Аналогичным образом из представления (6) для $m = 2$ получаем среднеинтегральную формулу для определения κ для произвольного периода τ_0 :

$$\sum_{i=1}^{4} [\bar{\mathrm{T}}(t_i) - \bar{\mathrm{T}}(t_{i+4})]^2 = 8\mathrm{M}_1^2(b_1). \tag{11}$$

Функции Φ_1 и M_1 в уравнениях (9) и (10) определяются соответственно из (5) и (7).

Для определения коэффициента κ с использованием формулы (10) необходимы величины T_1, τ_0, $\mathrm{T}(y_*, t_i^*)$ — значения температуры почвенного слоя $[0, L]$ на произвольной глубине $y_* = y = x_*/L$ для $t_i^* = i\tau_0^*/4$, $i = \overline{1,8}$). Например, если $\tau_0^* = 24$ ч, то $t^* = 3, 6, \ldots, 24$ ч. Имея эти данные, вычисляем $[\mathrm{T}(y_*, t_i^*) - \mathrm{T}(y_*, t_{i+4}^*)]$ для всех $i = \overline{1,8}$. Далее, κ определяем по формуле (10) методом подбора значения параметра b_1^* на ЭВМ исходя из условия совпадения левой и вычисленной по исходным данным правой части т. е.: $\sum_{i=1}^{4}[\mathrm{T}(y_*, t_i^*) - \mathrm{T}(y_*, t_{i+4}^*)]^2/(8\mathrm{T}_1^2)$. Из соотношения $b_1^* = \sqrt{\omega L^2/2\kappa}$ находим значение κ на глубине $x = x_*$, которое равно

$$\kappa^* = \frac{\pi L^2}{\tau_0 (b_1^*)^2}. \tag{12}$$

Используя формулу (6), можно находить κ на основе экспериментальных данных по температуре в почвенном слое $[0, L]$, т. е. $\bar{\mathrm{T}}(t_i)$, а также T_1. В этом случае подбор значения параметра b_1^* осуществляется по формуле

$$\frac{1}{8\mathrm{T}_1^2} \sum_{i=1}^{4} [\bar{\mathrm{T}}(t_i) - \bar{\mathrm{T}}(t_{i+4})]^2 = \frac{\mathrm{sh}^2(2b_1) + \sin^2(2b_1)}{2b_1^2[\mathrm{ch}(2b_1) + \cos(2b_1)]^2}. \tag{13}$$

В отличие от методов в [1], здесь для определения коэффициента κ необходимо знать распределение температуры $\mathrm{T}(y_*, t_i)$ по времени в почвенном слое $[0, L]$ на произвольной безразмерной глубине $y_* = x/L$ и $\bar{\mathrm{T}}(t_i)$ для *восьми моментов времени*, что позволяет с более высокой точностью определить параметр κ по формулам (10)–(13).

Литература

1. Микайылов Ф. Д., Шеин Е. В. *Теоретические основы экспериментальных методов определения температуропроводности почв* // Почвоведение. 2010. № 5. С. 597–605.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнение математической физики.* М.: Наука, 1966. 724 с.
3. Чудновский А. Ф. *Теплофизика почв.* М.: Наука, 1976. 352 с.
4. Шеин Е.В. *Курс физики почв.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005. 432 с.
5. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of heat in solids.* 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1986. 510 p.
6. Juri W. A., Gardner W. R., Gardner W. H. *Soil Physics.* New York, 1991. 328 p.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ДЛЯ СУБРИМАНОВОЙ МЕТРИКИ НА СВОБОДНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЕ ЛИ ТИПА $(2, 3, 5, 8)$

Д.И. Пирштук

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
PirshtukDI@bsu.by

Введение. В докладе рассматривается проблема интегрирования нормальных экстремалей для следующего обобщения задачи Дидоны [1]. Пусть на плоскости даны две точки (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, соединенные гладкой кривой γ_0. Требуется соединить эти точки другой гладкой кривой γ минимальной длины, такой, чтобы область D, ограниченная γ_0 и γ имела фиксированные площадь S, центр тяжести c и центр момента инерции M.

