В. А. ЕРОВЕНКО, О. В. ГУЛИНА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СУЩЕСТВЕННО РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ И СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СПЕКТРА САФАРА

(*Представлено академиком И. В. Гайшуном*)

Белорусский государственный университет, г. Минск

В работе исследуются свойства устойчивости существенного спектра Сафара ограниченного линейного оператора в банаховом пространстве, занимающего промежуточное положение между существенным спектром Апостола и существенным спектром Фредгольма при различных коммутирующих и некоммутирующих возмущениях специальными классами операторов.

Пусть T – ограниченный линейный оператор на бесконечномерном банаховом пространстве X над полем комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{B}(X)$ – банахова алгебра ограниченных линейных операторов на X, т.е. $T \in \boldsymbol{B}(X)$. Обозначим через $N(T)$ ядро (т.е. множество всех нулей) оператора T, а через $R(T)$ – область значений оператора T. Анализу свойств устойчивости ограниченных линейных операторов с замкнутой областью значений в банаховом пространстве, для которых, по крайней мере, одно из чисел $\alpha(T) := dim\, N(T)$ или $\beta(T) := codim\, R(T)$ конечно, и связанных с ними существенных спектров, посвящено много содержательных работ (см., например, [1] и большую библиографию там же). Если обе числовые характеристики ограниченного оператора с замкнутой областью значений $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ бесконечны, то, согласно хорошо известной классической теореме Гольдмана [2, теорема 1], можно указать такой линейный компактный оператор с бесконечномерной областью значений, даже сколь угодно малый по норме, возмущение которым нарушает свойство замкнутости области значений.

Однако, если ядро оператора «невелико», относительно его области значений, точнее относительно обобщенной области значений, то для коммутирующих компактных возмущений можно рассчитывать на устойчивость свойства замкнутости области значений возмущенного оператора (см., например, [3]). Для формализации сказанного, введем следующие стандартные обозначения. Обозначим *обобщенное ядро* оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$ через $N^{\infty}(T) := \cup\, \{N(T^{k}) :\ \mathrm{k}=1, 2, 3,\ldots\}$ и *обобщенную область значений* оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$ через $R^{\infty}(T) := \cap\{R(T^{k}) :\ \mathrm{k}=1, 2, 3,\ldots\}$. Рассмотрим следующие классы ограниченных линейных операторов, определенных на банаховом пространстве X :

$$\boldsymbol{D}(X) : = \{T \in \boldsymbol{B}(X) :\ R(T) – \textit{замкнуто и } N(T) \subset R^{\infty}(T)\},$$
$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}(X) : = \{T \in \boldsymbol{B}(X) :\ R(T) – \textit{замкнуто и } N(T) \subset_{\mathrm{e}} R^{\infty}(T)\},$$
$$\boldsymbol{S}(X) : = \{T \in \boldsymbol{B}(X) :\ T \textit{ имеет обобщенный обратный и } N(T) \subset R^{\infty}(T)\},$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}(X) := \{T \in \boldsymbol{B}(X) : \ T \textit{ имеет обобщенный обратный и } N(T) \subset_{\mathrm{e}} R^{\infty}(T)\},$$
$$\boldsymbol{\Phi}(X) := \{T \in \boldsymbol{B}(X) : \ R(T) \textit{ – замкнуто и } \alpha(T)<\infty,\ \beta(T)<\infty\}.$$

Операторы класса $\boldsymbol{D}(X)$ называются *полурегулярными*, а класса $\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}(X)$ – *существенно полурегулярными*. По поводу условия $N(T) \subset_{\mathrm{e}} R^{\infty}(T)$ заметим, что если M и N – подпространства банахова пространства X, то запись $M \subset_{\mathrm{e}} N$, т.е. M *существенно содержится* в N, означает, что существует конечномерное подпространство $F \subset X$ такое, что $M \subset N + F$, что эквивалентно условию $\dim M/(M \cap N) < \infty$ (см., например, [4, с.116]). Операторы класса $\boldsymbol{S}(X)$ называются *регулярными*, а операторы класса $\boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}(X)$ – *существенно регулярными*. Наконец, операторы класса $\boldsymbol{\Phi}(X)$ называются *фредгольмовыми*.

