УДК 519.1+519.8

С.М. ПОТАЧИЦ

ЗАДАЧА О КРАТЧАЙШИХ ПУТЯХ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА МАКСИМАЛЬНОЕ КОЛИЧЕСТВО РЕБЕР, ВХОДЯЩИХ В ПУТЬ

In this article two problems arc analyzed: the problem of finding all shortest paths for all pairs of vertices with the constraint on the ceiling amount of edges, included in the path, and the problem of forming lists of all constraint paths for all pairs of vertices ordered by the weight. The exact algorithms of solving these problems are formulated.

В данной работе рассматриваются два варианта известной задачи о кратчайших путях [1-3, **6]** в ориентированном графе. В первом из них изучается построение кратчайших путей для всех пар вершин с дополнительным ограничением на наибольшее число ребер пути; во втором - строятся упорядоченные списки таких путей, также для всех пар вершин.

Для решения поставленных задач вводятся две операции над матрицами над $R' = R \cup \{+\infty\}$, где $\boldsymbol{R}$ - множество действительных чисел. При исследовании этих операций над множеством матриц длин путей графа получено несколько полезных свойств, на основе которых разработаны алгоритмы решения поставленных задач.

Рассмотрим взвешенный ориентированный граф $G = (V, E)$.

Для произвольного пути p этого графа выделим две его характеристики: вес $w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$ и длину $l(p) = k$, $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, где $w: E \to R$, $v_i \in V$, $i = \overline{0,k}$.

Введем следующие обозначения: под $p(u, v)$ будем понимать множество, состоящее из всех путей из u в v и только из них, а под $p^{(k)}(u,v)$ - множество всех путей длины $к$ из u в v соответственно. Вес кратчайшего пути и вес кратчайшего пути длины m из v_i в v_j обозначим $\delta(v_i, v_j)$ и $\delta^{(m)}(v_i, v_j)$ соответственно.

В терминах введенных обозначений поставленные задачи принимают следующий вид. Первая: даны $G = (V,E)$ - ориентированный граф и весовая функция $w: E \to R$, для всех пар вершин $v_i, v_j \in V$ необходимо найти

$$M_{ij}^k = \{p' \in p(v_i, v_j) \mid l(p') \leq k \wedge w(p') = \min_{0 \leq m \leq k} \delta^{(m)}(v_i, v_j)\}.$$

Вторая: даны $G = (V,E)$ - ориентированный граф и весовая функция $w: E \to R$, для всех пар вершин $v_i, v_i \in V$ необходимо найти $P_{ii}^k = \langle p_1, p_2, \ldots, p_{N_{ij}} \rangle$, $p_m \in p^{(1,2,\ldots,k)}(v_i, v_j)$, $m = \overline{1, N_{ij}}$, $N_{ij} = | p^{(1,2,\ldots,k)}(v_i, v_j) |$, $\forall m_1, m_2, 1 \leq m_1, m_2 \leq N_{ij}$, $m_1 \neq m_2 \Rightarrow p_{m_1} \neq p_{m_2}$, $m_1 \leq m_2 \Rightarrow w(p_{m_1}) \leq w(p_{m_2})$.

Обозначим операции взятия минимального значения и сложения над R' как $\circ$ и $\bullet$ соответственно, т. е. положим

1) $\min\{a, b\} = a \circ b$,

2) $a + b = a \bullet b$, где $a, b \in R'$.

Манипулируя ими как сложением ($\circ$) и умножением ($\bullet$), введем соответствующие операции над матрицами:

1) $C = A \circ B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \circ b_{ij}$, $A, B, C \in R'_{m \times n}$,

2) $C = A \bullet B \Leftrightarrow c_{ij} = (a_{i1} \bullet b_{1j}) \circ (a_{i2} \bullet b_{2j}) \circ \ldots \circ (a_{iq} \bullet b_{qj})$, $A \in R'_{m \times q}$, $B \in R'_{q \times n}$, $C \in R'_{m \times n}$.

Назовем матрицу W^n $(n \geq 1)$ степенью весовой матрицы W графа G в смысле операций $\circ$ и $\bullet$, если $W^n = W^{n-1} \bullet W^1$, $W^1 = W$, $n \geq 2$.

