Таблица 3

В.Л. ТИМОХОВИЧ, Д.С. ФРОЛОВА

ОБ ИНФИМАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ

The subject of the study is a family of different topologies on the set of continuous maps $C(X, Y)$ with metrizable Y, especially the topologies of uniform convergence $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$ and the topology $\tau_{\inf}^{(X,Y)}$ determined as the infimum of all topologies of the type $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$ ($\mu=\mu(\rho)$ – the metric of uniform convergence generated by an admissible metric ρ on Y).

Necessary and sufficient conditions for consistency of topology $\tau_{\inf}^{(X,Y)}$ with the metric of uniform convergence were established.

Theorem (3.3). If Y is locally compact and second-countable, then $\tau_{\inf}^{(X,Y)} = \tau_{\mu(\rho_*)}^{(X,Y)}$ for some metric ρ_* on Y. At that, the metric ρ_* can be chosen so that the completion $(\tilde{Y}, \rho_*)$ is compact with a one-point remainder $\tilde{Y} \setminus Y$.

Theorem (3.4). Let the space Y is locally transitive moveable and DC-connected and the closure $[f(X)]_Y$ of the set $f(X)$ is not compact for some $f \in C(X, Y)$. Then if $\tau_{\inf}^{(X,Y)} = \tau_{\mu_*}^{(X,Y)}$, where $\mu_* = \mu(\rho_*)$, then the space Y is locally compact and second-countable, and the metric ρ_* admits a compact completion $(\tilde{Y}, \rho_*)$ with a one-point remainder $\tilde{Y} \setminus Y$.

Рассматривается множество непрерывных отображений $C(X, Y)$ топологического пространства X в метризуемое топологическое пространство Y и на нем топология $\tau_{\inf}^{(X,Y)}$ – наибольшая по включению, содержащаяся во всех топологиях равномерной сходимости. В случае не компактного пространства Y устанавливаются достаточное, а также (при некоторых дополнительных ограничениях) необходимое условия «достижения инфимума», т. е. согласованности топологии $\tau_{\inf}^{(X,Y)}$ с некоторой метрикой равномерной сходимости (теоремы 3.3 и 3.4 соответственно). Основные результаты следующие:

1) (Теорема 3.3). Если пространство Y локально компактно и со счетной базой, то топология $\tau_{\inf}^{(X,Y)}$ согласуется с метрикой равномерной сходимости, порожденной некоторой допустимой метрикой ρ_* на Y, относительно которой пополнение метрического пространства (Y,ρ_*) – компакт с одноточечным наростом.

2) (Теорема 3.4). Пусть замыкание $[f(X)]_Y$ множества $f(X)$ не компактно для некоторого $f\in C(X, Y)$ (нетривиальный случай, см. теорему 3.1), а пространство Y локально транзитивно подвижно (определение 2.2) и DC-связано (определение 2.7). Тогда если топология $\tau_{\inf}^{(X,Y)}$ согласуется с метрикой равномерной сходимости, порожденной допустимой метрикой ρ_* на Y, то пространство Y локально компактно и со счетной базой, а пополнение метрического пространства (Y,ρ_*) – компакт с одноточечным наростом.

Статья тематически является продолжением работ авторов [1–3]. Под пространством следует понимать топологическое T_1-пространство, под отображением – непрерывное отображение.

