

УДК 519.6+532.546

В. В. ВИДЯКИН, В. Б. ТАРАНЧУК

**ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ
ВЫТЕСНЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ВЯЗКОЙ
В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

(Представлено академиком АН БССР В. И. Крыловым)

На основе использования метода граничных интегральных уравнений построены и анализируются решения задач теории расчета предельно-равновесных целиков, возникающих при вытеснении вязкопластической жидкости вязкой из неоднородной пористой среды.

Рассматривается плоская изотермическая фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в недеформируемой неоднородной пористой среде, когда в области фильтрации имеются источник и сток заданной равной интенсивности. Предполагается, что вязкопластическая жидкость, первоначально заполнявшая всю область, так долго вытеснялась вязкой, что осталась только в тех ее частях, где градиент давления меньше предельного значения G , или, другими словами, образовался целик, занимающий внешность некоторого замкнутого кусочно-гладкого контура Γ_0 , ограничивающего область движения вытесняющей жидкости Ω_0 .

Эта задача теории нелинейной фильтрации в неоднородной пористой среде приводит к следующей краевой задаче для давления $p(x, y)$ (см., например, [1]):

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} p) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad |\nabla p| = G \quad (\text{на } \Gamma_0), \tag{2}$$

где $k=k(x, y)$ — заданная проницаемость пористой среды, x, y — декартовы координаты в плоскости течения, n — нормаль к контуру Γ_0 . Требуется определить давление $p(x, y)$ и уравнение контура Γ_0 .

Решение задачи (1), (2) при $k(x, y)=\operatorname{const}$ может быть получено методами теории аналитических функций [2]. Для неоднородных сред подобные задачи изучены недостаточно полно ввиду больших трудностей, возникающих при их решении на основе традиционных подходов. Приведем способ решения в случае неоднородного пласта, когда $\sqrt{k(x, y)}$ — гармоническая или кусочно-постоянная функция.

Пусть $\sqrt{k(x, y)}$ — гармоническая функция в области Ω_0 . Тогда по ана-

Безразмерная площадь $\gamma = S\epsilon a^{-2}$ при различных значениях параметра ω

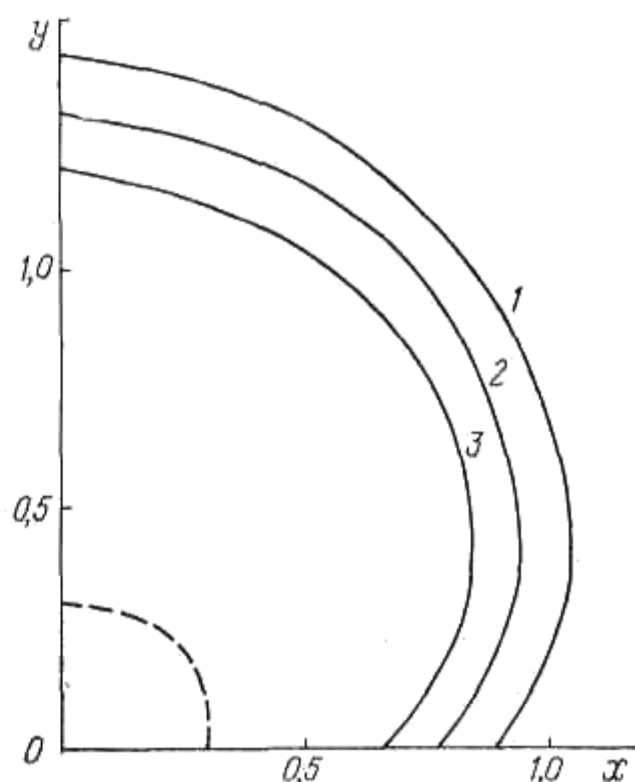
ω	0	0,05	0,1	⋮	0,15	0,2	0,25
γ	4,211	4,334	4,456		4,578	4,703	4,831

логи с [3, 4] распределение давления для задачи (1), (2) будем искать в виде

$$p(x, y) = \varphi(x, y) + k^{-1/2} \int_{\Gamma_0} v_0(\xi, \eta) \ln R^{-1} d\sigma, \quad (3)$$

где $R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$, σ — дуговая абсцисса точки $(\xi, \eta) \in \Gamma_0$, v_0 — плотность потенциала простого слоя, φ — потенциал внешнего поля.

