Для рассмотренной математической модели найдено решение, доказана его единственность и установлена непрерывная зависимость от начальных данных задачи. Прежде чем сформулировать основные результаты, введем обозначения:

$$\Pi_{xyz} = \{(x,y,z) : -\infty < x, y < +\infty,\ z > 0\}, \quad \Pi = \{(x,y,z,t) : t > 0,\ (x,y,z) \in \Pi_{xyz}\}.$$

Теорема 1. *Пусть n_1 и n_2 — решения уравнения* (3) *с правыми частями $-\Phi_1$ и $-\Phi_2$ соответственно, удовлетворяющие граничным условиям* (4) *и для всех $(x,y,z) \in \Pi_{xyz}$ справедлива оценка $|\Phi_2(x,y,z) - \Phi_1(x,y,z)| \leqslant \varepsilon$. Тогда при всех $(x,y,z,t) \in \Pi$ справедлива оценка $|n_2(x,y,z) - n_1(x,y,z)| \leqslant C\varepsilon$, $C = 0,5(\lambda^2 + \sqrt{26})^{-1}$.*

Теорема 2. *Пусть c_1 и c_2 — решения уравнения* (1), *удовлетворяющие начальному условию* (2) *с разными правыми частями ($c_1(x,y,z,0) = n_1(x,y,z)$, $c_2(x,y,z,0) = n_2(x,y,z)$) и для всех $(x,y,z) \in \Pi_{xyz}$ функции n_1 и n_2 удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда при всех $(x,y,z,t) \in \Pi$ справедлива оценка $|c_2(x,y,z,t) - c_1(x,y,z,t)| \leqslant C\varepsilon$, $C = 0,5(\lambda^2 + \sqrt{26})^{-1}$.*

Исследования проведены при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (базовая часть государственного задания № 340/2015, проект № 1416), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-31-50648), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 14-42-03062).

Литература

1. Поляков А. Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М. А. *Двумерная диффузия и катодолюминесценция экситонов, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале: результаты математического моделирования* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2012. № 11. С. 35–40.

2. Туртин Д. В., Поляков А. Н., Степович М. А. *Математическая модель трехмерной диффузии и катодолюминесценции неравновесных носителей заряда, генерированных электронным зондом в полупроводниковом материале* // Тез. докл. XXV Российской конференции по электронной микроскопии. Т. 1. Черноголовка: ИПТМ РАН, 2014. С. 270–271.

3. Поляков А. Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М. А. *О практической реализации одной схемы времяпролетных измерений в катодолюминесцентной микроскопии* // Прикладная физика. 2015. № 4. С. 11–15.

К ТЕОРИИ ОСОБОГО СЛУЧАЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА В ВЕСОВЫХ КЛАССАХ ГЕЛЬДЕРА

Т.М. Урбанович

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь
UrbanovichTM@gmail.com

Обозначим $H(E)$ класс всех функций $\varphi(z)$, заданных на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{C}$ и удовлетворяющих условию Гельдера, т. е. оценке $|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leqslant C|z_1 - z_2|^\mu$, $z_1, z_2 \in E$, с некоторыми положительными постоянными C и $\mu \leqslant 1$. Пусть Γ — простой гладкий замкнутый контур, делящий плоскость комплексного переменного на внутреннюю область D^+ и внешнюю D^-; F — конечное множество точек контура Γ; $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ — заданное семейство комплексных чисел.

По определению функция φ принадлежит классу $H_\lambda(\Gamma, F)$, если $\varphi \in H(\Gamma_0)$ на каждой дуге $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \setminus F$ и представима в виде $\varphi(t) = |t - \tau|^{\lambda_\tau} \varphi_1(t)$ на каждой дуге Γ_τ с концом τ, не содержащей других точек из F, с функцией $\varphi_1(t) \in H(\Gamma_\tau)$.

Будем говорить, что функция $\varphi \in H_\lambda(\Gamma, F)$ обратима, если $\varphi(t) \neq 0$, $t \in \Gamma \setminus F$, и $1/\varphi(t) \in H_{-\lambda}(\Gamma, F)$.