Рассмотренные классы операторов порождают различные подмножества спектра, которые называются, соответственно, *спектром Апостола* $\sigma_{\gamma}(T)$, *существенным спектром Апостола* $\sigma_{\mathrm{e}\gamma}(T)$, *спектром Сафара* $\sigma_{\mathrm{s}}(T)$, *существенным спектром Сафара* $\sigma_{\mathrm{es}}(T)$ и *существенным спектром Фредгольма* $\sigma_{\mathrm{ef}}(T)$. Определяются они следующим образом:

$$\sigma_{\gamma}(T) := \{\lambda \in \boldsymbol{C} : \ T - \lambda I \notin \boldsymbol{D}(X) \},$$
$$\sigma_{\mathrm{e}\gamma}(T) := \{\lambda \in \boldsymbol{C} : \ T - \lambda I \notin \boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}(X) \},$$
$$\sigma_{\mathrm{s}}(T) := \{\lambda \in \boldsymbol{C} : \ T - \lambda I \notin \boldsymbol{S}(X) \},$$
$$\sigma_{\mathrm{es}}(T) := \{\lambda \in \boldsymbol{C} : \ T - \lambda I \notin \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}(X) \},$$
$$\sigma_{\mathrm{ef}}(T) := \{\lambda \in \boldsymbol{C} : \ T - \lambda I \notin \boldsymbol{\Phi}(X) \}.$$

Заметим, что, если пространство X – гильбертово, то $\sigma_{\gamma}(T) = \sigma_{\mathrm{s}}(T)$ и $\sigma_{\mathrm{e}\gamma}(T) = \sigma_{\mathrm{es}}(T)$. Однако спектры Апостола и Сафара в банаховом пространстве отличаются по своим свойствам при переходе к сопряженному оператору T^*, а именно, $\sigma_{\gamma}(T) = \sigma_{\gamma}(T^*)$, но $\sigma_{\mathrm{s}}(T^*) \subset \sigma_{\mathrm{s}}(T)$, причем вложение, вообще говоря, строгое [5, с.317], но если банахово пространство X – рефлексивно, то тогда будет справедливо равенство $\sigma_{\mathrm{s}}(T) = \sigma_{\mathrm{s}}(T^*)$.

Говорят, что оператор T, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y, имеет *обобщенный обратный* (или *псевдообратный*), если существует такой оператор $S : Y \to X$, что выполняется равенство $TST = T$. Заметим, что если для оператора $T \in \boldsymbol{B}(X, Y)$ существует оператор $S \in \boldsymbol{B}(Y, X)$ такой, что $TST = T$, то оператор T называется также *относительно регулярным*. Опишем основные свойства относительно регулярного оператора в банаховом пространстве, следуя, например, работе [6, теорема 1 в §1].

Л е м м а 1. *Пусть оператор* $T \in \boldsymbol{B}(X)$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(a) *Оператор T относительно регулярный тогда и только тогда, когда $N(T)$ и $R(T)$ – замкнутые дополняемые подпространства банахова пространства X.*

(b) *Если $TST = T$ для некоторого оператора $S \in \boldsymbol{B}(X)$, то TS – проектор на подпространство $R(T)$ и $I - ST$ – проектор на подпространство $N(T)$.*

(c) *Если S – обобщенный обратный оператор для T, т.е. $TST = T$, то тогда оператор $\tilde{S} = STS$ удовлетворяет следующим двум равенствам $T\tilde{S}T = T$ и $\tilde{S}T\tilde{S} = \tilde{S}$.*

В частности, из леммы 1 (a) следует, что для рассмотренных выше классов операторов справедливы включения $\boldsymbol{S}(X) \subset \boldsymbol{D}(X)$ и $\boldsymbol{S}_{\rm e}(X) \subset \boldsymbol{D}_{\rm e}(X)$. Класс относительно регулярных операторов включает многие хорошо известные типы операторов. В частности, если пространство X или Y конечномерно, то все операторы из $\boldsymbol{B}(X, Y)$ относительно регулярны. Если не накладывать ограничений на банаховы пространства, то все фредгольмовы операторы, а также левые и правые обратимые являются относительно регулярными.

