УДК 517.5

В.Н. РУСАК, Н.В. ГРИБ

РАЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Exact on rational trigonometric functions of order at most $2n$ with fixed denominators Gaussian quadrature formulas are constructed. It is established that the error of these formulas can be defined trough best rational trigonometric approximation.

Квадратурные формулы, предназначенные для интегрирования периодических функций, хорошо приближаемых тригонометрическими полиномами, изучены достаточно полно [1, 2]. В данной работе рассматривается интерполяция периодических функций рациональными функциями и ее приложение к построению квадратурных формул типа Гаусса.

Пусть $|\alpha_k|<1,\ k=\overline{1,n},\ \pi_n(z)=\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}$ – произведение Бляшке. Поскольку $|\pi_n(z)|=1$ на единичной окружности, то выполняется равенство

$$\pi_n(e^{i\varphi})=e^{i\Phi_n(\varphi)}, \tag{1}$$

где $\Phi_n(\varphi)=\arg\pi_n(e^{i\varphi}),\ 0\le\Phi_n(0)=\arg\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}}<2\pi.$

Пользуясь равенством (1), нетрудно проверить, что

$$\Phi_n'(\varphi)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{\left(e^{i\varphi}-\alpha_k\right)\left(e^{-i\varphi}-\overline{\alpha_k}\right)}>0. \tag{2}$$

Следовательно, при изменении φ от 0 до 2π аргумент $\Phi_n(\varphi)+\varphi/2$ возрастает от $\Phi_n(0)$ до $\Phi_n(0)+(2n+1)\pi,$ соответственно $\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\varphi/2\right)$ имеет нули в точках φ_k,

$$0\le\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_{2n}<2\pi.$$

Непосредственно проверяется также с учетом (1) и формул Эйлера, что

$$\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{1}{2i}\frac{e^{\frac{i\varphi}{2}}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\alpha_k e^{-i\varphi}\right)\left(e^{i\varphi}-\alpha_k\right)-e^{-\frac{i\varphi}{2}}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\overline{\alpha_k}e^{i\varphi}\right)\left(e^{-i\varphi}-\overline{\alpha_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(e^{-i\varphi}-\overline{\alpha_k}\right)\left(e^{i\varphi}-\alpha_k\right)}=\frac{t_{n+1/2}(\varphi)}{h_n(\varphi)}, \tag{3}$$

где $t_{n+1/2}(\varphi)$ – тригонометрический полином полуцелого порядка $n+1/2$ с действительными коэффициентами, нулями которого являются точки $\{\varphi_k\}_{k=0}^{2n}$, $h_n(\varphi)=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(e^{-i\varphi}-\overline{\alpha_k}\right)\left(e^{i\varphi}-\alpha_k\right).$ В таком случае справедливо разложение [3]

$$t_{n+1/2}(\varphi)=C\prod_{k=0}^{2n}\sin\frac{\varphi-\varphi_k}{2}. \tag{4}$$

Заметим, что $\cos\left(\Phi_n(\varphi)+\varphi/2\right)$ также является функцией вида (3) с некоторым тригонометрическим полиномом полуцелого порядка в числителе и тем же знаменателем, причем выполняются равенства

$$\cos\left(\Phi_n(\varphi_k)+\frac{\varphi_k}{2}\right)=(-1)^k\cos\left(\Phi_n(\varphi_0)+\frac{\varphi_0}{2}\right).$$

Через $Q_{n,1}$ будем обозначать множество $\left\{t_n(x)/h_n(x)\right\}$ тригонометрических рациональных функций порядка не выше n с фиксированным знаменателем $h_n(x)$, соответственно через $Q_{n,2}$ обозначим множество $\left\{t_{2n}(x)/h_n^2(x)\right\}$ тригонометрических рациональных функций порядка не выше $2n$ с фиксированным знаменателем $h_n^2(x)$.

Для любой функции $f(\varphi)$ из пространства $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций построим интерполяционный рациональный оператор L_n, полагая

$$L_n(\varphi,f)=\sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k)l_{k,n}(\varphi),\;\; l_{k,n}(\varphi)=\frac{\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\dfrac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\Phi_n(\varphi_k)+\dfrac{\varphi_k}{2}\right)}{\sin\dfrac{\varphi-\varphi_k}{2}\left(1+2\Phi_n'(\varphi_k)\right)}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Введенный равенством* (5) *оператор* L_n

1) любую функцию $f\in C_{2\pi}$ *отображает в тригонометрическую рациональную функцию из* $Q_{n,1}$;

2) удовлетворяет условиям $L_n(\varphi_k,f)=f(\varphi_k),\; k=\overline{0,2n}$;

3) является точным на множестве $Q_{n,1}$.