1. Основные понятия и обозначения. Для произвольных пространства X, множества $A\subset X$ и точки $x\in X$ обозначим: τ_X и φ_X – топология пространства X и семейство всех замкнутых в X множеств соответственно, $\tau_X(A)=\{U\in\tau_X \mid U\supset A\}$ ($\tau_X(x)$ при $A=\{x\}$), $[A]_X$ – замыкание множества A в X. Если ρ – допустимая метрика на X, то $B_\rho(x,\varepsilon)$ – ε-окрестность точки x, $(\tilde{X},\rho)$ – пополнение метрического пространства (X, ρ) (метрику на $\tilde{X}$, а также на любом $A\subset X$ обозначаем тем же символом ρ). Семейство α некоторых множеств в пространстве X называют дискретным в X, если для любой точки $x\in X$ найдется окрестность, пересекающаяся не более чем с одним элементом α. Множество A дискретно в X, если дискретно в X семейство $\{\{a\}\mid a\in A\}$. Пространство X называют псевдокомпактным [4, с. 310], если каждая непрерывная функция на X ограничена; коллективно нормальным [4, с. 452], если любое дискретное в X семейство $\{F_t\in\varphi_X \mid t\in T\}$ допускает дискретное в X семейство окрестностей $\{U_t\in\tau_X(F_t)\mid t\in T\}$. Каждый паракомпакт, в частности любое метризуемое пространство, коллективно нормален [4, с. 453].

2. Предварительные рассмотрения.

2.1. *Определение.* [1] Пространство X назовем локально подвижным, если для любых точки $x\in X$ и окрестности $U\in\tau_X(x)$ найдется отображение $f\in C(X, X)$ такое, что $f(U)\subset U$, $f(y) = y$ при $y\in X\setminus U$ и $f(x)\neq x$.

2.2. *Определение.* Пару (U, V) открытых в X множеств назовем отмеченной, если $\varnothing\neq V\subset U$ и для любой упорядоченной пары (x, y) точек множества V найдется отображение $f\in C(X, X)$, для которого $f(U)\subset U$, $f(z) = z$ при $z\in X\setminus U$ и $f(x) = y$. Скажем, что пространство X локально транзитивно подвижное, если для любых точки $x\in X$ и окрестности $U\in\tau_X(x)$ можно подобрать окрестность $V\in\tau_X(x)$ так, чтобы пара (U, V) была отмеченной.

Очевидно, что любое локально транзитивно подвижное пространство без изолированных точек локально подвижно. Можно также показать, что локально транзитивно подвижным является любое локально выпуклое топологическое векторное пространство.

2.3. *Утверждение.* Если пространство X локально транзитивно подвижное, то для любых непустого компактного и связного множества $F\subset X$ и окрестности $U\in\tau_X(F)$ можно указать окрестность $V\in\tau_X(F)$ такую, что пара (U, V) будет отмеченная.

Доказательство. Компактность множества F позволяет выбрать открытые в X множества $V_1,\ldots,V_n$ так, чтобы $F\subset\bigcup_{i=1}^{n}V_i\subset U$, а также $V_i\cap F\neq\varnothing$ и пара (U, V_i) была отмеченной для каждого i, $1\le i\le n$. Обозначим $V=\bigcup_{i=1}^{n}V_i$. Покажем, что пара (U, V) отмеченная. Фиксируем произвольно упорядоченную пару (x, y) точек множества V. Пусть $x\in V_{i_0}$. Определим $W_0=V_{i_0}$ и далее полагаем $W_k=\bigcup\{V_i \mid V_i\cap W_{k-1}\neq\varnothing\}$, $k\in\mathbf{N}$. Очевидно, что $W_{m+1}=W_m$ для некоторого $m\in\mathbf{N}$. Но тогда соотношение $V_i \bigcap W_m \neq \varnothing$ влечет $V_i \subset W_m$, и, следовательно, $V = W_m \bigcup H$, где $H = \bigcup \{V_i \mid V_i \bigcap W_m = \varnothing\}$. Ясно, что $W_m \bigcap H = \varnothing$, откуда $H = \varnothing$ в силу связности *F*. Выберем наименьшее *p*, для которого $W_p \ni y$. Построение множеств W_k позволяет выбрать последовательности множеств $V_{i_0}, ..., V_{i_p}$ и точек $x_0, ..., x_{p+1}$, где $x_0 = x$, $x_{p+1} = y$ и каждое множество V_{i_j} содержит точки x_j, x_{j+1}. Для каждой пары точек (x_j, x_{j+1}) подберем отображение $f_j \in C(X, X)$, для которого $f_j(U) \subset U$, $f_j(z) = z$ при $z \in X \setminus U$ и $f_j(x_j) = x_{j+1}$. Рассмотрим композицию $f = f_p \circ ... \circ f_0$. Соотношения $f(U) \subset U$, $f(z) = z$ при $z \in X \setminus U$ и $f(x) = y$ очевидны. Утверждение доказано.

