УДК 004.925.8

А.П. ПОБЕГАЙЛО

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПАРАМЕТРИЗОВАННЫХ КРИВЫХ НА ГРУППЕ ЛИ

Polynomials for deformation of parameterized curves on Lie groups are defined. It is shown how these polynomials can be used for deformation of orbits of one-parameter transformations. Then application of the proposed approach to construction of spline curves on a two-dimensional sphere is considered.

В статье рассмотрен подход к деформации параметризованных кривых на группе Ли. Показано применение предложенного подхода к построению сплайн-кривых на гладких многообразиях с использованием деформации орбит однопараметрических подгрупп, действующих на гладкое многообразие. В качестве примера рассмотрено построение сплайн-кривых на поверхности двумерной сферы. Деформация параметризованных кривых на группе Ли выполняется при помощи специального класса полиномов, которые удовлетворяют заданным граничным условиям. Выполнение этих условий обеспечивает нужную степень непрерывности сплайн-кривой на многообразии. Изложение материала базируется на статьях [1, 2], в которых определены рассматриваемые полиномы и доказаны их свойства. Сведения о группах Ли и гладких многообразиях можно найти в монографиях [3, 4]. Другие подходы к моделированию сплайн-кривых на гладких многообразиях и на поверхности двумерной сферы рассмотрены соответственно в работах [5–8] и [9–11]. Суть этих подходов заключается в использовании кривых, определенных в линейном пространстве, в которое вложено многообразие, и удовлетворяющих ограничениям, обеспечивающим принадлежность кривой многообразию, или использовании геодезических линий на многообразии. Сложность первого из этих подходов состоит в трудности гладкой стыковки сегментов сплайн-кривой на многообразии, так как в этом случае требуется учитывать дополнительные ограничения на кривую. Во втором случае геодезические линии на многообразии, как правило, не имеют точного аналитического представления и для их вычисления необходимы численные методы.

Сглаживающие полиномы

Введем следующие обозначения для полиномов Бернштейна:

$$b_{n,m}(u) = C_n^m (1-u)^{n-m} u^m, \quad u \in [0,1].$$

Определим класс полиномов

$$w_k(u) = \sum_{i=k+1}^{2k+1} b_{2k+1,i}(u), \quad u \in [0,1].$$

Из определения видно, что полиномы $w_k(u)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$w_k(0) = 0, \quad w_k(1) = 1, \quad w_k^{(l)}(0) = w_k^{(l)}(1) = 0$$

для всех $l \in \{1, \ldots, k\}$. Кроме того, эти полиномы обладают следующими свойствами, доказательство которых можно найти в [2].

Свойство 1. Для любых $k \in N$ справедливо равенство

$$w_k(u) + w_k(1-u) = 1$$

для любых значений $u \in [0,1]$.

Свойство 2. Для любых $k \in N$ полиномы $w_k(u)$ симметричны относительно точки $u = 1/2$.

Свойство 3.

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{1/2} w_k(u)du = 0.$$

Свойство 4. Для любого значения $k \in N$ полином $w_k(u)$ является минимумом функционала

$$J_{k+1}(f) = \int_0^1 | f^{(k+1)}(u) |^2 \, du,$$

где функция $f(u)$, $u \in [0,1]$, удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f^{(l)}(0) = f^{(l)}(1) = 0$$

для любого $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Из свойств 2 и 3 следует, что при повышении степени полином $w_k(u)$ неограниченно близко приближается к ступенчатой функции.

Деформация параметрических кривых на группе Ли

Рассмотрим произвольную мультипликативную группу Ли G. Обозначим через $g_1(u)$ и $g_2(u)$, $u \in [0,1]$, некоторые параметризованные кривые, которые принадлежат группе G и удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$g_1(0) = e, \quad g_2(0) = e, \tag{1}$$

где e обозначает единичный элемент группы G. Проблема состоит в том, чтобы построить такую параметризованную кривую $g(u) \in G$, $u \in [0,1]$, которая удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$g(0) = g_1(0), \quad g(1) = g_2(1), \tag{2}$$

$$g^{(l)}(0) = g_1^{(l)}(0), \quad g^{(l)}(1) = g_2^{(l)}(1) \tag{3}$$

для всех $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$, где $k \in N$. В этом случае параметризованная кривая $g(u)$ будет называться *деформацией параметризованных кривых* $g_1(u)$ и $g_2(u)$. Другими словами, параметризованная кривая $g(u)$ гладко деформируется из параметризованной кривой $g_1(u)$ в параметризованную кривую $g_2(u)$. Для решения этой проблемы используем сглаживающие полиномы $w_k(u)$. А именно при помощи этих полиномов для параметризованных кривых $g_1(u)$ и $g_2(u)$ определим новую параметризацию.