По определению функция $\phi(z)$ принадлежит классу $H_\lambda(\overline{D^\pm}, F)$, если в каждой замкнутой области $\overline{D_0} \subseteq \overline{D^\pm} \setminus F$ она принадлежит классу $H(\overline{D_0})$, а в каждой области $D^\pm_\tau \subseteq D^\pm$, для которой $\overline{D_\tau^\pm} \cap F = \{\tau\}$ представима в виде $\Phi(z) = (z-\tau)^{\lambda_\tau}\Phi_1(z)$, где $\Phi_1(z) \in H(\overline{D_\tau^\pm})$, причем в определение класса $\Phi \in H_\lambda(\overline{D^-}, F)$ входит условие конечного порядка функции $\Phi(z)$ на бесконечности. А именно, порядок функции Φ на бесконечности не превосходит целого n, если в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки выполняется оценка $|\Phi(z)| \leqslant C|z|^n$.

Постановка задачи. Пусть $\alpha = (\alpha_\tau, \tau \in F)$ — семейство комплексных чисел и задана функция $A(z) = \prod_{\tau\in F}(z-\tau)^{\alpha_\tau}$, $z \in \overline{D^+}$. Пусть также заданы семейства комплексных чисел $\lambda^+ = (\lambda_\tau^+, \tau \in F)$, $\lambda^- = (\lambda_\tau^-, \tau \in F)$, и выполняется равенство $\lambda^+ - \lambda^- = \alpha$.

Найти аналитическую вне Γ функцию $\Phi(z) \in H_{\lambda^\pm}(\overline{D^\pm}, F)$, исчезающую на бесконечности, по краевому условию

$$\Phi^+(t) - A(t)G_0(t)\Phi^-(t) = g(t), \tag{1}$$

где правая часть $g(t) \in H_{\lambda^+}(\Gamma, F)$, функция $G_0(t) \in H_0(\Gamma, F)$ и обратима, причем

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_\tau^+ - \alpha_\tau) \neq \frac{1}{2\pi}[(\arg G_0)(\tau-0) - (\arg G_0)(\tau+0)](\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}). \tag{2}$$

Все исследования выполнены в весовых классах Гельдера с любым комплексным весом, имеющим лишь ограничение (2). Найдена явная формула решения и условия разрешимости [1].

Заметим, что $A(z) \in H_\alpha(\overline{D^+}, F)$ и обратима. Запишем (1) в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{A(t)} - G_0(t)\Phi^-(t) = f(t), \tag{3}$$

где $f(t) = g(t)/A(t)$, $f(t) \in H_{\lambda^+-\alpha}(\Gamma, F)$. Положим $\Psi(z) = \begin{cases} \Phi(z)/A(z), & z \in D^+, \\ \Phi(z), & z \in D^-, \end{cases}$ и задачу (3) сведем к задаче о скачке

$$\Psi^+(t) - G_0(t)\Psi^-(t) = f(t). \tag{4}$$

Построим каноническую функцию $X(z)$ задачи (4). Для этого выберем произвольную непрерывную на $\Gamma \setminus F$ ветвь функции $\ln G_0(t)$, которая принадлежит $H_0(\Gamma, F)$, и положим $X_0(z) = e^{\Omega(z)}$, где $\Omega(z) = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma (\ln G_0)(t)(t-z)^{-1}\,dt$.

Рассмотрим семейство чисел $\delta_\tau = (2\pi i)^{-1}((\ln G_0)(\tau-0) - (\ln G_0)(\tau+0))$, $\tau \in F$. Выберем целые числа n_τ по условию $-1 < \mathrm{Re}\,(\lambda_\tau^+ - \alpha_\tau - \delta_\tau) + n_\tau < 0$ (дополнительным условием на λ^+ является то, что $\mathrm{Re}\,(\lambda_\tau^+ - \alpha_\tau - \delta_\tau)$ не принадлежат множеству целых чисел). В терминах целой части числа $n_\tau = [\mathrm{Re}\,(\delta_\tau + \alpha_\tau - \lambda_\tau^+)]$. Положим $X(z) = X_0(z)\prod_{\tau\in F}(z-\tau)^{-n_\tau}$.