2.4. *Утверждение.* Пусть пространство *X* метризуемо. Тогда для любых дискретного в *X* семейства $\{\varnothing \neq F_n \in \varphi_X \mid n \in \mathbf{N}\}$ и последовательности чисел ε_n, где $0 < \varepsilon_n < 1$ для каждого $n \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, найдется допустимая метрика σ на *X* такая, что $\sigma(x, y) \leq 1$ для любых $x, y \in X$ и $\sigma(x, y) \leq \varepsilon_n$ при $\{x, y\} \subset F_n$, $n \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Фиксируем допустимую метрику ρ на *X* такую, что $\rho(x, y) \leq 1$ для любых $x, y \in X$, и положим $\sigma(x, y) = 1$ при $x \in F_i$, $y \in F_j$, $i \neq j$, $\sigma(x, y) = \varepsilon_n \rho(x, y)$ при $\{x, y\} \subset F_n$, $n \in \mathbf{N}$. Метрика σ определена на замкнутом подпространстве $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ и согласуется с его топологией. В силу известной теоремы Хаусдорфа ([5], см. также [4, с. 439]) метрику σ можно продолжить на все пространство *X*, не нарушая согласованности с топологией и условия $\sigma(x, y) \leq 1$. Утверждение доказано.

2.5. Утверждение. Для не компактного пространства *X* эквивалентны условия: 1) *X* допускает метрику ρ, при которой пополнение $(\tilde{X}, \rho)$ – компакт с одноточечным наростом $\tilde{X} \setminus X$; 2) *X* – локально компактное хаусдорфово пространство со счетной базой.

Доказательство. Доказательство $1) \Rightarrow 2)$ следует из наличия счетной базы в любом метризуемом компакте [4, с. 386]. Для доказательства $2) \Rightarrow 1)$ рассмотрим александровскую компактификацию αX пространства *X*, $\alpha X = X \bigcup \{\xi\}$. Поскольку при переходе от *X* к αX вес не возрастает [4, с. 261], компакт αX тоже со счетной базой, и, следовательно, он метризуем некоторой метрикой ρ. Ясно, что метрическое пространство $(\alpha X, \rho)$ – искомое пополнение. Утверждение доказано.

2.6. *Утверждение.* Если пространство *X* допускает метрики ρ_1 и ρ_2 и для точек $x_n \in X$ и $y_n \in X$ для любого $n \in \mathbf{N}$ выполняются неравенства $\rho_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ и $\rho_2(x_n, y_n) \geq \varepsilon$ $(\varepsilon = \mathrm{const}, \varepsilon > 0)$, то для некоторой последовательности номеров n_i, $n_1 < n_2 < ...$, множества $\{x_{n_i} \mid i \in \mathbf{N}\}$ и $\{y_{n_i} \mid i \in \mathbf{N}\}$ дизъюнктны и дискретны в *X*.

Доказательство. Положим $n_1 = 1$. Рассуждая от противного, можно показать, что найдется $n_2 > n_1$, для которого $\{x_{n_1}, y_{n_1}\} \bigcap \left(\{x_k \mid k \geq n_2\} \bigcup \{y_k \mid k \geq n_2\}\right) = \varnothing$. Продолжая по индукции, выберем множества $A = \{x_{n_i} \mid i \in \mathbf{N}\}$ и $B = \{y_{n_i} \mid i \in \mathbf{N}\}$, $1 = n_1 < n_2 < ...$, таким образом, что $x_{n_i} \neq x_{n_j}$, $y_{n_i} \neq y_{n_j}$ и $x_{n_i} \neq y_{n_j}$ при $i \neq j$. Несложная проверка дискретности в *X* множеств *A* и *B* завершает доказательство.