Определим полиномы

$$\tau_k^-(u) = (1 - w_k(u))u \tag{4}$$

для $k \in N$, $u \in [0,1]$. Из (4) видно, что полиномы $\tau_k^-(u)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\tau_k^-(0) = 0, \quad \tau_k^-(1) = 0 \tag{5}$$

с учетом граничных условий, которым удовлетворяют полиномы $w_k(u)$. Определим производные по параметру u от полиномов $\tau_k^-(u)$, получим

$$(\tau_k^-(u))' = -w_k'(u)u + (1 - w_k(u)),$$

$$(\tau_k^-(u))'' = -w_k''(u)u - w_k'(u) - w_k'(u) = -w_k''(u)u - 2w_k'(u),$$

$$(\tau_k^-(u))''' = -w_k'''(u)u - w_k''(u) - 2w_k''(u) = -w_k'''(u)u - 3w_k''(u)$$

и, следовательно,

$$(\tau_k^-(u))^{(l)} = -w_k^{(l)}(u)u - lw_k^{(l-1)}(u),$$

где $l \in \{2, 3, \ldots, k\}$. Из этих равенств следует, что производные от полиномов $\tau_k^-(u)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$(\tau_k^-(u))'(0) = 1, \quad (\tau_k^-(u))'(1) = 0; \tag{6}$$

$$(\tau_k^-(u))^{(l)}(0) = 0, \quad (\tau_k^-(u))^{(l)}(1) = 0 \tag{7}$$

для всех $l \in \{2, 3, \ldots, k\}$ с учетом граничных условий, которым удовлетворяют производные полиномов $w_k(u)$.

Теперь определим полиномы

$$\tau_k^+(u) = w_k(u)u \tag{8}$$

для $k \in N$, $u \in [0,1]$. Из (8) видно, что полиномы $\tau_k^+(u)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\tau_k^+(0) = 0, \quad \tau_k^+(1) = 1 \tag{9}$$

с учетом граничных условий, которым удовлетворяют полиномы $w_k(u)$. Определим производные по параметру u от полиномов $\tau_k^+(u)$, получим

$$(\tau_k^+(u))' = w_k'(u)u + w_k(u),$$

$$(\tau_k^+(u))'' = w_k''(u)u + w_k'(u) + w_k'(u) = w_k''(u)u + 2w_k'(u),$$

$$(\tau_k^+(u))''' = w_k'''(u)u + w_k''(u) + 2w_k''(u) = w_k'''(u)u + 3w_k''(u),$$

и, следовательно,

$$(\tau_k^+(u))^{(l)} = w_k^{(l)}(u)u + lw_k^{(l-1)},$$

где $l \in \{2, 3, \ldots, k\}$. Из этих равенств следует, что производные от полиномов $\tau_k^+(u)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$(\tau_k^+(u))'(0) = 0, \quad (\tau_k^+(u))'(1) = 1; \tag{10}$$

$$(\tau_k^+(u))^{(l)}(0) = 0, \quad (\tau_k^+(u))^{(l)}(1) = 0 \tag{11}$$

для всех $l \in \{2, 3, \ldots, k\}$ с учетом граничных условий, которым удовлетворяют производные полиномов $w_k(u)$.

Следующая теорема показывает, как с помощью полиномов $\tau_k^-(u)$ и $\tau_k^+(u)$ можно выполнить гладкую деформацию параметрических кривых на группе Ли.

Теорема. *Если* $g_1(u)$ *и* $g_2(u)$, *где* $u \in [0,1]$, *являются такими параметризованными кривыми на группе Ли G, которые удовлетворяют равенствам (1), то параметризованная кривая*

$$g(u) = g_2(\tau_k^+(u))g_1(\tau_k^-(u)), \;\; u \in [0,1], \tag{12}$$

удовлетворяет граничным условиям, заданным равенствами (2) и (3).

Доказательство. Пусть $g_1(u)$ и $g_2(u)$, $u \in [0,1]$, будут такими параметризованными кривыми на группе Ли G, которые удовлетворяют равенствам (1). Рассмотрим параметризованную кривую $g(u)$, которая определена равенством (12). Здесь полиномы $\tau_k^-(u)$ и $\tau_k^+(u)$ определены равенствами (4) и (8). Очевидно, что эта параметризованная кривая принадлежит группе Ли G, так как каждая точка этой кривой определяется как композиция элементов группы Ли G. Из определения параметризованной кривой $g(u)$ следует, что она удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$g(0) = g_2(\tau_k^+(0))g_1(\tau_k^-(0)) = g_2(0)g_1(0) = g_1(0)$$

и

$$g(1) = g_2(\tau_k^+(1))g_1(\tau_k^-(1)) = g_2(1)g_1(0) = g_2(1),$$

если принять во внимание равенства (1), (5) и (9). Следовательно, граничные условия, заданные равенствами (2), выполняются.

