КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЗАДАЧАХ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Л.А. Пилипчук

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь pilipchuk@bsu.by

В работе рассматривается математическая модель неоднородной задачи дробно-линейного потокового программирования следующего вида:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k + \beta}{\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + \gamma} \longrightarrow \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U^k)} x_{ji}^k = a_i^k, \quad i\in I^k, \quad k\in K; \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K(i,j)} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p, \quad p=\overline{1,l}; \tag{3}$$

$$\sum_{k\in K_0(i,j)} x_{ij}^k \leqslant d_{ij}^0, \quad x_{ij}^k \geqslant 0, \quad k\in K_0(i,j), \quad (i,j)\in U_0; \tag{4}$$

$$0 \leqslant x_{ij}^k \leqslant d_{ij}^k, \quad k\in K_1(i,j), \quad (i,j)\in U; \tag{5}$$

$$x_{ij}^k \geqslant 0, \quad k\in K(i,j)\setminus K_1(i,j), \quad (i,j)\in U\setminus U_0, \tag{6}$$

где I — множество узлов и U — множество мультидуг мультисети $G=\{I,U\}$, $U\subseteq I\times I$, $|I|<\infty$, $|U|<\infty$. Мультисеть $G=(I,U)$ представлена в виде множества G^k, $k\in K$, связных сетей $G^k=(I^k,U^k)$. Каждая связная сеть G^k соответствует некоторому типу k потока в мультисети $G=(I,U)$, $k\in K$, $|K|<\infty$. $K(i)$ — множество типов потоков, проходящих через узел i : $K(i)=\{k\in K:\ i\in I^k\}$. Для каждой мультидуги $(i,j)\in$ $\in U$ определим множество $K(i,j)$ типов потоков, проходящих через (i,j) : $K(i,j)=\{k\in$ $\in K:\ (i,j)^k\in U^k\}$. Для каждой мультидуги (i,j) определим подмножество $K_1(i,j)=\{k\in$ $\in K:(i,j)^k\in U_1^k\}$, $U_1^k\subseteq U^k$. Введем множество U_0 мультидуг $(i,j)\in U_0$, $|K_0(i,j)|>1$, где $K_0(i,j)=K(i,j)\backslash K_1(i,j)$, $(i,j)\in U_0$. Каждая сеть G^k имеет следующие характеристики: x_{ij}^k — поток k-го типа по дуге (i,j) (дуговой поток k-го типа); p_{ij}^k, g_{ij}^k — параметры дробно-линейной целевой функции (1) для дугового потока k-го типа дуги $(i,j)^k$; d_{ij}^k — пропускная способность дуги (i,j) для k-го типа потока, $k\in K_1(i,j)$; d_{ij}^0 — суммарная пропускная способность мультидуги $(i,j)\in U_0$; a_i^k интенсивность узла i для k-го типа потока; α_p, $p=\overline{1,l}$, λ_{ij}^{kp} — параметры дополнительных ограничений (3), отражающих взаимосвязи дуговых потоков мультисети $G=(I,U)$. $I_i^+(U^k)=\{j\in I^k:(i,j)^k\in U^k\}$, $I_i^-(U^k)=\{j\in$ $\in I^k:(j,i)^k\in U^k\}$. Полагаем, что знаменатель $q(x)=\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k+\gamma$ дробно-линейной целевой функции $f(x)$ не меняет знак на множестве X допустимых решений (мультипотоков) задачи (1)–(6), $x\in X$, $x=(x_{ij}^k,\ (i,j)\in U,\ k\in K(i,j))$.