Т е о р е м а 1. *Для существенного спектра Апостола $\sigma_{\rm e\gamma}(T)$, существенного спектра Сафара $\sigma_{\rm es}(T)$ и существенного спектра Фредгольма $\sigma_{\rm ef}(T)$ справедливы следующие включения*:

$$\sigma_{\rm e\gamma}(T) \subset \sigma_{\rm es}(T) \subset \sigma_{\rm ef}(T).$$

Эта теорема следует из того, что справедливы включения вида: $\boldsymbol{\Phi}(X) \subset \boldsymbol{S}_{\rm e}(X) \subset \boldsymbol{D}_{\rm e}(X)$, т.е. фредгольмовы операторы являются также и существенно регулярными операторами. Последнее утверждение вытекает из разложения Като для существенно полурегулярных операторов (см., [7, теорема 2.1]). Заметим также, что фредгольмовы операторы, вообще говоря, не являются регулярными, хотя они являются существенно регулярными. Отметим, что рассмотренные в теореме 1 включения, вообще говоря, строгие. Следующий пример показывает, что, вообще говоря, $\sigma_{\rm e\gamma}(T) \neq \sigma_{\rm es}(T)$ для оператора T, определенного на банаховом, но не гильбертовом пространстве X.

К о н т р п р и м е р 1. Пусть $X = \boldsymbol{c}_0 \times \boldsymbol{\ell}^\infty$ и рассмотрим оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$, задаваемый равенством

$$T((x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)) = ((0, 0, 0, \dots), (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)).$$

Тогда $N(T) = \{0\}$ и $N(T) \subset R^\infty(T)$, следовательно, $N(T) \subset_{\rm e} R^\infty(T)$, но $R(T)$ – замкнутое, но не дополняемое подпространство (см. подробности в [6, с.15]). Поэтому $0 \in \sigma_{\rm es}(T)$, но $0 \notin \sigma_{\rm e\gamma}(T)$ и, следовательно, $\sigma_{\rm e\gamma}(T) \neq \sigma_{\rm es}(T)$.

Относительно регулярный оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ называется *оператором типа Сафара*, если его нуль-пространство $N(T)$ содержится в его обобщенной области значений $R^\infty(T)$, т.е. $N(T) \subset \cap^\infty_{\rm n=1} R(T^n)$. Укажем на некоторые полезные свойства операторов типа Сафара, определенных на банаховом пространстве X [8, лемма 1].

Л е м м а 2. *Если* $T \in \boldsymbol{B}(X)$ *оператор типа Сафара, то тогда* $R^{\infty}(T)$ – *замкнутое подпространство в* X *и* $T(R^{\infty}(T)) = R^{\infty}(T)$.

Множество операторов типа Сафара, или регулярных операторов, выше было обозначено через $\boldsymbol{S}(X)$. Этот класс операторов впервые изучал P. Saphar [9]. В своей работе он сформулировал следующий вопрос: «*если оператор* $T \in \boldsymbol{S}(X)$ *и оператор* $A \in \boldsymbol{B}(X)$*, то при каких условиях на возмущающий оператор* $T - A \in \boldsymbol{S}(X)$?».

Заметим, что если X – гильбертово пространство, то тогда класс относительно регулярных операторов совпадает с классом *нормально разрешимых операторов*, т.е. операторов с замкнутой областью значений, а класс регулярных операторов $\boldsymbol{S}(X)$, или класс операторов типа Сафара, совпадает с классом полурегулярных операторов $\boldsymbol{D}(X)$ и, соответственно, класс существенно регулярных операторов $\boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}(X)$ совпадает с классом существенно полурегулярных операторов $\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}(X)$.

Напомним, что свойство нормальной разрешимости оператора, действующего в бесконечномерном банаховом пространстве, неустойчиво при компактных или малых по норме возмущениях, в чем можно убедиться на следующем простом примере. Действительно, нулевой оператор, обозначим его через θ, нормально разрешим, но $\theta - A$, где A – компактный оператор с $dim\, R(A) = \infty$, уже не является нормально разрешимым. На этом же примере можно показать, что свойство нормальной разрешимости не будет устойчиво и при малых возмущениях. Так, например, оператор $\theta - \varepsilon A$ не является нормально разрешимым при сколь угодно малом ε.