2.7. *Определение.* Пространство *X* назовем DC-связанным, если для любых бесконечных дизъюнктных и дискретных в *X* множеств *A* и *B* найдется дискретное в *X* семейство $\{F_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, где $F_n \bigcap A \neq \varnothing, F_n \bigcap B \neq \varnothing$ и F_n компактно и связно для каждого $n \in \mathbf{N}$.

Отметим, что пространство $\mathbf{R}^n$ DC-связано при $n \geq 2$.

3. Основные результаты. Здесь и далее *Y* – метризуемое пространство, Ω_Y – множество всех допустимых метрик на *Y*. Для каждой метрики $\rho \in \Omega_Y$ на множестве *C*(*X*, *Y*) определена топология равномерной сходимости $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$, заданная метрикой $\mu = \mu(\rho)$, $\mu(f, g) = \sup\left\{\rho\left(f(x), g(x)\right) \mid x \in X\right\}$ (здесь допускается $\mu(f, g) = \infty$, что, очевидно, не влияет на топологию). Обозначим $\tau_{\mathrm{inf}}^{(X,Y)} = \bigcap \{\tau_{\mu(\rho)}^{(X,Y)} \mid \rho \in \Omega_Y\}$. Очевидно, что топология $\tau_{\mathrm{inf}}^{(X,Y)}$ – инфимум множества $\{\tau_{\mu(\rho)}^{(X,Y)} \mid \rho \in \Omega_Y\}$ в частично упорядоченном по включению множестве всех T_1-топологий на *C*(*X*, *Y*). Поскольку любая топология вида $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$ содержит топологию поточечной сходимости $\tau_{\mathrm{p}}^{(X,Y)}$, которая в данном случае вполне регулярна [4, с. 173], то и $\tau_{\inf}^{(X,Y)} \supset \tau_{p}^{(X,Y)}$, откуда следует, что $\tau_{\inf}^{(X,Y)}$, по крайней мере, хаусдорфова. Исследуем возможность совпадения $\tau_{\inf}^{(X,Y)}$ с некоторой топологией $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$. Известно следующее.

3.1. Теорема (*[1, теорема 5.8, лемма 5.6]*). *Для совпадения всех топологий вида* $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$ *(тривиальный случай) достаточно, а в случае локально подвижного пространства Y и необходимо, чтобы множество* $[f(X)]_Y$ *было компактно для любого f∈C(X, Y).*

3.2. Теорема (*[3, теорема 4]*). *Пусть пространство X вполне регулярно, Y линейно связно и локально подвижно. Тогда эквивалентны условия: а) все топологии вида* $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$ *совпадают; б) X псевдокомпактно или Y компактно.*

Далее считаем, что пространство *Y* не компактно.

3.3. Теорема. *Если пространство Y локально компактно и со счетной базой, то* $\tau_{\inf}^{(X,Y)} = \tau_{\mu(\rho_*)}^{(X,Y)}$ *для некоторой метрики* $\rho_* \in \Omega_Y$. *При этом метрику* ρ_* *можно подобрать так, что пополнение* $(\tilde{Y},\rho_*)$ *– компакт с одноточечным наростом* $\tilde{Y} \setminus Y$.

