

УДК 537.87

*С.В. МАЛЫЙ, А.С. РУДНИЦКИЙ*

**МЕТОДИКА УСРЕДНЕННОЙ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕТКАХ  
ИЗ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЛЕНТ**

The features of using the average scattering matrix technique and the minimum autonomous blocks method to solve the problems of diffraction of plane electromagnetic waves on periodic gratings are considered. The efficiency of the proposed approach is shown using a grating of metal-dielectric strips as an example.

Плоские и объемные периодические структуры находят широкое применение в различных областях оптики и микроволновой техники. Интерес к таким структурам в последние годы возрос в связи с изучением свойств метаматериалов, фотонных кристаллов, композитов и разработкой способов их практического использования [1, 2]. Большими потенциальными возможностями обладают структуры с резонансными элементами. Они могут применяться в качестве пространственно-поляризационных и частотно-селективных фильтров. На их основе могут быть реализованы композиты и метаматериалы с пространственной и частотной анизотропией параметров, а также различные типы микроволновых устройств и систем: электромагнитные кристаллы, волноводы, пространственно совмещенные электродинамические системы. В данной работе рассматривается периодическая структура с резонансными включениями в виде дифракционной решетки из металлодиэлектрических лент.

При решении задач дифракции плоских электромагнитных волн на периодических решетках и плоских слоях из композитов и метаматериалов применяются различные методы и подходы. Для ука-

занного класса задач одним из перспективных является метод минимальных автономных блоков (МАБ) [3]. На его основе с использованием теории периодических структур [4] разработаны методики: решения задач дифракции на периодических решетках из произвольных по структуре и составу элементов [5], определения эффективных материальных параметров композиционных материалов [6], а также усредненной матрицы рассеяния макроблоков для решения задач многомасштабного анализа [7] и описания электромагнитных параметров композитов и метаматериалов [8]. На примере решетки из металлодиэлектрических лент проанализируем возможность использования метода МАБ в сочетании с методикой усредненной матрицы рассеяния для решения задач дифракции электромагнитных волн на периодических решетках.

**Постановка задачи и методика ее решения методом МАБ**

Рассмотрим методику прямого решения задачи дифракции плоской электромагнитной волны на периодической решетке из металлодиэлектрических лент. Геометрия задачи представлена на рис. 1 а. Каждая лента состоит из трех тонких по сравнению с ее шириной и длиной волны слоев. Внешние слои ленты – проводящие, центральный выполнен из диэлектрического материала. На решетку нормально к ее поверхности падает плоская линейно поляризованная электромагнитная волна. Для решения дифракционной задачи осуществляется переход к пространственному волноводу, выделяющему период решетки, как показано на рис. 1 б. На стенках пространственного волновода задаются периодические граничные условия.

Задача сводится к определению комплексных амплитуд гармоник Флоке для прошедшего и отраженного полей при заданном режиме возбуждения решетки плоской электромагнитной волной. Пространственный волновод, содержащий фрагмент периодической решетки, декомпозируется на систему МАБ, как показано на рис. 1 в. Помимо основных в состав декомпозиционной схемы входят вспомогательные блоки, обеспечивающие выполнение граничных условий на общих гранях МАБ с различным заполнением.

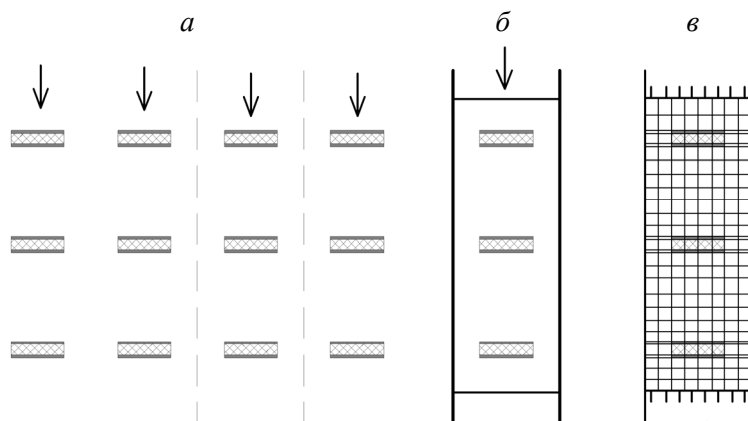


Рис. 1. Основные этапы алгоритма решения задачи дифракции методом МАБ:

а – периодическая решетка из металлодиэлектрических лент; б – пространственный волновод; в – декомпозиционная схема