Теорема. *Пусть* $æ = \sum_{\tau\in F} n_\tau$, $\tau \in F$. *Тогда при* $æ \geqslant 0$ *общее решение задачи* (1), *исчезающее на бесконечности, в классе* $H_{\lambda^\pm}(\overline{D^\pm}, F)$, *с правой частью* $g(t) \in H_{\lambda^+}(\Gamma, F)$ *дается формулой*

$$\Phi(z) = \begin{cases} A(z)\Psi(z), & z \in D^+, \\ \Psi(z), & z \in D^-, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$\Psi(z) = X(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{g(t)}{A(t)X^+(t)(t-z)}\,dt + P(z)\right),$$

степень произвольного многочлена $P(z)$ *не выше* $æ - 1$ (*при* $æ = 0$ *положим* $P(z) = 0$).

Если $æ < 0$, *то для существования решения необходимо и достаточно выполнение* $-æ$ *условий разрешимости*

$$\int\limits_\Gamma \frac{g(t)}{A(t)X^+(t)} t^j\,dt = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, -æ - 1,$$

и (единственное) решение задачи (1) *дается формулой* (5) *при* $P(z) = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Ф14КАЗ-034 «Операторные методы решения общих краевых задач для уравнений с частными производными и их приложения».

Литература

1. Урбанович Т. М. *Особый случай краевой задачи Римана* // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58. № 6. С. 18–21.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ПОСТРОЕНИИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Е.С. Чеб

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
cheb@bsu.by

Рассматривается граничная задача для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами, оператор которого представим в виде композиции операторов второго порядка. Аналитическое решение граничной задачи ищется методом характеристик по следующей схеме. Сначала с помощью характеристик уравнения находится его общее решение. Из общего решения выделяется то, которое удовлетворяет начальным и граничным условиям. Таким методом автором работы решались смешанные задачи для уравнений второго и, в частности, четвертого порядка [1].

В полуполосе $Q = (0,\infty) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ относительно функции $u : \overline{Q} = [0,\infty) \times \overline{\Omega} \ni (t,x) \to$ $\to u(t,x)$ рассмотрим нестрого гиперболическое уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами, которое запишем в виде

$$\mathcal{L}u = (\partial_t - a^{(1)}\partial_x)^2(\partial_t - a^{(2)}\partial_x)^2 u(t,x) = 0, \tag{1}$$

где $\overline{\Omega}$ — замыкание области $\Omega = (0,l)$, $l > 0$, $l \in \mathbb{R}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $a^{(1)} \neq a^{(2)}$. К уравнению (1) присоединяем условия Коши

$$\partial_t^j u(0,x) = \varphi_j(x), \quad j = 0,1,2,3, \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Чтобы задача (1), (2) имела единственное решение, на оставшейся части границы ∂Q области Q, т. е. при $x = 0$ и $x = l$, для искомой функции u дополнительно задаются граничные условия

$$\partial_x^s u(t,0) = \mu_s(t), \quad \partial_x^s u(t,l) = \nu_s(t), \quad s = 0,1, \quad t \in (0,\infty). \tag{3}$$

Условия (3) не всегда делают задачу (1)–(3) корректно поставленной. Выбор граничных условий, вид и задание их для всех $t \in [0,\infty)$ при $x = 0$ и $x = l$ зависит от коэффициентов $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$. В [1] построено классическое решение задачи (1)–(3) для уравнения (1) в случае, когда $a^{(1)} = a^{(2)} = a$. Сейчас предполагается, что числа $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ имеют разные знаки. Для определенности считаем, что $a^{(1)} < 0$, $a^{(2)} > 0$, $|a^{(1)}| < |a^{(2)}|$.

Лемма 1. *Общее решение уравнения* (1) *из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций* $C^4(\mathbb{R}^2)$ *представляется в виде суммы*

$$u(t,x) = g_1(x + a^{(1)}t) + (x + a^{(2)}t)g_1(x + a^{(1)}t) + g_3(x + a^{(2)}t) + (x + a^{(1)}t)g_4(x + a^{(2)}t), \tag{4}$$

где g_1, g_2, g_3 *и* g_4 *— любые функции из* $C^4(\mathbb{R}^2)$ *от аргументов* $x + a^{(1)}t$ *и* $x + a^{(2)}t$ *соответственно,* $g_1, g_2 : (-\infty, l] \ni y \to g_i(y) \in \mathbb{R}$, $g_3, g_4 : [0,\infty] \ni y \to g_{i+2}(y) \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$.