Подстановка (3) в (2) определяет систему функциональных уравнений относительно неизвестной v_0 и формы контура Γ_0 . Возникающая система может быть решена путем сведения ее к суммирующе-разностному аналогу [5] с последующим применением стандартных итерационных методов. Численные решения исследовались для $k(x, y) = (a_1 + a_2x + a_3y)^2$, где a_1, a_2, a_3 — постоянные. Изучались сходимость и точность приближенных решений, влияние исходных параметров на форму и площадь предельно-равновесных целиков. В частности, в таблице приведена зависимость



Границы предельно-равновесных целиков для различных значений параметра e : 1 — $e=1,2$; 2 — 1; 3 — 0,8. Штриховая линия — граница неоднородного включения

площади S , охваченной заводнением, от безразмерного параметра $\omega = a_3 a / \sqrt{\varepsilon k_*}$, где $\varepsilon = \pi a k_* G / (Q \mu)$, Q — интенсивность источника (стока), $2a$ — расстояние между источником и стоком, μ — вязкость вытесняющей жидкости, k_* — характерная проницаемость среды. При расчетах учитывалась соответствующая симметрия течения, полагалось $a_1 = \sqrt{k_*}$, $a_2 = 0$, $\varepsilon = 0,1$.

Пусть в области Ω_0 имеется подобласть Ω_1 такая, что

$$k(x, y) = k_1, \quad (x, y) \in \Omega_1,$$

$$k(x, y) = k_0, \quad (x, y) \in \Omega_0 / \Omega_1,$$

k_0, k_1 — постоянные. В этом случае требуется найти гармоническую функцию $p(x, y)$ в области Ω_0 , ограниченной неизвестной кривой Γ_0 , на которой выполняются условия (2), удовлетворяющую на заданной границе Γ_1 дополнительным условиям непрерывности давления и потока (см., например, [1]):

$$p^+ = p^-, \quad \left(k_1 \frac{\partial p}{\partial n} \right)^+ = \left(k_0 \frac{\partial p}{\partial n} \right)^- \quad (\text{на } \Gamma_1). \quad (4)$$

Индексами плюс и минус отмечены предельные значения давления, его нормальной производной и проницаемости среды при приближении к границе Γ_1 изнутри и снаружи соответственно.

По аналогии с [3] распределение давления ищется в виде суперпозиции потенциала пары источник—сток $\varphi(x, y)$ и потенциалов простого слоя с плотностями v_0, v_1 , сосредоточенными на контурах Γ_0, Γ_1 . Условия (2), (4) приводят к следующей системе нелинейных интегродифференциальных уравнений для отыскания v_0, v_1 и формы контура Γ_0 :

$$\begin{aligned}
(\beta - 2\pi) v_0(\theta) + \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^1 v_i(\alpha) N[g_i(\alpha), g_0(\theta)] d\alpha &= \chi \Phi[g_0(\theta)], \\
\left| \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^1 v_i(\alpha) K[g_i(\alpha), g_0(\theta)] d\alpha + \chi \Psi[g_0(\theta)] \right| &= GL[g_0(\theta)], \\
-\pi(1+e)v_1(\theta) + (1-e) \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^1 v_i(\alpha) N[g_i(\alpha), g_1(\theta)] d\alpha &= \\
&= \chi(e-1)\Phi[g_1(\theta)], \quad 0 < \theta < 2\pi,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $L[g(\theta)] = \sqrt{g^2(\theta) + g'^2(\theta)}$, $e = k_0/k_1$, индексы 0 и 1 идентифицируют параметры, относящиеся к контурам Γ_0 и Γ_1 , χ — характеристическая функция, $\chi = e$, если скважины находятся внутри Ω_1 , $\chi = 1$ в противном случае, все остальные обозначения введены в [3].