Производные по параметру u от параметризованных кривых $g_1(\tau_k^-(u))$ и $g_2(\tau_k^+(u))$ можно определить рекуррентными формулами

$$g_1^{(l)}(\tau_k^-(u)) = (g_1^{(l-1)})'_{\tau_k^-}(\tau_k^-(u))',$$

$$g_2^{(l)}(\tau_k^+(u)) = (g_2^{(l-1)})'_{\tau_k^+}(\tau_k^+(u))',$$

где $l \in N$. Так как производные полиномов $\tau_k^-(u)$ и $\tau_k^+(u)$ удовлетворяют граничным условиям, заданным соответственно равенствами (6), (7) и (10), (11), то из последних двух равенств следует, что производные по параметру u от параметризованных кривых $g_1(\tau_k^-(u))$ и $g_2(\tau_k^+(u))$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$(g_1^{(l)}(\tau_k^-(u)))(0) = \frac{\partial^l g_1}{(\partial\tau_k^-)^l}(0)((\tau_k^-)'(0))^l = \frac{\partial^l g_1}{(\partial\tau_k^-)^l}(0) = g_1^{(l)}(0), \tag{13}$$

$$(g_1^{(l)}(\tau_k^-(u)))(1) = \frac{\partial^l g_1}{(\partial\tau_k^-)^l}(1)((\tau_k^-)'(1))^l = 0 \tag{14}$$

и

$$(g_2^{(l)}(\tau_k^+(u)))(0) = \frac{\partial^l g_2}{(\partial\tau_k^+)^l}(0)((\tau_k^+)'(0))^l = 0, \tag{15}$$

$$(g_2^{(l)}(\tau_k^+(u)))(1) = \frac{\partial^l g_2}{(\partial\tau_k^+)^l}(1)((\tau_k^+)'(1))^l = \frac{\partial^l g_2}{(\partial\tau_k^+)^l}(1) = g_2^{(l)}(1) \tag{16}$$

для $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Производные по параметру u от параметризованной кривой $g(u)$ могут быть определены следующим образом:

$$g^{(l)}(u) = \sum_{i=1}^{l} C_l^i (g_2(\tau_k^+(u)))^{(i)} (g_1(\tau_k^-(u)))^{(l-i)}$$

для $l \in N$. Отсюда, принимая во внимание равенства (13) – (16), следует, что производные по параметру u от параметрической кривой $g(u)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$g^{(l)}(0) = g_1^{(l)}(0), \;\; g^{(l)}(1) = g_2^{(l)}(1)$$

для $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$. В результате получили, что граничные условия, заданные равенствами (3), также выполняются. Теорема доказана.

Теперь предположим, что параметризованные кривые $g_1(u)$ и $g_2(u)$ являются однопараметрическими подгруппами группы Ли, действующей на гладкое многообразие M. Рассмотрим такие траектории этих подгрупп, которые удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$g_1(0)p_1 = g_2(0)p_1 = p_1,\ \ g_1(1)p_1 = g_2(1)p_1 = p_2.$$

Тогда из определения однопараметрической кривой $g(u)$ следует, что траектория действия точек этой кривой на многообразие M удовлетворяет следующим равенствам:

$$g(0)p_1 = p_1,\ \ g(1)p_1 = p_2.$$

Кроме того, производные в граничных точках этой траектории удовлетворяют следующим равенствам:

$$(g(u)p_1)^l\Big|_{u=0} = (g_1(u)p_1)^l\Big|_{u=0},\ \ (g(u)p_1)^l\Big|_{u=1} = (g_2(u)p_1)^l\Big|_{u=1}$$

для $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Построение сплайн-кривых на гладких многообразиях

Покажем, как можно использовать полиномы $w_k(u)$ для построения интерполирующих сплайн-кривых на гладких многообразиях. В качестве примера гладкого многообразия рассмотрим двумерную сферу S^2. Как известно из геометрии, автоморфизмами двумерной сферы являются ортогональные повороты. Поэтому для построения сплайн-кривой на поверхности сферы используем деформации орбит ортогональных поворотов, действующих на двумерную сферу. Орбитами ортогональных поворотов являются окружности. Рассмотрим две произвольные окружности:

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{R}(\mathbf{m}, u\varphi)\mathbf{p}_1,\ \ \mathbf{q}(u) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, u\psi)\mathbf{p}_1,\ \ u \in [0,1],$$

которые лежат на поверхности сферы S^2 и имеют общие граничные точки

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{q}(0) = \mathbf{p}_1,\ \ \mathbf{p}(1) = \mathbf{q}(1) = \mathbf{p}_2.$$

Из этих уравнений видно, что дуги окружностей $\mathbf{p}(u)$ и $\mathbf{q}(u)$ соединяют точки P_1 и P_2. Проблема заключается в следующем: нужно построить такую параметризованную кривую $\mathbf{r}(u)$, которая лежит на поверхности сферы S^2 и удовлетворяет следующим граничным условиям:

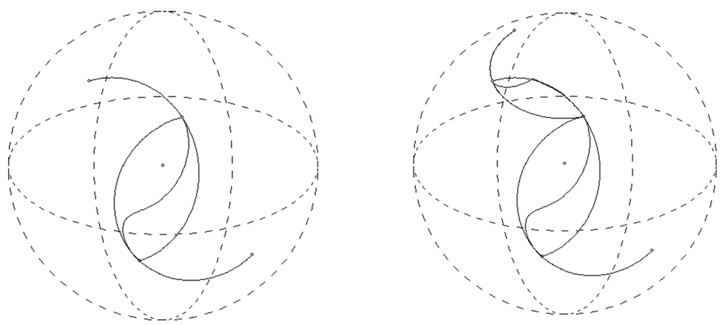
$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}_1,\ \ \mathbf{r}(1) = \mathbf{p}_2, \tag{17}$$

$$\mathbf{r}^{(k)}(0) = \mathbf{q}^{(k)}(0),\ \ \mathbf{r}^{(k)}(1) = \mathbf{p}^{(k)}(1) \tag{18}$$

для всех $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, где $n \in N$. Параметризованную кривую $\mathbf{r}(u)$ будем называть *деформацией* параметризованной кривой $\mathbf{q}(u)$ в параметризованную кривую $\mathbf{p}(u)$. Используя сглаживающие полиномы $w_k(u)$, определим параметризованную кривую:

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{R}(\mathbf{m}, w_n(u)u\varphi)\mathbf{R}(\mathbf{n}, (1 - w_n(u))u\psi)\mathbf{p}_1,\ \ u \in [0,1].$$

Во-первых, отметим, что кривая $\mathbf{r}(u)$ лежит на поверхности сферы S^2, так как является орбитой композиции ортогональных поворотов. Во-вторых, из определения сглаживающих полиномов следует, что эта кривая удовлетворяет требуемым граничным условиям (17) и (18).



Сплайн-кривые на поверхности двумерной сферы

При конструировании сплайн-кривой на поверхности сферы нужно использовать деформацию последовательных окружностей на сфере. Пример деформации окружностей и построения сплайн-кривой на поверхности сферы показан на рисунке.

* * *

В работе представлены полиномы, сглаживающие с заданной степенью непрерывности параметризованные кривые на группе Ли. Показано, как можно применять эти полиномы для сглаживания орбит однопараметрических подгрупп группы Ли, действующих на гладкое многообразие. В качестве примера рассмотрено построение сплайн-кривых на поверхности двумерной сферы.

1. Pobegailo A.P. // Computer-Aided Design. 1996. Vol. 28. № 12. P. 973.
2. Побегайло А.П. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 3. С. 106.
3. Дубровин В.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. 2-е изд., перераб. М., 1986.
4. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли: Пер. с англ. М., 1987.
5. Park F., Ravani B. // ASME J. Mechan. Design. 1995. Vol. 117. P. 36.
6. Pesenson I. // Advances in Applied Mathematics. 2004. Vol. 33. № 3. P. 548.
7. Flöry S., Hofer M. // Computer-Aide Design. 2008. Vol. 40. № 1. P. 25.
8. Jakubiak J., Silva F. Leite, Rui C. Rodrigues // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2006. Vol. 194. № 2. P. 177.
9. Hoschek J., Seemann G. // RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique. 1992. Vol. 26. № 1. P. 1.
10. Alfred P., Neamtu A.M., Schumaker L.L. // Computer Aided Geometric Design. 1996. Vol. 13. № 4. P. 333.
11. Popiel T., Noakes L. // Computer Aided Geometric Design. 2006. Vol. 23. P. 261.

Поступила в редакцию 10.02.11.

Александр Павлович Побегайло – кандидат технических наук, доцент кафедры технологий программирования.