Для удобства следует также определить W^0 в смысле $\circ$ и $\bullet$:

$$w_{ij}^{(0)} \doteq \begin{cases} 0, & i = j, \\ +\infty, & i \neq j. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь некоторые свойства введенных операций.

Будем пользоваться следующими соглашениями: если рассматриваются величины или объекты, характеризующие пути без дополнительных ограничений, то записываем их без индексов, при наличии ограничений на длину пути будем их записывать в скобках в верхнем индексе.

Матрицу $A \in R'_{n \times n}$ будем называть матрицей весов путей (длины $k_1, k_2, \ldots, k_m$) графа G, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $a_{ij} = +\infty \Leftrightarrow p(v_i, v_j) = \varnothing$ ($p^{(k_1, k_2, \ldots, k_m)}(v_i, v_j) = \varnothing$),

2) $a_{ij} < +\infty \Rightarrow \exists p' \in p(v_i, v_j)$ ($\exists p' \in p^{(k_1, k_2, \ldots, k_m)}(v_i, v_i)$), $w(p') = a_{ij}$.

Лемма 1. *Пусть дан граф G, и матрицы* $W', W'' \in R'_{n \times n}$, *являющиеся матрицами весов путей из G Тогда* $\overline{W} = W' \bullet W''$ *также является матрицей весов путей из G.*

Доказательство.

$$\overline{w}_{ij} = \min_k \{w'_{ik} + w''_{kj}\} = +\infty \Leftrightarrow \forall k, w'_{ik} = +\infty \vee w''_{kj} = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall v_k, p(v_i, v_k) = \varnothing \vee p(v_k, v_j) = \varnothing \Leftrightarrow p(v_i, v_j) = \varnothing$$

$$\overline{w}_{ij} = \min_k \{w'_{ik} + w''_{kj}\} < +\infty \Leftrightarrow \exists l, w'_{il} + w''_{lj} = \overline{w}_{ij} < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w'_{il} < +\infty \wedge w''_{lj} < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists p' \in p(v_i, v_l), w(p') = w'_{il} \wedge \exists p'' \in p(v_l, v_j), w(p'') = w''_{lj} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists p = p' \to p'', w(p) = w(p') + w(p'') = w'_{il} + w''_{lj} = \overline{w}_{ij}. \blacksquare$$

Лемма 2. *Пусть дан граф G и матрицы* W' *и* W'', *являющиеся матрицами весов путей длины* k' *и* k'' *соответственно. Тогда* $\overline{W} = W' \bullet W''$ *- матрица весов путей длины* $k' + k''$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

Для удобства введем обозначения: Δ - матрица весов кратчайших путей, а $\Delta^{(k)}$ - матрица весов кратчайших путей длины *к*.

Лемма 3. $\Delta^{(k_1)} \bullet \Delta^{(k_2)} = \Delta^{(k_1 + k_2)}$.

Доказательство. Согласно лемме 2 в матрице $\Delta^{(k_1)} \bullet \Delta^{(k_2)}$ в i строке j столбце будет стоять длина некоторого пути $p' \in p^{(k_1+k_2)}(v_i, v_j)$. Причем $\delta^{(k_1+k_2)}(v_i, v_j) = \min_k \{\delta^{(k_1)}(v_i, v_k) + \delta^{(k_2)}(v_k, v_j)\} = w(p')$. ■

Теорема 1. $W^k = \Delta^{(k)}$.

Доказательство. 1) Путь из v_i в v_j состоит из 0 ребер тогда и только тогда, когда $v_i = v_j$ и его вес равен 0. Если $v_i \neq v_j$, то пути из v_i в v_j не существует.

$$w_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ +\infty, & i \neq j, \end{cases} \Rightarrow W^0$$ - матрица весов кратчайших путей из 0 ребер.

2) Путь из v_i в v_j состоит из одного ребра тогда и только тогда, когда $(v_i, v_j) \in E$ и его вес равен $w(v_i, v_j)$. Если $(v_i, v_j) \notin E$, то пути из одного ребра из v_i в v_j не существует.

$$w_{ij}^{(1)} = \begin{cases} w(v_i, v_j), (v_i, v_j) \in E, \\ +\infty, (v_i, v_j) \notin E, \end{cases} \Rightarrow W^1$$ - матрица весов кратчайших путей из одного ребра.

3) Пусть утверждение верно для k - 1. Докажем его для к.

