha_{ij} - \beta_{ij}, (i, j) \in U, (33)$ и $\tilde{c}_i = c_i + \alpha_i - \beta_i, i \in I^*, (34)$ является оптимальным решением.

Заключение. Разработаны и применены принципы обратной оптимизации для моделирования значений как можно меньшего числа параметров нижних и верхних границ с целью построения допустимого решения для одного класса экстремальных линейных задач потокового программирования, когда значения параметров неизвестны. Построена математическая модель задачи обратной оптимизации для моделирования параметров целевой функции, при которых допустимое решение становится оптимальным решением. Рассмотрены численные примеры моделирования параметров ограничений (нижних и верхних границ) и параметров целевой функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пилипчук, Л. А. Линейные неоднородные задачи потокового программирования / Л. А. Пилипчук. – Минск, 2009. – 222 с.
2. Pilipchuk, L. A. Algorithms for construction of optimal and suboptimal solutions in network optimization problem / L. A. Pilipchuk, A. S. Pilipchuk, Y. H. Pesheva // International Journal of Pure and Applied Mathematics (IJRAM). – 2009. – Vol. 54, No. 2. – P. 193–205.
3. Габасов, Р. Методы линейного программирования : в 3 ч. / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск, 1980. – Ч. 3 : Специальные задачи. – 368 с.
4. Пилипчук, Л. А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений / Л. А. Пилипчук. – Минск, 2012. – 260 с.
5. Pilipchuk, L. A. Sparse Linear Systems and Their Applications / L. A. Pilipchuk. – Minsk, 2013. – 235 p.
6. Jain, S. An inverse capacitated transportation problem / S. Jain, N. Arya // IOSR Journal of Mathematics. – 2013. – Vol. 5, No. 4. – P. 24–27.
7. Pilipchuk, L. A. Graph algorithms in sparse linear systems with rectangular matrices / L. A. Pilipchuk, A. S. Pilipchuk, Y. H. Pesheva // American Institute of Physics (AIP). AIP Conf. Proc. – 2013. – Vol. 1570. – P. 485–490.

Поступила в редакцию 30.03.15.

"Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2.
Mathematics, Physics, Informatics, Computer Technology and its Control"
Vol. 6, No. 1, 2016, pp. 31–39
© Yanka Kupala State University of Grodno, 2016

Inverse optimization problems: modeling of parameters lower (upper) bounds and parameters of the objective function

L. A. Pilipchuk¹, A. S. Pilipchuk²

¹ Belarusian State University (Belarus)
Nezavisimosti Ave., 4, 220030, Minsk, Belarus; e-mail: pilipchuk@bsu.by

² Belarusian State University (Belarus)
Nezavisimosti Ave., 4, 220030, Minsk, Belarus; e-mail: pilipchuk@bsu.by

Abstract. The statement of the problem is given in the first part and the description of its parameters. The second part is devoted to modeling of the parameters for the constraints (lower and upper bounds) in accordance with the selected norm. As a result of solving the inverse optimization problem to change the lower and upper bounds in accordance with the selected norm the infeasible solution becomes the feasible solution. In the third part of the work a numerical example of modeling parameters of the lower and upper bounds is considered. In the fourth part of this work the mathematical model of the inverse optimization problem for modeling parameters of the objective function is considered. As a result of solving the inverse optimization problem the new parameters of the objective function are obtained. For the new parameters of the objective function the feasible solution of the direct problem becomes its optimal solution. In the final part of the work a numerical example of modeling parameters of the objective function in accordance with the selected norm is considered. The results can be used to solve linear optimization problems in networks when the parameters of the lower and upper bounds and the parameters of the objective function are unknown.

Keywords: linear mathematical programming problem, inverse optimization, modeling parameters, lower and upper bounds, objective function, feasible solution, optimal solution.

References

1. Pilipchuk L. A. Linear inhomogeneous problems in network of flow programming [*Lineinye neodnorodnye zadachi potokovogo programmirovaniia*]. Minsk, 2009, 222 p.
2. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. C., Pesheva Y. H. Algorithms for construction of optimal and suboptimal solutions in network optimization problem. *International Journal of Pure and Applied Mathematics (IJPAM)*, 2009, vol. 54, No. 2, pp. 193-205.
3. Gabasov R., Kirillova F. M. Methods of linear programming : in 3 parts [*Metody lineinogo programmirovaniia : v 3 ch.*]. Minsk, 1980, part 3, 368 p.
4. Pilipchuk L. A. Sparse underdetermined systems of linear algebraic equations [*Razrezhennye nedoopredelennye sistemy lineinykh algebraicheskikh uravnenii*]. Minsk, 2012, 260 p.
5. Pilipchuk L. A. Sparse Linear Systems and Their Applications. Minsk, 2013, 235 p.
6. Jain S., Arya N. An inverse capacitated transportation problem. *IOSR Journal of Mathematics*, 2013, vol. 5, No. 4, p. 24-27.
7. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Pesheva Y. H. Graph algorithms in sparse linear systems with rectangular matrices. *American Institute of Physics (AIP). AIP Conf. Proc.*, 2013, vol. 1570, pp. 485-490.