Обобщим вопрос Сафара так: «*если оператор* $T \in \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}(X)$ *и* $A \in \boldsymbol{B}(X)$*, то при каких условиях на возмущающий оператор* $T - A \in \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}(X)$?». В силу предыдущего замечания ответ на вопрос Сафара для существенно регулярных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, и строго сингулярных коммутирующих возмущений дан в работе [3, лемма 5] для исследованных в ней существенно полурегулярных операторов в более общем случае банахова пространства.

Заметим, что для ненулевых операторов общий результат о неустойчивости нормальной разрешимости без каких-либо ограничений на оператор в банаховом пространстве, получен в упоминавшемся выше результате М.А. Гольдмана. Вместе с тем, можно утверждать, что замкнутость области значений $R(T)$ устойчива при возмущениях линейного ограниченного оператора в банаховом пространстве произвольными непрерывными операторами конечного ранга, даже если $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ бесконечны [10, теорема 1]. В определенном смысле, мы имеем два крайних случая устойчивости. С одной стороны, если на нормально разрешимые операторы накладываются условия конечности на $\alpha(T)$ или $\beta(T)$, то для таких *полуфредгольмовых операторов* имеется широкий класс допустимых возмущающих операторов, сохраняющих замкнутость области значений. С другой стороны, если на нормально разрешимый оператор не наложено никаких ограничений, то соответствующие допустимые возмущающие операторы образуют весьма узкий класс даже в пространстве ограниченных операторов.

Сказанное для нормально разрешимых операторов можно перенести и на существенно регулярные операторы. Начнем с возмущений операторами конечного ранга.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $T \in \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}(X)$ *– существенно регулярный оператор и возмущение* A *– оператор конечного ранга, тогда* $T - A$ *также существенно регулярный оператор, т.е.* $T - A \in \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}(X)$.

В доказательстве теоремы можно воспользоваться аналогичным результатом для существенно полурегулярных операторов, из которого следует, что если T – существенно полурегулярный оператор и A – оператор конечного ранга, то возмущенный оператор $T - A$ тоже является существенно полурегулярным (см., например, [11, теорема 2], [12, следствие]).

Можно даже непосредственно показать, что если T – относительно регулярный оператор, то и $T - A$ тоже относительно регулярный оператор при возмущении оператором A конечного ранга. При этом используются следующие факты теории банаховых пространств. Если хотя бы одно из двух подпространств банахова пространства имеет или *конечную размерность*, или *конечную коразмерность*, то сумма этих подпространств замкнутое подпространство, причем условие конечности существенно для этого заключения. А также если $M = R(S)$ и прямая сумма $M \oplus N$ – замкнутое подпространство в банаховом пространстве X, для замкнутого подпространства N и для области значений ограниченного оператора S, то тогда подпространство M также замкнуто, причем существенно то, что $M = R(S)$, т.е. это область значений некоторого оператора S.

Заметим, что, вообще говоря, в формулировке теоремы 2 нельзя заменить условие существенно регулярный оператор на регулярный оператор. Первый класс операторов шире второго из-за условия существенного вложения $N(T) \subset_{\mathrm{e}} R^{\infty}(T)$, а не просто вложения $N(T) \subset R^{\infty}(T)$. Для проверки этого утверждения достаточно рассмотреть следующий пример.

К о н т р п р и м е р 2. Пусть $T = I$ – тождественный оператор на гильбертовом пространстве и пусть $A = P$ – одномерный ортогональный проектор. Тогда I – регулярный оператор, а $I - P$ – нерегулярный оператор, т.к. $N(I - P) \not\subset R^{\infty}(I - P)$, хотя он существенно регулярный оператор.