$W^k = W^{k-1} \bullet W^1 = \Delta^{(k-1)} \bullet \Delta^{(1)} =$ [лемма 3] $= \Delta^{(k-1+1)} = \Delta^{(k)}$. ■

Итак, мы получаем простой способ вычисления весов кратчайших путей фиксированной длины k. Покажем теперь, как с его помощью построить все кратчайшие пути заданной длины.

Каждой матрице W^k поставим в соответствие матрицу $\pi^{(k)}$ и определим их следующим образом:

$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{\langle v_i \rangle\}, i = j, \\ \varnothing, i \neq j; \end{cases}$$

$$\pi_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \{\langle v_i, v_j \rangle\}, (v_i, v_j) \in E, \\ \varnothing, (v_i, v_j) \notin E; \end{cases}$$

$$\pi_{ij}^{(k)} = \bigcup_{\substack{l \\ w_{ij}^{(k)} = w_{il}^{(k-1)} \bullet w_{lj}^{(1)} < +\infty}} \bigcup_{\substack{p \\ p \in \pi_{il}^{(k-1)}}} \{\langle p, v_j \rangle\},$$

где путь $\langle p, v_j \rangle = \langle v_i = v_0^p, v_1^p, v_2^p, \ldots, v_{k-2}^p, v_{k-1}^p = v_l, v_j \rangle$ получается из пути $p = \langle v_i = v_0^p, v_1^p, v_2^p, \ldots, v_{k-2}^p, v_{k-1}^p = v_l \rangle$ добавлением ребра (v_l, v_j).

Теорема 2. $\pi_{ij}^{(m)}$ - *множество кратчайших путей длины* m *из* v_i *в* v_j

Доказательство. 1) Путь из v_i в v_j имеет длину 0 тогда и только тогда, когда $v_i = v_j$ и он состоит из единственной вершин v_i, при этом его вес равен 0. Если $v_i \neq v_j$, то пути длины 0 из v_i в v_j не существует.

$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{\langle v_i \rangle\}, i = j, \\ \varnothing, i \neq j; \end{cases} \Rightarrow \pi_{ij}^{(0)}$$ - множество кратчайших путей длины 0 из v_i в v_j

2) Путь из v_i в v_j имеет длину 1 тогда и только тогда, когда $(v_i, v_j) \in E$ и он имеет вид $\langle v_i, v_j \rangle$. Если $(v_i, v_j) \notin E$, то пути длины 1 из v_i в v_j не существует.

$$\pi_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \{\langle v_i, v_j \rangle\}, (v_i, v_j) \in E, \\ \varnothing, (v_i, v_j) \notin E; \end{cases} \Rightarrow \pi_{ij}^{(1)}$$ - множество кратчайших путей длины 1 из v_i в v_j.

3) Пусть утверждение верно для k - 1. Докажем его для k .

$$w_{ij}^{(k)} < +\infty \iff \exists l,\ w_{ij}^{(k)} = w_{il}^{(k-1)} + w_{lj}^{(1)} < +\infty \iff$$

$$\iff w_{il}^{(k-1)} < +\infty \wedge w_{lj}^{(1)} < +\infty \iff$$

$$\iff \pi_{il}^{(k-1)} \subseteq p^{(k-1)}(v_i, v_l) \neq \varnothing\ ,\ (\forall p_1 \in \pi_{il}^{(k-1)} \Rightarrow w(p_1) = \delta^{(k-1)}(v_i, v_l)),$$

$$(\forall p_2 \in p^{(k-1)}(v_i, v_l) \setminus \pi_{il}^{(k-1)} \Rightarrow w(p_2) > \delta^{(k-1)}(v_i, v_l))\ ,\ \pi_{lj}^{(1)} \subseteq p^{(1)}(v_l, v_j) \neq \varnothing,$$

$$(\forall p' \in \pi_{lj}^{(1)} \Rightarrow w(p') = \delta^{(1)}(v_l, v_j))\ ,$$

$$(\forall p'' \in p^{(1)}(v_l, v_j) \setminus \pi_{lj}^{(1)} \Rightarrow w(p'') > \delta^{(1)}(v_l, v_j)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\ \forall p \in \pi_{ij}^{(k)} \Rightarrow p = \langle \overline{p}, v_j \rangle,\ \overline{p} \in \pi_{il}^{(k-1)}\ ,\ p \in p^{(k)}(v_i, v_j)\ ] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((\forall p \in \pi_{ij}^{(k)} \Rightarrow p \in p^{(k)}(v_i, v_j)) \Rightarrow \pi_{ij}^{(k)} \subseteq p^{(k)}(v_i, v_j)),$$

