Л.А. ПИЛИПЧУК

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОТОКОВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

The new formula of an increment of criterion function is received. The criterion of an optimality based on calculation of a part of a vector of potentials is proved.

Рассмотрим конечную ориентированную обобщенную сеть $G=(I, U)$, $|U|>>|I|$ с множеством узлов I и множеством дуг U без кратных дуг и петель. Пусть $I^*\subseteq I$ – множество узлов с переменными интенсивностями $\pm x_i$, $I^*\neq\varnothing$, sign $(i)=1$, если $i\in I_+^*$, sign $(i)=-1$, если $i\in I_-^*$, $I_+^*, I_-^*\subseteq I^*$, $I_+^*\cap I_-^*=\varnothing$. $I\setminus I^*$ – множество узлов с постоянными интенсивностями a_i, $i\in I\setminus I^*$. Введем для узлов $i\in I^*$ характеристику c_i, которая для узлов из множества I_+^* означает затраты, связанные с увеличением производства на единицу продукта, для узлов из множества I_-^* – затраты на хранение единицы продукта. Остальные характеристики оставим традиционными: d_{ij} – пропускная способность дуги (i, j); x_{ij} – дуговой поток; c_{ij} – стоимость перевозки единицы потока по дуге (i, j), μ_{ij} – коэффициент преобразования дугового потока по дуге (i, j), $\mu_{ij}\in]0, 1]$, $(i, j)\in U$, $I_i^+(U)=\{j:(i, j)\in U\}$, $I_i^-(U)=\{j:(j, i)\in U\}$. На обобщенной сети G рассмотрим математическую модель экстремальной задачи вида

$$\varphi(x)=\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}+\sum_{i\in I^*} c_i x_i \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U)} \mu_{ji}x_{ji}=\begin{cases} x_i \operatorname{sign}(i), \; i\in I^* \\ a_i, \; i\in I\setminus I^* \end{cases}, \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^p x_{ij}+\sum_{i\in I^*} \lambda_i^p x_i=\beta^p, \; p=\overline{1,q}, \tag{3}$$

$$0\le x_{ij}\le d_{ij}, \; (i,j)\in U, \; b_{*i}\le x_i\le b_i^*, \; i\in I^*. \tag{4}$$

Вектор $x=(x_{ij}, (i, j)\in U, x_i, i\in I^*)$ – план, $x\in X$ (X – множество планов), если на нем выполняются ограничения (2) – (4) задачи. План $x^0\in X$ оптимален, если $c'x^0=\min c'x$, $x\in X$, $c=(c_{ij}, (i, j)\in U, c_i, i\in I^*)$. При заданном $\varepsilon\ge 0$, ε – оптимальный план $x^\varepsilon=(x_{ij}^\varepsilon, (i, j)\in U, x_i^\varepsilon, i\in I^*)$ определяется неравенством $c'x^\varepsilon-c'x^0\le\varepsilon$, $x^\varepsilon\in X$. Пара $\{x, K\}$ из плана и опоры K [1, 2] – опорный план. Совокупность множеств $K=\{U_K, I_K^*\}$ может быть представлена в виде объединения непересекающихся совокупностей множеств $R=\{U_R, I_R^*\}$, $W=\{U_W, I_W^*\}$, $U_W\subseteq U\setminus U_R$, $I_W^*\subseteq I^*\setminus I_R$ и $U_K=U_R\cup U_W$, $U_R\cap U_W=\varnothing$, $I_K^*=I_R^*\cup I_W^*$, $I_R^*\cap I_W^*=\varnothing$ со свойствами, приведенными в [2]. Опорный план $\{x, K\}$ – невырожденный, если он удовлетворяет следующим условиям:

$$0<x_{ij}<d_{ij}, \; (i,j)\in U_K, \; b_{*i}<x_i<b_i^*, \; i\in I_K^*. \tag{5}$$

Наряду с планом x рассмотрим план $\bar{x}$, $\Delta x=\bar{x}-x$. Из [2] следует, что для приращения $\Delta x=(\Delta x_{ij}, (i, j)\in U; \Delta x_i, i\in I^*)$ выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta x_{ij} &= \sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} \delta_{ij}^{\tau\rho}\Delta x_{\tau\rho}+\sum_{\gamma\in I^*\setminus I_R^*} \delta_{ij}^{\gamma}\Delta x_\gamma, \; (i,j)\in U_R, \\ \Delta x_i &= \sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} \delta_i^{\tau\rho}\Delta x_{\tau\rho}+\sum_{\gamma\in I^*\setminus I_R^*} \delta_i^{\gamma}\Delta x_\gamma, \; i\in I_R^*, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} \Lambda^p_{\tau\rho}\Delta x_{\tau\rho} + \sum_{\gamma\in I^*\setminus I^*_R} \Lambda^p_\gamma \Delta x_\gamma = 0,\ p=\overline{1,q}. \quad (7)$$

Запишем (6), (7) в матрично-векторной форме:

$$\Delta x_R = S_W \Delta x_W + S_N \Delta x_N,\ \Lambda_W \Delta x_W = -\Lambda_N \Delta x_N, \quad (8)$$

$$\Delta x_W = \{\Delta x_{ij},\ (i,j)\in U_W;\ \Delta x_i,\ i\in I^*_W\},\ \Delta x_R = (\Delta x_{ij},\ (i,j)\in U_R;\ \Delta x_i,\ i\in I^*_R),$$

$$\Delta x_N = \{\Delta x_{ij},\ (i,j)\in U_N;\ \Delta x_i,\ i\in I^*_N\},$$

$$S_W = (\delta_{\tau\rho},\ (\tau,\rho)\in U_W;\ \delta_\gamma,\ \gamma\in I^*_W),\ S_N = (\delta_{\tau\rho},\ (\tau,\rho)\in U_N;\ \delta_\gamma,\ \gamma\in I^*_N).$$