Приведем несколько численных решений системы (5) для различных значений параметра e . Аппроксимирующая нелинейная система алгебраических уравнений решалась обобщенным методом Стеффенсена. В качестве начального приближения использовалось аналитическое решение из [2] для $e = 1$. На рисунке в безразмерных переменных [3] показаны границы предельно-равновесных целиков для $\varepsilon = 0,02$, $g_1(\theta) = 0,3a\varepsilon^{-1/2}$.

Отметим возможность обобщения по аналогии с [6] изложенной методики получения численных решений на случай многоскважинной системы.

Summary

The solutions of the problems about the limiting configuration of the stagnation region which appears during the displacement of viscoplastic liquid by water from non-homogeneous porous media is considered using the method of boundary integral equations.

Литература

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М., 1984.
2. Котляр Л. М., Скворцов Э. В. Плоские стационарные задачи фильтрации с начальным градиентом. Казань, 1978.
3. Видякин В. В., Ентов В. М., Таранчук В. Б. // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32, № 2. С. 105—107.
4. Салехов Г. С. // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105, № 6. С. 1174—1176.
5. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л., 1962.
6. Видякин В. В., Ентов В. М., Таранчук В. Б. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 182—185.

НИИ ПФП им. А. Н. Севченко
БГУ им. В. И. Ленина

Поступило 17.04.89

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК БССР

Выходит ежемесячно

Журнал основан в июле 1957 года

МИНСК, НАУКА И ТЕХНИКА, 1989, ТОМ 33, № 12

Редакционная коллегия: **В. П. Платонов** (главный редактор),
В. С. Солдатов (зам. главного редактора),
П. А. Апанасевич, Б. Б. Бойко, Е. Ф. Конопля, А. С. Махнач,
Ю. А. Ольдекоп, А. В. Степаненко, Л. В. Хотылева

Адрес редакции:

220072. Минск, Ленинский пр., 66, к. 403,
т. 39-46-96

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Гайшун И. В.** Устойчивость и ограниченность решений некоторых классов линейных двухпараметрических систем 1061
Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костина Е. А. Сетевая задача кусочно-линейного программирования 1064
Забрейко П. П. Теоремы существования и единственности решений задачи Коши для дифференциальных уравнений с ухудшающими операторами 1068
Видякин В. В., Таранчук В. Б. Исследование асимптотических решений задач вытеснения вязкопластической жидкости вязкой в неоднородной пористой среде 1072

ФИЗИКА

- Лазарук А. М., Серебрякова Л. М.** Зависимость отражательных характеристик ОВФ-зеркала от показателя преломления граничащей с ним среды 1075
Нгуен З. Т., Шумейко Н. М. СУСИ-эффекты в электрослабых асимметриях ГНР поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах 1078
Гололобов Е. М., Новыш Б. В., Макутина Л. Н. Исследования пространственного распределения электронной плотности в соединениях TaC и TaN 1081
Батище С. А., Демчук А. В., Кузьмук А. А., Татур Г. А. Особенности кристаллизации кремниевых слоев на теплоизолированных подложках при наносекундном лазерном воздействии 1084

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

- Ярошевич Г. Б., Кашулин С. М., Вежбиньски С., Покутная М. В.** Характеристики субструктуры сплава Cu—8 Sn в холоднодеформированном состоянии и после скоростного нагрева 1087
Прокошин В. И., Шепелевич В. Г., Исаченко Е. А., Яромлович В. А. Распределение висмута в пленках InSb—InBi 1090
Цветкова Е. А., Пинчук Л. С., Клявиньш И. Э., Снежков В. В. Влияние электромагнитных полей на перенос зарядов в металлополимерных системах 1093