Электромагнитные свойства МАБ описываются матрицами рассеяния, порядок которых для двумерных задач равен четырем. Соотношения для расчета элементов матриц рассеяния основных и вспомогательных блоков приведены в [3]. В качестве примера представлена структура матриц рассеяния двумерного МАБ квадратного сечения для двух типов поляризации электромагнитного поля:

$$S_E = \begin{pmatrix} \rho & \delta & \beta & \beta \\ \delta & \rho & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \rho & \delta \\ \beta & \beta & \delta & \rho \end{pmatrix}, E - \text{поляризация}; \tag{1}$$

$$S_H = \begin{pmatrix} -\rho & \delta & -\beta & \beta \\ \delta & -\rho & \beta & -\beta \\ -\beta & \beta & -\rho & \delta \\ \beta & -\beta & \delta & -\rho \end{pmatrix}, H - \text{поляризация}. \tag{2}$$

Элементы матриц рассеяния рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned}\rho &= -1/2 + i\frac{11k\Delta}{24} + O(k^2\Delta^2), \\ \delta &= 1/2 - i\frac{13k\Delta}{24} + O(k^2\Delta^2), \\ \beta &= 1/2 - i\frac{5k\Delta}{24} + O(k^2\Delta^2),\end{aligned}\tag{3}$$

где  $\Delta$  – размер блока, а  $k$  – волновое число в среде, заполняющей МАБ.

Достоинством метода МАБ является его высокая вычислительная устойчивость при выполнении условия  $\Delta < 0,25\lambda / \sqrt{\varepsilon\mu}$ , где  $\varepsilon, \mu$  – комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно. В общем случае двухмерные МАБ могут быть прямоугольными, что позволяет адаптировать декомпозиционную схему к особенностям решаемой задачи. Для моделирования металлических элементов к граням блоков с диэлектрическим заполнением подключаются блоки металлизации [3].

Построение декомпозиционной схемы и расчет матриц рассеяния для всех входящих в нее блоков является первым этапом решения задачи методом МАБ. Далее для получения решения можно воспользоваться одним из следующих алгоритмов:

- рекомпозиция МАБ и определение многоканальной матрицы рассеяния относительно свободных каналов, выходящих на границу исследуемой области; объединение общих каналов осуществляется с использованием матричных соотношений из теории многополюсников [9];
- итерационный алгоритм, моделирующий процесс многократного рассеяния канальных волн на системе МАБ;
- сведение задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно комплексных амплитуд канальных волн; матрица коэффициентов такой системы является сильно разреженной, что позволяет применять эффективные алгоритмы ее решения, развитые и используемые в рамках методов конечных разностей и конечных элементов;
- гибридные алгоритмы, сочетающие в себе рекомпозиционный и итерационный подходы.

При решении задач дифракции на периодических структурах наиболее точным и устойчивым является рекомпозиционный подход, который обеспечивает получение матрицы рассеяния для каналов, выходящих на внешние поперечные границы декомпозиционной области. Каналы, выходящие на стенки волновода, объединяются с учетом условий периодичности и направления распространения падающей на решетку электромагнитной волны. Переход от многоканального к многомодовому представлению поля и определение комплексных амплитуд рассеянных на решетке распространяющихся пространственных гармоник осуществляется в рамках алгоритма многократного рассеяния на границе многоканального и многомодового представлений электромагнитных полей.

Вычислительная эффективность решения дифракционной задачи определяется количеством блоков в декомпозиционной схеме. Наличие мелких деталей в структуре периода и материалов с большими значениями (по модулю) диэлектрической и магнитной проницаемостей обуславливает рост числа основных и вспомогательных блоков. Это, в свою очередь, приводит к значительному увеличению вычислительных затрат. Поэтому актуальной представляется задача разработки методов и алгоритмов снижения вычислительных затрат на моделирование решеток без существенной потери точности, особенно на резонансных частотах.

### Методика усредненной матрицы рассеяния

Одним из основных направлений повышения эффективности моделирования электромагнитных процессов в структурно неоднородных средах является применение приближения эффективной среды [1, 5]. Однако практическое использование этого подхода связано с рядом проблем, среди которых тензорный характер эффективных параметров для анизотропных композитных сред; большие значения эффективных параметров в области резонансных частот; погрешности, связанные с особенностями решения обратных задач по восстановлению эффективных параметров; применимость эффективных параметров только для больших по сравнению со структурными неоднородностями областей.