Доказательство. В силу (4) при делении полуцелого тригонометрического полинома $t_{n+1/2}(\varphi)$ на $\sin(\varphi-\varphi_k)/2$ получим тригонометрический полином $t_{k,n}(\varphi)$ целого порядка *n*. Слагаемые $f(\varphi_k)l_{k,n}(\varphi)$ с учетом (3) отличаются лишь на константы от $t_{k,n}(\varphi)/h_n(\varphi)$, т. е. являются рациональными функциями порядка не выше *n* с одним и тем же знаменателем $h_n(\varphi)$. Следовательно, $\sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k)l_{k,n}(\varphi)\in Q_{n,1}$.

Из (4) и (5) ясно, что $l_{k,n}(\varphi_j)=0$, если $k\ne j$. Если же $k=j$, то по правилу Лопиталя

$$l_{j,n}(\varphi_j)=\lim_{\varphi\to\varphi_j} l_{j,n}(\varphi)=\lim_{\varphi\to\varphi_j}\frac{\cos\left(\Phi_n(\varphi)+\dfrac{\varphi}{2}\right)\left(\Phi_n'(\varphi)+\dfrac{1}{2}\right)\cos\left(\Phi_n(\varphi_j)+\dfrac{\varphi_j}{2}\right)}{\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\varphi-\varphi_j}{2}\left(1+2\Phi_n'(\varphi_j)\right)}=1.$$

В таком случае

$$L_n(\varphi_k,f)=\sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_j)l_{j,n}(\varphi_k)=\sum_{k\ne j}0+f(\varphi_k)\cdot 1=f(\varphi_k).$$

Если тригонометрическая рациональная функция $r_n(\varphi)\in Q_{n,1}$, то разность $r_n(\varphi)-L_n(\varphi,r_n)\in Q_{n,1}$ и обращается в нуль в точках φ_k, $k=\overline{0,2n}$, т. е. $r_n(\varphi)-L_n(\varphi,r_n)$ имеет $2n$+1 нуль на $[0,2\pi)$, поэтому $r_n(\varphi)-L_n(\varphi,r_n)\equiv 0$, так как тригонометрический полином порядка не выше *n* имеет не более $2n$ нулей в полуполосе $0\le \operatorname{Re} z<2\pi$.

На основании интерполяционного оператора (5) рассмотрим квадратурную формулу для $f\in C_{2\pi}$

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi\approx\sum_{k=0}^{2n}A_k f(\varphi_k),\;\; A_k=\int_0^{2\pi} l_{k,n}(\varphi)d\varphi. \tag{6}$$

Теорема 2. *Квадратурная формула* (6) *обладает свойствами:*

1) является точной для всякой тригонометрической рациональной функции $r_n\in Q_{n,1}$;

2) ее коэффициенты A_k, $k=\overline{0,2n}$, *положительны, причем*

$$A_k=\frac{2\pi}{2\Phi_n'(\varphi_k)+1},\; k=\overline{0,2n};$$

3) выполняется равенство $\sum_{k=0}^{2n}A_k=2\pi$.

Доказательство. Если $r_n\in Q_{n,1}$, то по теореме 1 $r_n(\varphi)=L_n(\varphi,r_n)$. Интегрируя это равенство, найдем

$$\int_0^{2\pi} r_n(\varphi)d\varphi=\int_0^{2\pi} L_n(\varphi,r_n)d\varphi=\sum_{k=0}^{2n} r_n(\varphi_k)\int_0^{2\pi} l_{k,n}(\varphi)d\varphi=\sum_{k=0}^{2n}A_k r_n(\varphi_k),$$

и таким образом первое свойство установлено.