Алгебраическая формулировка. Пусть $L = \operatorname{span}(X_1, X_2, \dots, X_8)$ — свободная нильпотентная алгебра Ли, порожденная генераторами X_1 и X_2 глубины 4, заданная следующей таблицей умножения: $[X_1, X_2] = X_3$; $[X_1, X_3] = X_4$, $[X_2, X_3] = X_5$; $[X_1, X_4] = X_6$, $[X_1, X_5] = [X_2, X_4] = X_7$, $[X_2, X_5] = X_8$.

Рассмотрим многообразие M и введем на нем такую структуру простой связаной группы Ли G с алгеброй Ли L (свободной группы Карно с вектором роста $(2,3,5,8)$), чтобы поля X_i, $i = \overline{1,8}$, образовывали левоинвариантный репер на M. Другими словами, введем на M плоскую (или горизонтальную) субримановую структуру (G, Δ, g) :

$$\Delta_q = \operatorname{span}(X_1(q), X_2(q)), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}.$$

Т. е. Δ — распределение ранга 2, или поле двумерных плоскостей в касательных пространствах, порожденных X_1 и X_2, а g — квадратичная форма на этом распределении, ортонормирующая $X_1, X_2, \dots, X_8$ (скалярное произведение).

Тогда наша задача — это задача о соединении точек $q_0, q_1 \in G$ минимальной в субримановой метрики плоской кривой q (геодезией):

$$q(t) \in G, \quad q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad \dot q(t) \in \Delta_{q(t)}, \quad l = \int_0^{t_1} \sqrt{g(\dot q, \dot q)}\, dt \to \min.$$

Эквивалетная задача оптимального управления следует из замечания, что алгебра Ли L реализуется полиномиальными векторными полями, если положить в качестве генераторов, например [2],

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{1}{2} x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_4} + x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{1}{6} x_1^3 \frac{\partial}{\partial x_6} - \frac{1}{2} x_1^2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{1}{2} x_1 x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_8}.$$

Задача оптимального управления. Для данных точек $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^8$ найти такую кривую $q(t) \in \mathbb{R}^8$, что $q(0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$ и

$$\dot q(t) = u_1(t) X_1(q(t)) + u_2(t) X_2(q(t)), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2)\, dt \to \min.$$

1. Уравнение нормальных экстремалей. Рассмотрим линейные на слоях кокасательного расслоения T^*G гамильтонианы, соответствующие полям X_i :

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle, \quad \lambda \in T^*G, \quad i = \overline{1,8}.$$

Следуя [3], сформулируем необходимое условие оптимальности в геометрической постановке.

Теорема (принцип максимума Понтрягина). *Пусть q_t и $u(t)$, $t \in [0,1]$ являются оптимальной траекторией и соответствующим оптимальным управлением. Тогда существует нетривиальная пара $(\nu, \lambda_t) \neq 0$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\lambda_t \in T^*_{q_t} G$, для которой выполнены условия $\dot\lambda_t = \vec h_{u(t),\nu}(\lambda_t) = u_1(t) \vec{h_1}(\lambda_t) + u_2(t) \vec{h_2}(\lambda_t)$, $h_{u(t),\nu}(\lambda_t) = \max\limits_{u \in \mathbb{R}^2} h_{u,\nu}(\lambda_t)$, $t \in [0,1]$, $\nu \leqslant 0$.*

Кривая $\lambda_t \in T^*G$ называется *экстремалью*, а ее проекция $q_t = \pi(\lambda_t) \in G$ — *субримановой геодезией.* В случае, если оптимальное $\nu \neq 0$ (тогда можно считать, что $\nu = -1$), экстремаль называют *нормальной*, в противном случае — *анормальной.*