Матрицы Λ_W и Λ_N состоят из детерминантов структур [1, 2], порожденных элементами множеств W, $N=\{U_N, I^*_N\}$, $U_N=U\setminus U_K$, $I^*_N=I^*\setminus I_K$, $\Lambda_W=(\Lambda_{W_1}, \Lambda_{W_2})$, $\Lambda_{W_1}=(\Lambda^p_{\tau\rho},\ p=\overline{1,q};\ (\tau,\rho)\in U_W)$, $\Lambda_{W_2}=(\Lambda^p_\gamma,\ p=\overline{1,q},\ \gamma\in I^*_W)$, $\Lambda^p_{\tau\rho} = \sum_{(i,j)\in U_R} \lambda^p_{ij}\delta^{\tau\rho}_{ij} + \sum_{i\in I^*_R}\lambda^p_i\delta^{\tau\rho}_i + \lambda^p_{\tau\rho}$, $\Lambda^p_\gamma = \sum_{(i,j)\in U_R}\lambda^p_{ij}\delta^\gamma_{ij} + \sum_{i\in I^*_R}\lambda^p_i\delta^\gamma_i + \lambda^p_\gamma$. Столбцы матриц $S_W = (\delta_{\tau\rho},\ (\tau,\rho)\in U_W;\ \delta_\gamma,\ \gamma\in I^*_W)$ и $S_N = (\delta_{\tau\rho},\ (\tau,\rho)\in U_N;\ \delta_\gamma,\ \gamma\in I^*_N)$ в совокупности составляют базис пространства решений однородной системы, порожденной системой (2) [1, 2].

Совокупность множеств $W=\{U_W, I^*_W\}$, на основе которой построены компоненты вектора Δx_W, выбрана таким образом, чтобы $|\Lambda_W|\neq 0$. Поскольку K – опора, то $|\Lambda_W|\neq 0$ [2]. Следовательно, из (8) однозначно вычисляется вектор Δx_W:

$$\Delta x_W = -\Lambda_W^{-1}\Lambda_N \Delta x_N. \quad (9)$$

Используя соотношения (6), вычислим приращение целевой функции:

$$\Delta\varphi(x) = \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}\Delta x_{ij} + \sum_{i\in I} c_i \Delta x_i = \sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} \Delta_{\tau\rho}\Delta x_{\tau\rho} + \sum_{\gamma\in I^*\setminus I^*_R}\Delta_\gamma \Delta x_\gamma,$$

$$\Delta_{\tau\rho} = \sum_{(i,j)\in U_R} c_{ij}\delta^{\tau\rho}_{ij} + \sum_{i\in I^*_R} c_i\delta^{\tau\rho}_i + c_{\tau\rho},\quad \Delta_\gamma = \sum_{(i,j)\in U_R} c_{ij}\delta^\gamma_{ij} + \sum_{i\in I^*_R} c_i \delta^\gamma_i + c_\gamma.$$

Обозначим $r' = \Delta'_W\Lambda_W^{-1}$, $r=(r_1, r_2 ... r_q)$, $\tilde\Delta_N = (\tilde\Delta_{\tau\rho},\ (\tau,\rho)\in U_N;\ \tilde\Delta_\gamma,\ \gamma\in I^*_N)$,

$$\tilde\Delta_{\tau\rho} = \Delta_{\tau\rho} - \sum_{p=1}^q r_p\Lambda^p_{\tau\rho},\ (\tau,\rho)\in U_N,\ \tilde\Delta_\gamma = \Delta_\gamma - \sum_{p=1}^q r_p \Lambda^p_\gamma,\ \gamma\in I^*_N.$$

С учетом (9) получаем

$$\Delta\varphi(x) = \sum_{(\tau,\rho)\in U_N} \tilde\Delta_{\tau\rho}\Delta x_{\tau\rho} + \sum_{\gamma\in I^*_N}\tilde\Delta_\gamma \Delta x_\gamma. \quad (10)$$

С использованием результатов работы [3] доказана

Теорема (критерий оптимальности). Соотношения

$$\tilde\Delta_{ij}x_{ij} = \min_{0\le\omega\le d_{ij}} \tilde\Delta_{ij}\omega,\ (i,j)\in U_N,\quad \tilde\Delta_i x_i = \min_{b_{*i}\le\upsilon\le b^*_i}\tilde\Delta_i\upsilon,\ i\in I^*_N,$$

достаточны, а в случае невырожденности (5) и необходимы для оптимальности опорного плана $\{x, K\}$.

1. Pilipchuk L.A., Malakhouskaya Y.V., Kincaid D.R., Lai M. // East-West J. of Mathematics. 2002. Vol. 4. № 2. P. 191.

2. Pilipchuk L.A., KoliagoY.L., Pesheva Y.H. // Application of Mathematics in Engineering and Economics: Proceedings of the 29 th International Summer School. Sofia, 2004. P. 229.

3. Пилипчук Л.А., Пилипчук А.С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1998. № 2. С. 46.

Поступила в редакцию 25.11.04.

Людмила Андреевна Пилипчук – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационного и программно-математического обеспечения автоматизированных производств.