$$w(p) = w(\overline{p}) + w(v_l, v_j) = \delta^{(k-1)}(v_i, v_l) + w(v_l, v_j) = w_{il}^{(k-1)} + w_{lj}^{(1)} = w_{ij}^{(k)} =$$

$$= \delta^{(k)}(v_i, v_j)\ ,\ p_1' \in p^{(k)}(v_i, v_j)\ ,\ (w(p_1') = \delta^{(k)}(v_i, v_j) \Rightarrow p_1' \in \pi_{ij}^{(k)}). \ \blacksquare$$

Теперь, имея способ построения множества всех кратчайших путей длины те, покажем, как получить множество кратчайших путей, не превосходящих некоторой фиксированной длины.

По аналогии с леммами 1, 2 и 3 не трудно показать справедливость лемм 4, 5, 6.

Лемма 4. *Пусть дан граф G и матрицы W' и W'', являющиеся матрицами весов путей. Тогда $\overline{W} = W' \circ W''$ также матрица весов путей.*

Лемма 5. *Пусть дан граф G и матрицы W' и W'', являющиеся матрицами весов путей длины k' и k'' соответственно. Тогда $\overline{W} = W' \circ W''$ — матрица весов путей длины k', k''.*

Лемма 6. $\Delta^{(k_1)} \circ \Delta^{(k_2)} = \Delta^{(k_1, k_2)}$.

Также по индукции легко доказать следующие следствия данных лемм.

Следствие 1. Пусть дан граф G и матрицы $W^{(l)},\ l = 1, 2, ..., m,$ являющиеся матрицами весов путей длины $k^{(l)}$. Тогда $\tilde{W} = W^{(1)} \circ W^{(2)} \circ ... \circ W^{(m)}$ — матрица весов путей длины $k^{(1)}, k^{(2)}, ..., k^{(m)}$.

Следствие 2. $\Delta^{(k_1)} \circ \Delta^{(k_2)} \circ ... \circ \Delta^{(k_m)} = \Delta^{(k_1, k_2, ..., k_m)}$.

Из приведенных лемм и следствий очевидным образом выводится способ нахождения весов кратчайших путей длины, не превышающей k: $\Delta^{(0,1,...,k)} = W^0 \circ W^1 \circ ... \circ W^k$.

Для построения самих путей введем матрицу π: $\pi_{ij} = \bigcup\limits_{\substack{l=0 \\ \overline{w}_{ij} = w_{ij}^{(l)} < +\infty}}^{k} \pi_{ij}^{(l)}$.

Теорема 3. π_{ij} *— множество кратчайших путей длины, не превосходящей k из v_i в v_j.*

Доказательство.

$$\forall p \in \pi_{ij} \Rightarrow \exists l, 0 \le l \le k, p \in \pi_{ij}^{(l)} \Rightarrow p \in p^{(l)}(v_i, v_j),$$

$$w(p) = \delta^{(l)}(v_i, v_j) = w_{ij}^{(l)} = \overline{w}_{ij} = \delta^{(0,1,...,k)}(v_i, v_j)$$

$$\forall p \in p^{(0,1,...,k)}(v_i, v_j),\ w(p) = \delta^{(0,1,...,k)}(v_i, v_j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists l, 0 \le l \le k,\ w(p) = \delta^{(l)}(v_i, v_j),\ p \in p^{(l)}(v_i, v_j) \Rightarrow p \in \pi_{ij}^{(l)} \Rightarrow p \in \pi_{ij}. \ \blacksquare$$

Далее приведен алгоритм решения первой задачи, основанный на построении матрицы π.