Из принципа максимума Понтрягина для нормальный экстремалей, расписывая условие $\dot\lambda_t = \vec h_{u(t),\nu}(\lambda_t)$ на слоях T^*G, имеем систему:

$$\dot h_1 = -h_2 h_3, \quad \dot h_2 = h_1 h_3, \quad \dot h_3 = h_1 h_4 + h_2 h_5,$$

$$\dot h_4 = h_1 h_6 + h_2 h_7, \quad \dot h_5 = h_1 h_7 + h_2 h_8, \quad \dot h_6 = \dot h_6 = \dot h_8 = 0$$

с нормальным гамильтонианом $H = (h_1^2 + h_2^2)/2$.

2. Об интегрировании по Лиувиллю нормального гамильтонова поля $\vec{H}$.

Как известно из теоремы Нетер, если функция Гамильтона H, заданная на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω^2), выдерживает каноническую однопараметрическую группу преобразований, заданную гамильтонианом F, то F — первый интеграл системы с функцией Гамильтона H.

Значит, для того, чтобы фазовые потоки с функциями Гамильтона H_1 и H_2 коммутировали между собой, необходимо и достаточно, чтобы скобка Пуассона функций H_1 и H_2 была (локально) постоянной.

Таким образом, как отмечает В. И. Арнольд [4], *зная поток, коммутирующий с исследуемым, можно построить первый интерграл.* Это составляет основную идею вывода законов сохранения нормального гамильтонова поля $\vec{H}$.

Данная задача тесно связана с построением полной системы полиномиальных интегралов на группах Ли, рассматривавшейся в работах Мищенко, Фоменко и Милованова [5, 6]. Однако в нашем случае требуется, чтобы гамильтониан H входил в эту систему из 8 интегралов.

Утверждение 1. *Если интеграл f гамильтониана H не зависит от h_3, то* $f = f(H, h_6, h_7, h_8)$.

Гипотеза. *Пусть интеграл f гамильтониана H полиномиален по h_3. Тогда* $f = f(H, C, h_6, h_7, h_8)$.

Здесь и далее, $C = h_5^2 h_6 - 2h_4h_5h_7 - 2h_3(h_6h_8 - h_7^2)$ — функция Казимира, т. е. $\{C, h_i\} = 0$ для всех $i = \overline{1,8}$.

Утверждение 2. *Если интеграл f — полином по h_3 степени не выше 4, то* $f = f(H, C, h_6, h_7, h_8)$.

В общем случае проблема интегрируемости по Лиувиллю остается открытой.

Литература

1. Gauthier J.-P., Sachkov. Yu. L. *On the free Carnot $(2, 3, 5, 8)$ group* // Program systems: theory and applications. 2015. Vol. 6. No. 2. P. 45–61.

2. Grayson M., Grossman R. *Models for free nilponent Lie algerbras* // J. Algebra. 1988. Vol. 35. P. 177–191.

3. Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. *Геометрическая теория управления.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

4. Арнольд В. И. *Математические методы классической механики.* М.: Наука, 1988.

5. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Обобщенный метод Лиувилля интергирования гамильтоновых систем* // Функц. анализ и его приложения. 1978. Т. 12. № 2. С. 46–56.

6. Милованов М. В. *Интегрируемость разрешимых алгебр Ли* // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 5. С. 45–92.

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ И ФУНКЦИИ СОБОЛЕВА

Е.М. Радыно, Я.В. Радыно

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
yauhen.radyna@gmail.com, radyno@bsu.by

Классическое определение пространства Соболева на действительной прямой таково:

$$W^{p,k}(\mathbb{R}) = \{u \in L^p(\mathbb{R}) : u^{(k)} \in L^p(\mathbb{R})\}, \quad p \geqslant 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Перейдя к Фурье-образам, перепишем данное определение в виде

$$W^{p,k}(\mathbb{R}) = \{u \in L^p(\mathbb{R}) : |\xi|^k \mathcal{F}u \in \mathcal{F}L^p(\mathbb{R})\},$$