Доказательство. Метрика $\rho_* \in \Omega_Y$, допускающая указанное пополнение, существует в силу 2.5. Теперь достаточно показать, что для любых *f*∈*C*(*X*, *Y*), $\rho \in \Omega_Y$ и $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, для которого $B_{\mu_*}(f,\varepsilon) \supset B_{\mu}(f,\delta)$, где $\mu_* = \mu(\rho_*)$, $\mu = \mu(\rho)$. Допустим противное. Тогда можно указать *f*∈*C*(*X*, *Y*), метрику $\rho \in \Omega_Y$, отображения g_n∈*C*(*X*, *Y*) и точки $x_n \in X$ таким образом, что $\rho_*(f(x_n), g_n(x_n)) > \frac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(f(x_n), g_n(x_n)) < \frac{1}{n}$ для любого *n*∈**N**. Утверждение 2.6 позволяет выбрать дизъюнктные и дискретные в *Y* множества $F = \{f(x_{n_i}) \mid i \in \mathbf{N}\}$ и $G = \{g_{n_i}(x_{n_i}) \mid i \in \mathbf{N}\}$, где $n_1 < n_2 < \ldots$. Обозначим $\tilde{Y} \setminus Y = \{\xi\}$ и для произвольного $\delta > 0$ рассмотрим открытый в $\tilde{Y}$ шар $B_{\rho_*}(\xi,\delta)$. Поскольку множество $Y \setminus B_{\rho_*}(\xi,\delta)$ компактно, множества $F \setminus B_{\rho_*}(\xi,\delta)$ и $G \setminus B_{\rho_*}(\xi,\delta)$ конечны. Но тогда шар $B_{\rho_*}(\xi,\frac{\varepsilon}{4})$ содержит все точки $f(x_{n_i})$ и $g_{n_i}(x_{n_i})$, начиная с некоторого номера n_m, что противоречит первому из двух неравенств выше. Теорема доказана.

Замечание. В 3.3 фактически доказано, что равенство $\tau_{\inf}^{(X,Y)} = \tau_{\mu(\rho_*)}^{(X,Y)}$ выполняется для любой метрики $\rho_* \in \Omega_Y$, допускающей указанное пополнение.

Обращение теоремы 3.3 (в нетривиальном случае, см. 3.1) докажем при некоторых дополнительных ограничениях.

3.4. Теорема. *Пусть пространство Y локально транзитивно подвижно и* DC-*связано и множество* $[f(X)]_Y$ *не компактно для некоторого f∈C(X, Y). Тогда если* $\tau_{\inf}^{(X,Y)} = \tau_{\mu_*}^{(X,Y)}$, *где* $\mu_* = \mu(\rho_*)$, $\rho_* \in \Omega_Y$, *то пространство Y локально компактно и со счетной базой, а метрика* ρ_* *допускает компактное пополнение* $(\tilde{Y},\rho_*)$ *с одноточечным наростом* $\tilde{Y} \setminus Y$.

Доказательство. Доказательство проведем в несколько этапов.

а). Пусть множества *A* и *B* бесконечны, дизъюнктны и дискретны в *Y*, причем $A \subset f(X)$. Покажем, что $\rho_*(A,B) = 0$. Допустим от противного, что при некотором $\varepsilon > 0$ имеем $\rho_*(a,b) \geq \varepsilon$ для любых $a \in A$, $b \in B$. Используя DC-связанность пространства *Y* выберем дискретное в *Y* семейство связных компактных множеств F_n и точки $a_n = f(x_n) \in A \cap F_n$ и $b_n \in B \cap F_n$, $n \in \mathbf{N}$. Коллективная нормальность пространства *Y* позволяет раздуть множества F_n до дискретного в *Y* семейства окрестностей $\{U_n \in \tau_Y(F_n) \mid n \in \mathbf{N}\}$. Вследствие 2.3 и 2.4 найдутся семейство окрестностей $\{V_n \in \tau_Y(F_n) \mid n \in \mathbf{N}\}$, метрика $\sigma \in \Omega_Y$ и отображения $h_n \in C(Y,Y)$ такие, что $[V_n]_Y \subset U_n$, $\sigma(y,z) < \frac{1}{n}$ при $\{y,z\} \subset [V_n]_Y$, $h_n(V_n) \subset V_n$, $h_n(z) = z$ при $z \in Y \setminus V_n$ и $h_n(a_n) = b_n$, *n*∈**N**. Определим отображения $f_n = h_n \circ f$, *n*∈**N**, и рассмотрим метрику $\mu = \mu(\sigma)$ на множестве *C*(*X*, *Y*). Очевидно, что при любом *n*∈**N** выполняются неравенства $\mu(f,f_n) \leq \frac{1}{n}$ и $\mu_*(f,f_n) \geq \varepsilon$, что противоречит соотношению $\tau_{\mu_*}^{(X,Y)} \subset \tau_{\mu}^{(X,Y)}$.