С л е д с т в и е 1. *Пусть оператор* $T \in \boldsymbol{B}(X)$, *тогда для возмущающих операторов конечного ранга* $A \in \boldsymbol{B}(X)$ *справедливо равенств*:

$$\sigma_{\mathrm{es}}(T - A) = \sigma_{\mathrm{es}}(T).$$

Укажем также на то, что аналогичное равенство с возмущающими операторами конечного ранга выполняется для существенного спектра Апостола [11, теорема 2] и существенного спектра Фредгольма [13, теорема 3.1 (i)].

Если возмущение A, вообще говоря, не является оператором конечного ранга, но достаточно малый по норме линейный оператор, то для того чтобы возмущенный оператор $T-A$, где обладал такими же свойствами, как и оператор T, необходимо наложить на возмущение A дополнительное ограничение. Таким ограничением в следующей теореме является требование перестановочности возмущения A с оператором T, т.е. справедливость равенства $AT = TA$. Отметим существенность условия коммутируемости для устойчивости свойства существенной полурегулярности операторов при возмущении их достаточно малыми по норме операторами [3, лемма 2 и контрпример 1]. Сначала сформулируем результат о возмущении операторов типа Сафара малыми по норме операторами.

Л е м м а 3. *Пусть* $T \in \boldsymbol{S}(X)$ *– оператор типа Сафара, т.е. регулярный оператор с обобщенным обратным* S. *Тогда, для каждого оператора* $A \in \boldsymbol{B}(X)$ *такого, что* $\|A\| < \|S\|^{-1}$ *и* $A(R^{\infty}(T)) \subseteq R^{\infty}(T)$, *возмущенный оператор* $T-A$ *является оператором типа Сафара, т.е.* $T-A \in \boldsymbol{S}(X)$.

Заметим, что если, например, оператор A коммутирует с оператором T, т.е. $AT = TA$, то для него выполняется требуемое включение $A(R^{\infty}(T)) \subset R^{\infty}(T)$. Доказательство этого утверждения есть в работах [4, лемма 2.12], [6, теорема 9 в §5], [8, теорема 3].

Т е о р е м а 3. *Пусть* $T \in \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}(X)$ *– существенно регулярный оператор. Тогда существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для любого возмущения* $A \in \boldsymbol{B}(X)$ *перестановочного с оператором* T, *если* $\|A\| < \varepsilon$, *то* $T-A$ *также существенно регулярный оператор, т.е.* $T-A \in \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}(X)$.

В доказательстве теоремы используется лемма 3. В теореме в качестве ε можно взять число $\|S\|^{-1}$, где S – обобщенный обратный к T, т.е. $TST = T$. Кроме того, доказательство теоремы опирается на результат Гольдмана-Крачковского [14, теорема 1], который в принятых нами обозначениях означает, что из включения $N(T) \subset_{\mathrm{e}} R^{\infty}(T)$ следует включение $N(T-A) \subset_{\mathrm{e}} R^{\infty}(T-A)$ для достаточно малого коммутирующего возмущения. Обратим также внимание на существенность условия перестановочности операторов T и S в теореме 3 для устойчивости свойства включения ядра оператора в обобщенную область значений. В этом можно убедиться с помощью следующего примера.

К о н т р п р и м е р 3. Пусть X – гильбертово пространство, в котором полная ортонормированная система расположена в виде бесконечной прямоугольной матрицы (e_{ij}), где $i, j = 1, 2, 3, \ldots$. Определим на X операторы T и $A = -\varepsilon A_0$, $\varepsilon > 0$, так, что $Te_{i1} = 0$, $Te_{ij} = e_{ij-1}$, для любого $i = 1, 2, 3, \ldots$ и $j = 2, 3, \ldots$, и $A_0e_{i1} = 0$, $A_0e_{ij} = e_{ij}$ для любого $i = 1, 2, 3, \ldots$ и $j = 2, 3, \ldots$ [15, с.27]. Тогда $TA \neq AT$, $R^{\infty}(T) = X$ и $N(T) \subset R^{\infty}(T)$, а следовательно, и $N(T) \subset_{\mathrm{e}} R^{\infty}(T)$. Поэтому T – существенно полурегулярный оператор, а так как пространство X – гильбертово, то T – существенно регулярный оператор, но при этом не выполняется включение $N(T-A) \subset_{\mathrm{e}} R^{\infty}(T-A)$.