Нам необходимо вычислить интеграл

$$I_k(e^{i\varphi_k})=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\sin\dfrac{\varphi-\varphi_k}{2}}d\varphi=e^{i\frac{\varphi_k}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(\Phi_n(\varphi)+\varphi)}-e^{-i\Phi_n(\varphi)}}{e^{i\varphi}-e^{i\varphi_k}}d\varphi.$$

При $|z|<1$ с учетом (1) будем иметь

$$I_k(z)=e^{i\frac{\varphi_k}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i(\Phi_n(\varphi)+\varphi)}-e^{-i\Phi_n(\varphi)}}{e^{i\varphi}-z}d\varphi=e^{i\frac{\varphi_k}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\pi_n(e^{i\varphi})e^{i\varphi}-\pi_n(e^{i\varphi})^{-1}}{e^{i\varphi}-z}\frac{de^{i\varphi}}{ie^{i\varphi}}=\frac{e^{i\frac{\varphi_k}{2}}}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\xi\pi_n(\xi)-\pi_n(\xi)^{-1}}{(\xi-z)\xi}d\xi. \quad (7)$$

Принимая во внимание, что $\int\limits_{|z|=1}\frac{\pi_n(\xi)}{\xi-z}d\xi=2\pi i\pi_n(z)$ по интегральной формуле Коши, а функция $\left((\xi-z)\xi\pi_n(\xi)\right)^{-1}$ не имеет особых точек в области $|\xi|>1$ и имеет на бесконечности нуль второго порядка, найдем из (7)

$$I_k(z)=2\pi e^{i\varphi_k/2}\pi_n(z).$$

Очевидно, что

$$I_k(e^{i\varphi_k})=\lim_{z\to e^{i\varphi_k}}I_k(z)=2\pi e^{i\frac{\varphi_k}{2}}\pi_n(e^{i\varphi_k})=2\pi e^{i\left(\Phi_n(\varphi_k)+\frac{\varphi_k}{2}\right)}=2\pi\cos\left(\Phi_n(\varphi_k)+\frac{\varphi_k}{2}\right).$$

С учетом этого равенства и соотношений (5) и (6) получим

$$A_k=\frac{\cos\left(\Phi_n(\varphi_k)+\frac{\varphi_k}{2}\right)}{2\Phi_n'(\varphi_k)+1}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\frac{\varphi_k}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi-\varphi_k}{2}}d\varphi=\frac{2\pi}{2\Phi_n'(\varphi_k)+1},\ k=\overline{0,2n},$$

и коэффициенты A_k положительны в силу (2).

Что касается третьего свойства, то достаточно заметить, что $r_n(x)\equiv 1\in Q_{n,1}$, и в силу точности квадратурной формулы на $Q_{n,1}$ найдем

$$\sum_{k=0}^{2n}A_k=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\pi.$$

Доказательство теоремы закончено.

Для функции $f\in C_{2\pi}$ определим наилучшее равномерное приближение тригонометрическими рациональными функциями из $Q_{n,2}$, полагая

$$R_{2n}^T(f)=\inf\left\{\|f-r_{2n}\|:r_{2n}\in Q_{n,2}\right\}.$$

Теорема 3. *Квадратурная формула (6) точна для рациональных функций из множества* $Q_{n,2}$ *и справедлива оценка для ее погрешности*

$$\left|\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi-\sum_{k=0}^{2n}A_kf(\varphi_k)\right|\le 4\pi R_{2n}^T(f). \quad (8)$$

Доказательство. Покажем, что любую тригонометрическую рациональную функцию $r_{2n}\in Q_{n,2}$ можно представить в виде

$$r_{2n}(\varphi)=\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right)\frac{t_{n-1/2}(\varphi)}{h_n(\varphi)}+\frac{t_n(\varphi)}{h_n(\varphi)}, \quad (9)$$

где $t_{n-1/2}(\varphi)$ – тригонометрический полином полуцелого порядка и рациональная функция $t_n(\varphi)/h_n(\varphi)\in Q_{n,1}$.

Действительно, пусть $L_n(\varphi,r_{2n})$ – значение интерполяционного оператора для функции r_{2n}, тогда $L_n(\varphi,r_{2n})=r_n(\varphi)=t_n(\varphi)/h_n(\varphi)$ и разность $r_{2n}(\varphi)-t_n(\varphi)/h_n(\varphi)$ обращается в нуль в точках $\{\varphi_k\}_{k=0}^{2n}$, поэтому

$$r_{2n}(\varphi)-\frac{t_n(\varphi)}{h_n(\varphi)}=\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right)\frac{t_{n-1/2}(\varphi)}{h_n(\varphi)},$$

что равносильно равенству (9).