Алгоритм 1:

входная информация: W, k

шаг 1) *(подготовительный).* Построить матрицы W^0, $\pi^{(0)}$, W^1, $\pi^{(1)}$

шаг Т) для $m=\overline{2,k}$: $W^{m} := W^{m-1} \bullet W^{1}$

шаг 3) для $m=\overline{2,k}$ построить $\pi^{(m)}$: $\pi_{ij}^{(m)} := \bigcup\limits_{\substack{l \\ w_{ij}^{(m)}=w_{il}^{(m-1)} \bullet w_{lj}^{(1)}<+\infty}} \; \bigcup\limits_{\substack{p \\ p\in\pi_{il}^{(m-1)}}} \{\langle p, v_j \rangle\}$

шаг 4) $\overline{W} := W^{0} \circ W^{1} \circ \ldots \circ W^{k}$

шаг 5) построить π : $\pi_{ij} := \bigcup\limits_{\substack{m=0 \\ \overline{w}_{ij}=w_{ij}^{(m)}<+\infty}}^{k} \pi_{ij}^{(m)}$

выходная информация: π, $\overline{W}$.

При использовании линейных списков для реализации множеств приведенный алгоритм обладает следующими свойствами:

1) временная сложность $T(n)=O(k^{2}n^{k+2})$,

Т) емкостная сложность $E(n)=O(k^{2}n^{k+2})$, где $f(z)=O(g(z)) \Leftrightarrow \exists l,$ $m(\forall z \geq l \Rightarrow 0 \leq f(z) \leq mg(z))$, $n=|V|$.

Замечания. 1) Задача отыскания одного кратчайшего допустимого пути из множества A в множество B, $A, B \subseteq V$, для графа $G = (V, E)$ рассматривалась в [4, 5], там же приведены алгоритмы ее решения для некоторых классов графов, основанные на расстановке пометок.

2) Операции $\circ$ и $\bullet$ уже использовались в [1, 2, 6] в алгоритме построения матрицы весов кратчайших путей без дополнительных ограничений в графах с неотрицательной весовой функцией, заключающемся в «возведении в m-*ю* ($m \geq n$, n – количество вершин) степень» матрицы *D,* которая в используемых в данной статье обозначениях совпадает с матрицей $W^{(0)} \circ W^{(1)}$.

3) Поскольку любые отрезки кратчайших путей сами являются кратчайшими путями, то в элементе i-Й строки j-го столбца матриц $\pi^{(m)}$ и π достаточно хранить не сами пути, а лишь их предпоследние вершины v_{α} (вершины, предшествующие v_j на пути из v_i в v_j) и ссылки на соответствующие элементы множеств $\pi_{i\alpha}^{(m)}$ или $\pi_{i\alpha}$.

Рассмотрим вторую задачу. Для ее решения построим матрицу I:

$$i_{jk} = \begin{cases} 0, & (v_j, v_k) \in E, \\ +\infty, & (v_j, v_k) \notin E. \end{cases}$$

Применяя к ней алгоритм 1, очевидно, получим матрицу π', каждый элемент которой будет являться множеством путей длины, не превосходящей *к* между соответствующими вершинами. Преобразовав все такие множества в списки и упорядочив их по весу, получим искомое решение.

***Алгоритм* 2:**

входная информация: *W, к*

шаг 1) построить матрицу I по следующему правилу:

$$i_{jk}=+\infty \Leftrightarrow w_{jk}=+\infty\,,\; i_{jk}=0 \Leftrightarrow w_{jk}<+\infty$$

шаг Т) с помощью *алгоритма* 1 построить матрицу π' по матрице *I* и ограничению *к*

шаг 3) построить матрицу π_L путем преобразования элементов матрицы π' в упорядоченные по весу путей списки

выходная информация: π_L

На практике на аналогичные задачи, как правило, накладывается несколько видов ограничений. В данной же работе учитывалось только ограничение на длину пути. В дальнейшем предполагается провести исследование задач с ограничениями более общего вида, а также построение оптимальной реализации приведенных алгоритмов.

1. Ахо А.В., Хопкрофт Д.Э., Ульман Д.Д. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М., 1979.
2. Кормен Т., Лейзсрсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М., 1999.
3. Кристофидес Н. Теория графов. М., 1978.
4. Ермольев Ю.М.// Кибернетика. 1966. № 3.
5. Ермольев Ю.М., Мельник И.М.//Там же. 1967. № 1.
6. Lawler E.L. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. Holt, 1976.

Поступила в редакцию 16.09.06.

Сергей Михайлович Потачиц **-** инженер-профаммист РУП «Центр банковских технологий» Национального банка Республики Беларусь. Научный руководитель - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического обеспечения автоматизированных систем управления В.А. Образцов.