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $T \in \boldsymbol{B}(X)$, *тогда для некоторых классов операторов при достаточно малых по норме возмущающих операторов* $A \in \boldsymbol{B}(X)$, *коммутирующих с* T, *справедливо равенство*:

$$\sigma_{\mathrm{es}}(T - A) = \sigma_{\mathrm{es}}(T).$$

Заметим, что аналогичное равенство с возмущающим коммутирующим оператором, выполняется для существенного спектра Апостола, как следствие [3, теорема 3], и для существенного спектра Фредгольма даже без условия коммутируемости.

Рассмотрим, наконец, в качестве возмущений квазинильпотентные операторы, малость которых выражается в терминах малости его спектра. Напомним, что оператор A называется *квазинильпотентным* если его спектральный радиус $r(A) = 0$, где $r(A) = \lim \|A^{\mathrm{n}}\|^{1/\mathrm{n}}$, или, другими словами, его спектр $\sigma(A)$ состоит только из одной точки нуль.

Л е м м а 4. *Пусть* $T \in \boldsymbol{S}(X)$ *– оператор типа Сафара. Если* $A \in \boldsymbol{B}(X)$ *– квазинильпотентный оператор, перестановочный с оператором* T, $AT = TA$, *то тогда* $T - A$ *тоже оператор типа Сафара, т.е.* $T - A \in \boldsymbol{S}(X)$.

Доказательство леммы вытекает из следующих вспомогательных утверждений. Во-первых, если $T \in \boldsymbol{S}(X)$ и $TST = T$ для некоторого $S \in \boldsymbol{B}(X)$, то тогда $T^{\mathrm{n}} \in \boldsymbol{S}(X)$ и справедливо равенство $T^{\mathrm{n}}S^{\mathrm{n}}T^{\mathrm{n}} = T^{\mathrm{n}}$, для всех $\mathrm{n} \in \boldsymbol{N}$ [5, предложение 2]. Во-вторых, полагая $\widetilde{S}_{\mathrm{n}} = S^{\mathrm{n}}T^{\mathrm{n}}S^{\mathrm{n}}$ (см. лемму 1 (c)), из оценки $\|A^{\mathrm{n}}\| < \|\widetilde{S}_{\mathrm{n}}\|^{-1}$, полученной в силу квазинильпотентности оператора A, и леммы 3 следует, что $T^{\mathrm{n}} - A^{\mathrm{n}} \in \boldsymbol{S}(X)$ для всех $\mathrm{n} \in \boldsymbol{N}$. Наконец, осталось воспользоваться тем, что если для ограниченных коммутирующих операторов $B, D \in \boldsymbol{B}(X)$ для их произведения справедливо $BD \in \boldsymbol{S}(X)$, то тогда $B, D \in \boldsymbol{S}(X)$ (см., например, [16, теорема 10] или [17, теорема 5]).

Т е о р е м а 4. *Пусть* $T \in \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}(X)$ *– существенно регулярный оператор и возмущение* A *– квазинильпотентный оператор, перестановочный с* T, $AT = TA$, *тогда* $T - A$ *также существенно регулярный оператор, т.е.* $T - A \in \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}(X)$.

Для доказательства теоремы можно воспользоваться леммой 4, а также справедливостью утверждения этой теоремы для существенно полурегулярных операторов [18, теорема 6]. Заметим, что квазинильпотентный оператор, вообще говоря, не является компактным оператором. Простой пример некомпактного квазинильпотентного оператора в специальном банаховом пространстве вида $X \times X$, для банахова пространства X с нормой $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$, приведен в работе [19, с.35]. Однако существование такого оператора в произвольном банаховом пространстве остается открытым вопросом.

К о н т р п р и м е р 4. Определим оператор $A \in \boldsymbol{B}(X^2)$, где $X^2 = X \times X$, с помощью равенства $A(x, y) = (y, 0)$, тогда очевидно, что оператор A некомпактный, но так как $A^2 = 0$, то он квазинильпотентный.