Покажем теперь, что

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(\Phi_n(\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right)\frac{t_{n-1/2}(\varphi)}{h_n(\varphi)}d\varphi = 0. \tag{10}$$

Поскольку тригонометрический полином полуцелого порядка можно записать в виде

$$t_{n-1/2}(\varphi)=\sum_{j=1}^{n}\left(a_j e^{i(j-1/2)\varphi}+b_j e^{-i(j-1/2)\varphi}\right),$$

то равенство (10) будет следовать из соотношений

$$I_j=\int_0^{2\pi}\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right)\frac{e^{i(j-1/2)\varphi}}{h_n(\varphi)}d\varphi=0,\ \ j=\overline{1,n},$$

которые нужно доказать. Снова, пользуясь формулами Эйлера и переходя к комплексным переменным, будем иметь

$$I_j=\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\left(e^{i(\Phi_n(\varphi)+\varphi/2)}-e^{-i(\Phi_n(\varphi)+\varphi/2)}\right)\frac{e^{i(j-1/2)\varphi}}{h_n(\varphi)}d\varphi=\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\frac{\pi_n(e^{i\varphi})e^{i\varphi/2}-\pi_n(e^{i\varphi})^{-1}e^{-i\varphi/2}}{\prod_{k=1}^{n}\left(e^{i\varphi}-\alpha_k\right)\left(e^{-i\varphi}-\overline{\alpha_k}\right)}e^{i(j-1/2)\varphi}d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{|\xi|=1}\frac{\xi^{n+j-1}}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\overline{\alpha_k}\xi\right)^2}d\xi+\frac{1}{2}\int_{|\xi|=1}\frac{\xi^{n+j-2}}{\prod_{k=1}^{n}\left(\xi-\alpha_k\right)^2}d\xi=0,$$

поскольку в первом интеграле правой части подынтегральная функция аналитична в $|z|\le 1,$ а во втором аналитична в $|\xi|\ge 1$ и в бесконечно удаленной точке имеет нуль второго порядка.

Из (9), (10) и теоремы 2 следует, что

$$\int_0^{2\pi} r_{2n}(\varphi)d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{t_n(\varphi)}{h_n(\varphi)}d\varphi=\int_0^{2\pi} r_n(\varphi)d\varphi=\sum_{k=0}^{2n}A_k r_n(\varphi_k)=\sum_{k=0}^{2n}A_k r_{2n}(\varphi_k),$$

т. е. квадратурная формула (6) точна на множестве $Q_{n,2}$, иными словами, формула (6) является квадратурной формулой типа Гаусса.

Пусть $r_{2n}^{*}(\varphi)\in Q_{n,2}$ есть тригонометрическая рациональная функция наилучшего приближения для функции $f\in C_{2\pi}$, т. е. выполняется равенство

$$\left\|f-r_{2n}^{*}\right\|_{C_{2\pi}}=R_{2n}^{T}(f).$$

Для погрешности квадратурной формулы найдем

$$\left|\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi-\sum_{k=0}^{2n}A_k f(\varphi_k)\right|=\left|\int_0^{2\pi}\left(f(\varphi)-r_{2n}^{*}(\varphi)\right)d\varphi+\sum_{k=0}^{2n}A_k\left(r_{2n}^{*}(\varphi_k)-f(\varphi_k)\right)\right|\le$$

$$\le\int_0^{2\pi}\left|f(\varphi)-r_{2n}^{*}(\varphi)\right|d\varphi+\sum_{k=0}^{2n}A_k\left|r_{2n}^{*}(\varphi_k)-f(\varphi_k)\right|\le 4\pi R_{2n}^{T}(f).$$

Теорема 3 полностью доказана.

Заметим в заключение, что квадратурные формулы, предназначенные для интегрирования непериодических функций, хорошо приближаемых рациональными, рассматривались ранее в [4, 5].

1. Никольский С.М. Квадратурные формулы. М., 1974.
2. Турецкий А.Х. // Докл. АН БССР. 1960. Т. 4. № 9. С. 365.
3. Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах. Мн., 1968.
4. Ровба Е.А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001.
5. Русак В.Н., Филиппова Н.К. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2005. № 1. С. 6.

Поступила в редакцию 03.02.11.

Валентин Николаевич Русак – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и математической физики.

Николай Васильевич Гриб – аспирант кафедры математического анализа БГПУ им. Максима Танка. Научный руководитель – В.Н. Русак.