Л.А. ПИЛИПЧУК, А.А. ЛАГУТО

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ СЕТЕВАЯ ЗАДАЧА ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

In this article a direct exact relaxation algorithm for the network problem of the fractional programming is described.

Исследуется экстремальная задача потокового программирования с дробно-линейной целевой функцией (отношение двух линейных форм) и сетевыми ограничениями баланса. Выделение специальных задач в отдельные классы и разработка для них новых методов решения являются актуальными проблемами [1–3]. Как показывают исследования экстремальных потоковых задач, создание специальных алгоритмов, учитывающих особенности задачи, ее сетевые свойства [1, 2, 5] и современные достижения потокового программирования [1, 2], эффективнее, чем вложение задачи в матричную модель с последующим применением общего метода [4]. В данной статье получена новая формула приращения дробно-линейной целевой функции, основанная на изучении сетевых свойств базисов пространства решений специальной линейной системы [5]. Доказаны условия оптимальности, обоснована итерация метода.

Рассмотрим экстремальную задачу дробно-линейного программирования в сетевой форме:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\sum\limits_{(i,j)\in U} p_{ij}x_{ij}+\beta}{\sum\limits_{(i,j)\in U} q_{ij}x_{ij}+\gamma}\to \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U)} x_{ji}=b_i,\ i\in I, \tag{2}$$

$$d_{*ij}\le x_{ij}\le d_{ij}^*,\ (i,j)\in U, \tag{3}$$

где $S=\{I, U\}$ – конечная ориентированная связная сеть без кратных дуг и петель с множеством узлов I, $|I|=m$ и множеством дуг U, $|U|=n$, $m\le n$, β, γ – скаляры, $x=(x_{ij}, (i, j)\in U)$ – поток задачи, $x\in X$ (на векторе x выполняются все ограничения задачи (2), (3)), X – выпуклое множество потоков (планов); $I_i^+(U)=\{j:(i, j)\in U\}$, $I_i^-(U)=\{j:(j, i)\in U\}$. Полагаем, что знаменатель $q(x)=\sum\limits_{(i,j)\in U} q_{ij}x_{ij}+\gamma$ целевой функции не меняет знак на множестве потоков. Следовательно, без ограничений общности можно считать, что знаменатель $q(x)>0$, $\forall x\in X$. Множество дуг U_R покрывающего дерева исходной сети S составляет ее опору [3]. Обозначим $U_N=U\backslash U_R$. Пара $\{x, U_R\}$, состоящая из произвольного потока x и произвольной опоры U_R, называется опорным потоком. Опорный поток будем называть невырожденным, если выполняются соотношения $d_{*ij}<x_{ij}<d_{ij}^*$, $(i, j)\in U_R$. Пусть $\{x, U_R\}$ – начальный опорный поток задачи (1) – (3). Обозначим через $\overline{x}=x+\Delta x$ некоторый другой поток этой задачи, где $\Delta x=\overline{x}-x$. Известно [5], что опорные компоненты вектора $x=(x_{ij}, (i, j)\in U)$ выражаются через компоненты $x_{\tau\rho}$, $(\tau, \rho)\in U_N$ следующим образом:

$$x_{ij}=\sum_{(\tau,\rho)\in U_N} x_{\tau\rho}\,sign(i,j)^{L(\tau,\rho)}+\sum_{s\in I\backslash k} b_s\,sign(i,j)^{Ls},\ (i,j)\in U_R, \tag{4}$$

где k – произвольный узел множества I; $sign(i, j)^{L(\tau, \rho)}$ – знак дуги (i, j) в цикле $L(\tau, \rho)$, порожденном дугой $(\tau, \rho)\in U_N$ (направление в цикле определяется дугой (τ, ρ)); $sign(i, j)^{L(\tau, \rho)}$ – знак дуги (i, j) в единственной цепи L_s покрывающего дерева, соединяющей узел s с узлом k. Приращение Δx потока x удовлетворяет равенствам

$$\Delta x_{ij}=\sum_{(\tau,\rho)\in U_N}\Delta x_{\tau\rho}\,sign(i,\ j)^{L(\tau,\rho)},\ (i,j)\in U_R. \tag{5}$$

На основании (4), (5) формула приращения целевой функции имеет вид:

$$\Delta f=\frac{\sum\limits_{(\tau,\rho)\in U_N}\Delta x_{\tau\rho}\Delta^{(\tau,\rho)}}{\sum\limits_{(\tau,\rho)\in U_N} x_{\tau\rho}\Delta_q^{(\tau,\rho)}+\sum\limits_{(\tau,\rho)\in U_N}\Delta x_{\tau\rho}\Delta_q^{(\tau,\rho)}+Q+\gamma},$$

$$\Delta^{(\tau,\rho)}=\Delta_p^{(\tau,\rho)}-f(x)\Delta_q^{(\tau,\rho)},\ \Delta_p^{(\tau,\rho)}=p_{\tau\rho}+\sum_{(i,\ j)\in U_R} p_{ij}\,sign(i,\ j)^{L(\tau,\rho)},$$

$$\Delta_q^{(\tau,\rho)}=q_{\tau\rho}+\sum_{(i,\ j)\in U_R} q_{ij}\,sign(i,j)^{L(\tau,\rho)},\ Q=\sum_{(i,\ j)\in U_R} q_{ij}\sum_{s\in I\backslash k} b_s\,sign(i,\ j)^{Ls}.$$