Применение методики усредненной матрицы рассеяния потенциально позволяет решить указанные проблемы, связанные с гомогенизацией структурно неоднородных сред. С этой целью предполагается реализация следующих основных этапов:

- выделение макроблока, содержащего фрагмент элемента решетки (рис. 2 а);
- декомпозиция макроблока на систему МАБ и определение в рамках рекомпозиционного алгоритма многоканальной матрицы рассеяния (рис. 2 б);

- определение усредненной матрицы рассеяния макроблока путем последовательного возбуждения его граней и усреднения отраженных канальных волн на каждой из них (рис. 2 в);
- решение задач дифракции на базе метода МАБ с использованием усредненных матриц рассеяния макроблоков наряду со стандартными блоками с однородным заполнением.

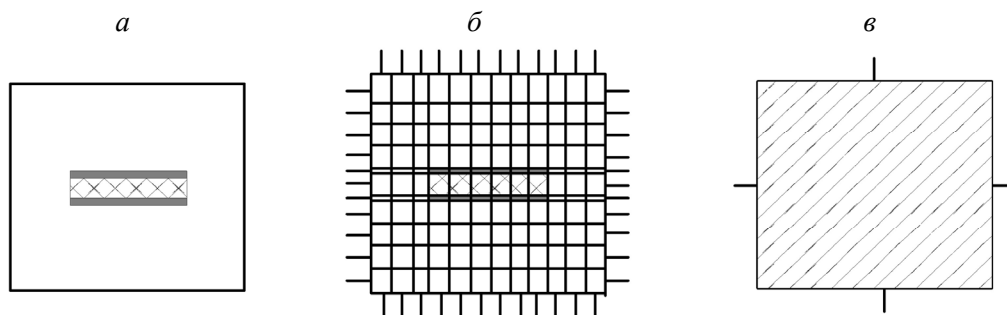


Рис. 2. Методика усредненной матрицы рассеяния:  
*a* – макроблок, содержащий фрагмент решетки; *б* – декомпозиционная схема макроблока;  
*в* – макроблок с усредненными параметрами

Порядок усредненной матрицы рассеяния равен порядку обычного МАБ с однородным заполнением.

### Результаты численного моделирования

В расчетах были использованы следующие конструктивные и материальные параметры: ширина лент – 10 мм; толщина проводящих лент – 0,5 мм; ширина диэлектрической ленты – 1 мм; период решетки и расстояние между слоями – 20 мм; диэлектрическая и магнитная проницаемости материала, заполняющего внутреннюю область лент,  $\epsilon = 100$ ,  $\mu = 1$  соответственно.

Рассматривался случай нормального падения плоской линейно поляризованной электромагнитной волны, вектор напряженности магнитного поля которой параллелен осям лент. Анализировались два подхода к решению: прямое моделирование с декомпозицией пространственного волновода на систему стандартных (с однородным заполнением) блоков и предварительный расчет усредненных матриц рассеяния макроблоков, содержащих металлдиэлектрические ленты, с последующим использованием метода МАБ.

При определении усредненной матрицы рассеяния рассматривался макроблок, выделяющий период решетки и содержащий одну металлдиэлектрическую ленту, как показано на рис. 2 *a*. Декомпозиция макроблока осуществлялась на  $40 \times 40$  МАБ. Таким образом, для рассматриваемой задачи количество МАБ в усредненном блоке и во всей декомпозиционной схеме уменьшается в 1600 раз.