б). Покажем, что метрическое пространство $(f(X),\rho_*)$ вполне ограничено. Если допустить противное, то найдутся $\varepsilon>0$ и точки $y_n\in f(X)$ такие, что $\rho_*(y_n,y_k)\geq\varepsilon$ при $n\neq k$. Положив $A=\{y_{2n-1}\mid n\in\mathbf{N}\}$ и $B=\{y_{2n}\mid n\in\mathbf{N}\}$ и заметив, что $\rho_*(A,B)\geq\varepsilon$, приходим к противоречию с а).

в). Обозначим $P=f(X)$. Вследствие б) пополнение $(\tilde{P},\rho_*)$ компактно [4, с. 409]. Но поскольку $\tilde{P}=[P]_{\tilde{Y}}$, а $[P]_Y$ не компактно, то $\tilde{P}\bigcap(\tilde{Y}\setminus Y)\neq\varnothing$. Фиксируем некоторую точку $\xi\in\tilde{P}\bigcap(\tilde{Y}\setminus Y)$ и допустим, что существует точка $\eta\in\tilde{Y}\setminus Y$, $\rho_*(\xi,\eta)=\varepsilon>0$. Но тогда можно выбрать точки $a_n=f(x_n)\in P$ и $b_n\in Y$, $n\in\mathbf{N}$, так, чтобы $a_n\neq a_k$ и $b_n\neq b_k$ при $n\neq k$, $\rho_*(\xi,a_n)<\dfrac{\varepsilon}{4n}$ и $\rho_*(\eta,b_n)<\dfrac{\varepsilon}{4n}$ для любого $n\in\mathbf{N}$. Множества $A=\{a_n\mid n\in\mathbf{N}\}$ и $B=\{b_n\mid n\in\mathbf{N}\}$, очевидно, дискретны в Y и $\rho_*(A,B)\geq\dfrac{\varepsilon}{2}$, что противоречит а). Итак, $\tilde{Y}\setminus Y=\{\xi\}$.

г). Докажем компактность пополнения $\tilde{Y}=Y\bigcup\{\xi\}$. Допустим от противного, что существует бесконечное дискретное в $\tilde{Y}$ множество B. Как показано в в), множество $\tilde{P}=[P]_Y\bigcup\{\xi\}$ компактно, и, следовательно, можно считать, что $B\subset Y$ и $\rho_*([P]_Y,B)=\varepsilon>0$. Поскольку по условию множество $[P]_Y$ не компактно, можно выделить бесконечное дискретное в Y множество $A\subset P$. Очевидное соотношение $\rho_*(A,B)\geq\varepsilon$ противоречит а). Обращение к 2.5 завершает доказательство.