Теорема (критерий оптимальности). Для оптимальности опорного потока $\{x,\ U_R\}$ достаточно, а в случае невырожденности и необходимо выполнение соотношений:

$$\Delta^{(\tau,\rho)} \geq 0 \text{ при } x_{\tau\rho} = d^*_{\tau\rho};\ \Delta^{(\tau,\rho)} \leq 0 \text{ при } x_{\tau\rho} = d_{*\tau\rho};$$
$$\Delta^{(\tau,\rho)} = 0 \text{ при } d_{*\tau\rho} < x_{\tau\rho} < d^*_{\tau\rho},\ (\tau,\rho) \in U_N. \tag{6}$$

Пусть на опорном потоке $\{x,\ U_R\}$ соотношения (6) не выполняются. Согласно [5] компоненты вектора $l=l(U)\in R^n$ – допустимого направления изменения потока x равны $l_{ij} = \sum_{(\tau,\rho)\in U_N} l_{\tau\rho} sign(i,j)^{L(\tau,\rho)}$, $(i,\ j)\in U_R$. По предположению $q(x+\Delta x)>0$, следовательно, допустимое направление l является подходящим (направлением возрастания целевой функции), если выполняется неравенство $\sum_{(\tau,\rho)\in U_N} l_{\tau\rho}\Delta^{(\tau,\rho)} \geq 0$. Максимальное значение производной целевой функции по допустимому направлению l при нормировочном условии $\sum_{(i,j)\in U_N} |l_{ij}| = 1$ достигается на дуге $(\tau_0,\ \rho_0)\in U_N$, которая находится из условия

$$\left|\Delta^{(\tau_0,\rho_0)}\right| = \max_{(\tau,\rho)\in U_N} \left\{ \max_{x_{\tau\rho}=d_{*\tau\rho}} \Delta^{(\tau,\rho)}, \max_{x_{\tau\rho}=d^*_{\tau\rho}} -\Delta^{(\tau,\rho)}, \max_{d_{*\tau\rho}<x_{\tau\rho}<d^*_{\tau\rho}} \left|\Delta^{(\tau,\rho)}\right| \right\}.$$

Компоненты подходящего направления равны $l_{\tau_0\rho_0} = \operatorname{sgn}\Delta^{(\tau_0,\rho_0)}$, $l_{\tau\rho}=0$, $(\tau,\ \rho)\in U_N\backslash(\tau_0,\ \rho_0)$, $l_{ij} = l_{\tau_0\rho_0} sign(i,j)^{L(\tau_0,\rho_0)}$, $(i,\ j)\in U_R$. При этом справедливо равенство:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = \frac{l_{\tau_0\rho_0}\Delta^{(\tau_0,\rho_0)}}{q(x)} = \frac{\Delta^{(\tau_0,\rho_0)}\operatorname{sgn}\Delta^{(\tau_0,\rho_0)}}{q(x)} = \frac{\left|\Delta^{(\tau_0,\rho_0)}\right|}{q(x)}.$$

Так как по предположению $q(x)>0$, $\forall x\in X$, то $\dfrac{\partial f(x)}{\partial l} > 0$. Если вдоль выбранного направления l знаменатель $q(x)$ дробно-линейной функции $f(x)$ не меняет знак, то функция $f(x)$ вдоль этого направления меняется монотонно. Следовательно, вдоль построенного подходящего направления l будем двигаться до тех пор, пока не достигнем границы множества потоков X. Максимально допустимый шаг θ^0 вычисляется по стандартным правилам [3, 4]. Если $\theta^0=\theta_{\tau_0\rho_0}$, то опора не меняется. Если $\theta^0=\theta_{\tau_1\rho_1}$, то происходит замена опоры $\overline{U}_R=(U_R\backslash(\tau_1,\ \rho_1))\cup(\tau_0,\ \rho_0)$.

1. Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, James B. Orlin. Network Flows: Theory, Algorithms and Applications. New Jersey, 1993.
2. Иванчев Д. Мрежова оптимизация. София, 2002.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О.И. Конструктивные методы оптимизации: В 3 ч. Ч. 3. Сетевые задачи. Мн., 1986.
4. Дежурко Л.Ф., Фам Тхе Лонг. // Докл. АН БССР. 1983. № 7. С. 595.
5. Pilipchuk L.A., Malakhouskaya Y.V., Kincaid D.R., Lai M. // East-West J. of Mathematics. 2002. Vol. 4. № 2. P. 191.

Поступила в редакцию 23.12.2003.

Людмила Андреевна Пилипчук – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационного и программно-математического обеспечения автоматизированных производств.

Анна Андреевна Лагуто – аспирант кафедры информационного и программно-математического обеспечения автоматизированных производств. Научный руководитель – Л.А. Пилипчук.