С л е д с т в и е 3. *Пусть* $T \in \boldsymbol{B}(X)$, *тогда для квазинильпотентных возмущающих операторов* $A \in \boldsymbol{B}(X)$, *коммутирующих с* T, *справедливо равенство*:

$$\sigma_{\mathrm{es}}(T - A) = \sigma_{\mathrm{es}}(T).$$

Отметим также, что аналогичное равенство с возмущающим коммутирующим квазинильпотентным оператором выполняется для существенного спектра Апостола [18, теорема 6] и для существенного спектра Фредгольма. Последнее утверждение следует из специальных свойств для полуфредгольмовых операторов классов $\boldsymbol{\Phi}_{-}(X)$ и $\boldsymbol{\Phi}_{+}(X)$, описанных в работе [20, с.135 и с.139].

Литература

1. Е р о в е н к о В. А. Функциональный анализ: спектральные и фредгольмовы свойства линейных операторов. Мн., 2002.
2. Г о л ь д м а н М. А. // Докл. АН СССР. 1955. Т.100, №2. С.201–204.
3. Е р о в е н к о В. А., М а р т о н М. В. // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т.48, №6. С.16–20.
4. K o r d u l a V., M ü l l e r V. // Stud. Math. 1996. Vol.119, №2. P.109–128.
5. S c h m o e g e r Ch. // J. Math. Anal. Appl. 1993. Vol.175, №1. P.315–320.
6. C a r a d u s S. R. Generalized Inverses and operator theory. Kingston, 1978.
7. R a k o č e v i ć V. // Proc. Edinburgh. Math. Soc. 1993. Vol.36. P.197–209.
8. S c h m o e g e r Ch. // Port. Math. 1994. Vol.51, №4. P.617–628.
9. S a p h a r P. // Bull. Soc. Math. France. 1964. Vol.92. P.363–384.
10. Г о л ь д м а н М. А., К р а ч к о в с к и й С. Н. // Докл. АН СССР. 1967. Т.174, №4. С.743–746.
11. K o r d u l a V. // Proc. Roy. Irish. Acad. 1996. Vol.96A, №1. P.105–109.
12. K o l i h a Y. Y., M b e k h t a M., M ü l l e r V. // Stud. Math. 1998.Vol.130, №2. P.193–198.
13. L a t r a c h K., D e h j c i A. // J. Math. Anal. Appl. 2001. Vol.259. P.277–301.
14. Г о л ь д м а н М. А., К р а ч к о в с к и й С. Н. // Докл. АН СССР. 1974. Т.215, №6. С.1281–1284.
15. Г о л ь д м а н М. А., К р а ч к о в с к и й С. Н. // Докл. АН СССР. 1978. Т.242, №1. С.25–27.
16. H a r t e R. // J. Operator Theory. 1991. Vol.25. P.399–416.
17. S c h m o e g e r Ch. // Rend. Math. Ser. VII. 1994. Vol.14. P.533–541.
18. K o r d u l a V., M ü l l e r V. // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol.124, №10. P.3055–3061.
19. C a r a d u s S. R., P f a f f e n b e r g e r W. E., Y o o d B. Calkin algebras and algebras of operator on Banach spaces. N.Y., 1974.
20. M b e k h t a M., M ü l l e r V. // Stud. Math. 1996. Vol.119, №2. P.129–147.

УДК 517.984

В. А. Еровенко, О. В. Гулина. **Об устойчивости существенно регулярных операторов и соответствующего спектра Сафара** // Доклады НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 6. С. 27–32.

Рассмотрены свойства существенно регулярных ограниченных операторов в банаховом пространстве, занимающих промежуточное положение между существенно полурегулярными и фредгольмовыми операторами. Получены теоремы устойчивости существенного спектра Сафара, порожденного существенно регулярными операторами, при различных возмущениях оператора.

Библиогр. – 20 назв.

EROVENKO V. A., GULINA O. V.
erovenko@bsu.by, gulina_o@mail.ru

ABOUT STABILITY OF THE ESSENTIAL REGULAR OPERATORS AND CORRESPONDING SAPHAR SPECTRUM

Summary

Bounded essential regular operators in Banach Space are discussed about as a generalization of Fredholm operators. The paper is devoted to the investigation of the stability of the Saphar essential spectrum under different perturbations.