Неоднородные задачи потокового программирования вида (1)–(6) относятся к классу нелинейных (дробно-линейных) задач математического программирования с дробно-линейной целевой функцией (1) и линейными ограничениями (2)–(6), а также характеризуются наличием взаимосвязи дуговых потоков (3), (4). Математические модели (1)–(6) дробно-линейного программирования (ДЛП) рассматриваются в исходном виде, без сведения их к соответствующим моделям линейного программирования (ЛП) [1]. В конструктивной теории решения экстремальных сетевых задач [2–4] перспективен подход, в котором максимально применяются общие принципы оптимизации для сетевой (разреженной) структуры ограничений. На основе результатов, полученных для решения неоднородных сетевых задач линейной оптимизации [1], разработана теория декомпозиции [5, 6] для разделения ограничений (2)–(6) задачи (1)–(6) на независимые части, одна из которых представляет собой разреженную часть ограничений (2), вторая — ограничения общего вида. Затем, на основе полученных теоретических результатов, применяются эффективные алгоритмы и технологии [7, 8] построения численных решений для исследуемой математической модели (1)–(6) в целом. На основе применения конструктивной теории декомпозиции [8] для разреженных недоопределенных систем линейных алгебраических уравнений и результатов, полученных для решения неоднородных сетевых задач линейной оптимизации [1], разработаны прямые точные опорные методы решения неоднородных сетевых задач дробно-линейной оптимизации вида (1)–(6) с применением современных достижений в технологии построения численных решений нелинейных задач математического программирования.

Доказан критерий оптимальности опорного мультипотока. Получена формула приращения дробно-линейной целевой функции (1). В случаях нарушения условий оптимальности на дугах и мультидугах, разработаны эффективные алгоритмы решения разреженных линейных систем для нахождения подходящих направлений [9] изменения допустимого мультипотока. Используются концепции теории графов и теории потоков для операций декомпозиции мультисети и построения общих решений разреженных недоопределенных систем линейных алгебраических уравненийс с прямоугольными матрицами [10].

Литература

1. Пилипчук Л. А. *Линейные неоднородные задачи потокового программирования.* Минск: БГУ, 2009.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Методы линейного программирования. Ч. 3. Специальные задачи.* Минск: БГУ, 1980.

3. Pilipchuk L. A., Vecharynski E. S., Y. H. Pesheva Y. H. *Solution of Large Linear Systems with Embedded Network Structure for a Non-Homogeneous Network Flow Programming Problem* // Mathematica Balkanica. Vol. 22, Fasc. 3–4, 2008. P. 235–254.

4. Pilipchuk L. A., German O. V., Pilipchuk A. S. *The General Solutions of Sparse Systems with Rectangular Mmatrices in the Problem of Sensors Optimal Location in the Nodes of a Generalized Graph* // Vestnik BSU. Ser. 1. 2015. No. 2. P. 91–96.

5. Pilipchuk L. A., Malakhouskaya Y. V., Kincaid D. R., Lai M. *Algorithms of Solving Large Sparse Underdetermined Linear Systems with Embedded Network Structure* // East-West J. of Mathematics. 2002. Vol. 4, No. 2. P. 191–202.

6. Pilipchuk L. A. *Network Optimization Problems* // Applications of Mathematics in Engineering and Economics. Eds. D. Ivanchev and M. D. Todorov. Heron Press, Sofia, 2002. P. 66–79.

7. Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications.* New Jersey, 1993.

8. Pilipchuk L. A. *Sparse Linear System and Their Applications.* Minsk: BSU, 2013.

9. Пилипчук Л. А. *Дробно-линейные экстремальные неоднородные задачи потокового программирования.* Минск: БГУ, 2013.

10. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Pesheva Y. H. *Graph Algorithms in Sparse Linear Systems with Rectangular Matrices* // American Institute of Physics (*AIP*). AIP Conf. Proc. 2013. Vol. 1570. P. 485–490.

К ВОПРОСУ УСПОКОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПОСРЕДСТВОМ РЕГУЛЯТОРОВ ПО ТИПУ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

О.И. Урбан

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь urban_ola@mail.ru

Пусть объект управления описывается линейной автономной регулярной алгебро-дифференциальной системой с соизмеримыми запаздываниями в управлении

$$\frac{d}{dt}(A_0x(t)) = Ax(t) + \sum_{i=0}^{m} B_iu(t-ih), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$