3.5. Пример. В качестве комментария к теореме 3.3 представляется интересным следующий пример. Пусть $X=\mathbf{R}$ (с обычной евклидовой топологией), $Y=]-\pi,\pi[$, ρ и ρ_* – метрики на Y, $\rho(x,y)=|x-y|$, $\rho_*(x,y)=\min\{|x-y|,2\pi-|x-y|\}$ ($\rho_*(x,y)$ – длина меньшей из дуг окружности $\{z\in\mathbf{C}\,\|\,z|=1\}$, соединяющих точки e^{ix} и e^{iy}). Пополнение для (Y,ρ) – отрезок $[-\pi;\pi]$ (нарост двухточечный), для (Y,ρ_*) – окружность (нарост одноточечный). Однако $\tau_{\inf}^{(X,Y)}=\tau_{\mu}^{(X,Y)}=\tau_{\mu_*}^{(X,Y)}$ ($\mu=\mu(\rho)$, $\mu_*=\mu(\rho_*)$). Действительно, если допустить противное, т. е. $\tau_{\mu}^{(X,Y)}\supset\tau_{\mu_*}^{(X,Y)}$, но $\tau_{\mu}^{(X,Y)}\neq\tau_{\mu_*}^{(X,Y)}$, то можно выбрать $\varepsilon>0$, $f\in C(X,Y)$, отображения $g_n\in C(X,Y)$ и точки $x_n\in X$ так, чтобы $\rho_*(f(x),\ g_n(x))<\dfrac{1}{n}$ и $\rho(f(x_n),\ g_n(x_n))\geq\varepsilon$ для любых $x\in X$, $n\in\mathbf{N}$. В силу 2.6 можно считать, что множества $\{f(x_n)\mid n\in\mathbf{N}\}$ и $\{g_n(x_n)\mid n\in\mathbf{N}\}$ дизъюнктны и дискретны в Y. Далее можем считать, что $\varepsilon<\pi$, каждая из последовательностей $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ и $(g_n(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится монотонно к π или к $-\pi$ и лежит в интервале $]\pi-\dfrac{\varepsilon}{2};\pi[$ или $]-\pi;-\pi+\dfrac{\varepsilon}{2}[$. В силу второго из неравенств никакие точки $f(x_n)$ и $g_k(x_k)$ не лежат обе в одном из этих интервалов. Таким образом, можно считать, что $f(x_n)>\pi-\dfrac{\varepsilon}{2}$ и $g_n(x_n)<-\pi+\dfrac{\varepsilon}{2}$ для любого $n\in\mathbf{N}$. Обозначим $\delta=\min\{\pi-f(x_1),f(x_1)-\pi+\dfrac{\varepsilon}{2}\}$ и подберем $p\in\mathbf{N}$, для которого $\rho_*(f(x_1),g_p(x_1))<\delta$. Ясно, что $g_p(x_1)>\pi-\dfrac{\varepsilon}{2}$, следовательно, $|f(x_1)-g_p(x_1)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ и $f(x_p)-g_p(x_p)>2\pi-\varepsilon$, откуда $|f(x_0)-g_p(x_0)|=\pi$ для некоторой $x_0\in X$. Но тогда $\rho_*(f(x_0),g_p(x_0))=\pi$, что противоречит первому из неравенств.

Отметим, что если, оставляя остальное неизменным, положить $X=\mathbf{R}\setminus\mathbf{N}$, то получим по-прежнему $\tau_{\inf}^{(X,Y)}=\tau_{\mu_*}^{(X,Y)}$, но уже $\tau_{\mu_*}^{(X,Y)}\neq\tau_{\mu}^{(X,Y)}$. Достаточно рассмотреть отображения $f(x)=2\,\mathrm{arctg}x$ и $g_n(x)=\mathrm{sgn}(n-x)f(x)$.

1. Тимохович В.Л., Фролова Д.С. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 3. С. 84.
2. Кукрак Г.О., Тимохович В.Л. // Там же. 2010. № 1. С. 144.
3. Фролова Д.С. // Там же. 2011. № 1. С. 116.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986.
5. Hausdorff F. // Fund. Math. 1930. P. 353.

Поступила в редакцию 30.12.10.

Владимир Леонидович Тимохович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики.

Дарья Сергеевна Фролова – аспирант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики. Научный руководитель – В.Л. Тимохович.