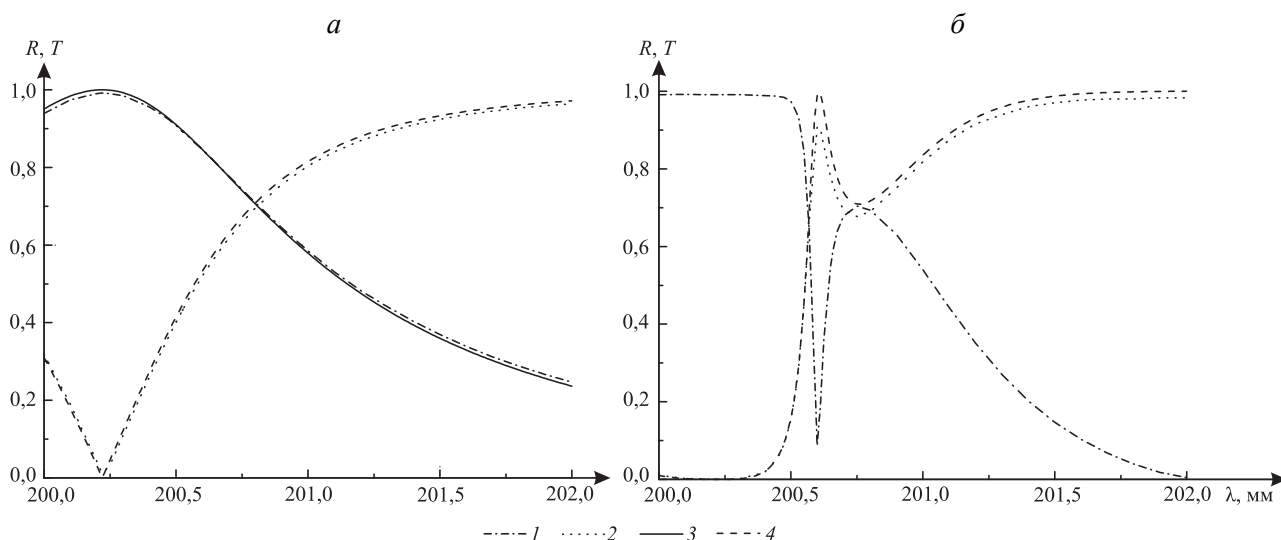


Рис. 3. Зависимость коэффициентов отражения и прохождения от длины волн для однослойной (*a*) и трехслойной (*б*) решеток из металлдиэлектрических лент

Результаты моделирования представлены на рис. 3 в виде зависимостей коэффициентов отражения  $R$  и прохождения  $T$  через решетку с различным количеством слоев. Кривые 1 и 2 соответствуют

модулям коэффициентов отражения и прохождения, рассчитанным с использованием методики усредненной матрицы рассеяния; 3 и 4 – аналогичным зависимостям, полученным с использованием прямого моделирования методом МАБ.

Анализ приведенных результатов показывает, что коэффициенты прохождения и отражения существенно зависят от длины волны  $\lambda$  и от числа слоев в решетке. В пределах очень узкого диапазона длин волн зависимость коэффициентов прохождения и отражения от длины волны имеет сложный характер. Несмотря на это, результаты прямого моделирования методом МАБ и результаты, полученные с использованием методики усредненной матрицы рассеяния, достаточно близки. Это подтверждает возможность применения методики усредненной матрицы рассеяния для расчета электродинамических устройств и систем, в состав которых входят композиты с резонансными элементами.

При моделировании композитов и метаматериалов усредненные матрицы рассеяния могут применяться в качестве альтернативы традиционно используемым эффективным электромагнитным параметрам. Методика усредненной матрицы рассеяния снимает необходимость расчета в общем случае тензорных значений эффективных материальных параметров. Дополнительным достоинством этого подхода к описанию электромагнитных свойств метаматериалов является возможность непосредственного использования усредненных матриц в рамках алгоритмов и программ, реализующих метод минимальных автономных блоков. Это снимает проблемы с исследованием электродинамических систем, в состав которых входят композиты или метаматериалы, эффективные электромагнитные параметры которых являются тензорными.

1. Metamaterials Handbook. Theory and phenomena of metamaterials / Ed. F. Capolino. Taylor & Francis Group. USA. 2009.
2. Резонансное рассеяние волн: в 2 т. Т. 1. Дифракционные решетки / В.П. Шестопапов и др. Киев, 1986.
3. Никольский В.В., Никольская Т.И. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М., 1983. С. 304.
4. Амтей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток. М., 1974.
5. Maly S.V. // MMET conference proceedings «Mathematical Methods in Electromagnetic Theory», September 10–13 1996, Lviv, Ukraine. Lviv, 1996. P. 490.
6. Мальный С.В., Кухарчик П.Д. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1999. № 3. С. 27.
7. Maly S. The multiscale analysis of electromagnetic properties of nanomaterials // Proceedings of International Workshop NDTCS'2008, Minsk, June 23–27 2008. Minsk, 2008. P. 231.
8. Maly S.V. Homogenization of metamaterials on the basis of average scattering matrixes // Abstracts of the international conference «DAYS ON DIFFRACTION'2010», Saint Petersburg, June 8–11 2010. Saint Petersburg, 2010. P. 114.
9. Гупта К., Гардж Р., Чадха Р. Машинное проектирование СВЧ-устройств. М., 1987.

Поступила в редакцию 04.04.11.

**Сергей Владимирович Мальный** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики и цифровых медиатехнологий.

**Антон Сергеевич Рудницкий** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой радиофизики и цифровых медиатехнологий.