равенство (3) и первое равенство (4), а также третье равенство (3) и третье равенство (4) дают условия *б*). Преобразование второго, четвертого, пятого и шестого из равенств (4) также приводит к условиям *б*).

Теорема 1. *Пусть функция* a_3 *обращается в нуль в изолированных точках, в которых функции* $(a_0+\bar{a}_0)/a_3$, $(a_1+\bar{a}_1)/a_3$, $(a_2+\bar{a}_2)/a_3$ *доопределены до непрерывной дифференцируемости и для коэффициентов системы* (1) *выполняются условия леммы* 2. *Тогда отражающая функция этой системы имеет вид* (2), *где* $m_0=(a_0+\bar{a}_0)/a_3$, $m_1=(a_1+\bar{a}_1)/a_3$, $m_2=(a_2+\bar{a}_2)/a_3$.

Доказательство очевидно.

Знание отражающей функции 2ω-периодической дифференциальной системы, как известно [1, 2], позволяет определять начальные данные периодических решений. Эти данные определяются решениями алгебраической системы

$$F(-\omega,x)=x. \tag{5}$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть для* 2ω*-периодической системы* (1) *выполнены условия теоремы* 1. *Тогда эта система либо не имеет периодических решений, либо таких решений бесконечно много, но не все, либо все решения системы периодические.*

Доказательство. Система алгебраических уравнений (5) в нашем случае принимает вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y+m_0(\omega)+m_1(\omega)x+m_2(\omega)x^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{6}$$

откуда следует, что первое уравнение системы является тождеством. Следовательно, решения системы (6) определяются решениями квадратного уравнения

$$(a_2(\omega)+a_2(\omega))x^2+(a_1(\omega)+a_1(\omega)-a_3(\omega))x+(a_0(\omega)+a_0(\omega))=0. \tag{7}$$

Если уравнение (7) не имеет решений, то система (1) не имеет периодических решений. Пусть уравнение (7) имеет одно x_1 решение, или два x_1, x_2 решения. Тогда все решения дифференциальной системы (1), начинающиеся на прямых $t=-\omega$, $x=x_1$ или $t=-\omega$, $x=x_1$ и $t=-\omega$, $x=x_2$ 2ω-периодические. Если же все коэффициенты уравнения (7) есть нули, то все решения 2ω-периодической системы (1) являются периодическими.

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений.* Мн.: Изд-во «Университетское», 1981. 76 с.

2. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. 196 с.

ФУНКЦИЯ ДЮЛАКА — ЧЕРКАСА ДЛЯ СТРУКТУРНО НЕУСТОЙЧИВОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ НА ЦИЛИНДРЕ

А.А. Гринь, С.В. Рудевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

grin@grsu.by, serhiorsv@gmail.com

Рассмотрим на цилиндре $Z=\{(\varphi,y):\ \varphi\in[0,2\pi],\ \ y\in\mathbb{R}\}$ автономную систему

$$\frac{d\varphi}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=h_0(\varphi,\mu)+h_1(\varphi,\mu)y+h_2(\varphi,\mu)y^2+h_3(\varphi,\mu)y^3, \tag{1}$$

зависящую от вещественного параметра $\mu \in J \subseteq \mathbb{R}$, где функции $h_i(\varphi,\mu) : [0,2\pi] \times J \to \mathbb{R}$ являются непрерывными по обеим переменным и 2π-периодическими по первой переменной.

В работах [1, 2] был предложен новый подход к признаку Дюлака для нелокальной оценки числа и локализации предельных циклов, охватывающих цилиндр (циклы второго рода), который основан на понятии функции Дюлака — Черкаса в некоторой области $D \subseteq Z$.

Определение 1. Функция $\Psi : D \times J \to \mathbb{R}$ называется функцией Дюлака — Черкаса системы (1) в области D для $\mu \in J$, если выполняются условия:

(i) $\Psi(\varphi,y,\mu) = \Psi(\varphi+2\pi,y,\mu)$ $\forall(\varphi,y,\mu) \in D \times J$;

(ii) множество $W_\mu = \{(\varphi,y) \in D: \ \Psi(\varphi,y,\mu) = 0\}$ имеет нулевую меру;

(iii) существует действительное число $k \neq 0$ такое, что $\forall(\varphi,y,\mu) \in D \times J$, выполняется неравенство

$$\Phi(\varphi,y,\mu,k) := (\operatorname{grad}\Psi, f) + k\Psi \operatorname{div} f \geqslant 0 \ \ (\leqslant 0),$$

где f — векторное поле системы (1), а множество $V_{\mu,k} := \{(\varphi,y) \in D: \ \Phi(\varphi,y,\mu,k) = 0\}$ имеет нулевую меру.

Из определения следует, что кривые, принадлежащие множеству W_μ, трансвенсально пересекаются траекториями системы (1), но не могут пересекаться предельными циклами. Этот факт удобно применять для оценки числа предельных циклов второго рода в области D, границы которой состоят из двух замкнутых кривых: верхней $\triangle_u$ и нижней $\triangle_l$, охватывающих цилиндр и не имеющих общих точек.

Не теряя общности предположим, что множество W_μ состоит в D из s замкнутых кривых (овалов) $W_{\mu,1}, W_{\mu,2}, \ldots, W_{\mu,s}$, окружающих цилиндр Z, которые расположены в следующем порядке: $W_{\mu,i}$ находиться выше $W_{\mu,i+1}$. Область между $W_{\mu,i}$ и $W_{\mu,i+1}$ обозначим S_i^μ, область между $\triangle_u$ и $W_{\mu,1}$ обозначим S_0^μ, область между $\triangle_l$ и $W_{\mu,s}$ обозначим S_s^μ.

Теорема 1. *Пусть множество W_μ в области D состоит из s замкнутых кривых $W_{\mu,1}, W_{\mu,2}, \ldots, W_{\mu,s}$. Если у системы (1) нет точек покоя в области D, то она имеет по крайней мере s, но не более $s+2$ предельных циклов второго рода в области D, а именно: области S_i^μ, $i = 1,\ldots,s-1$, содержат по единственному предельному циклу второго рода, каждая из областей S_0^μ и S_s^μ также может содержать по одному предельному циклу второго рода.*

Предельный цикл в S_i^μ является простым и асимптотически устойчивым (не устойчивым), если в этой области имеет место неравенство $k\Phi(\varphi,y,\mu,k)\Psi(\varphi,y,\mu) < 0$ (> 0).

Такой подход был эффективно применен для исследования предельных циклов уравнения Абеля, включающего бифуркационные значения параметра [3].

В докладе будут представлены результаты оценки числа предельных циклов для структурно неустойчивой системы (1), в которой

$$h_2(\varphi,\mu) = 3h_3(\varphi,\mu)(a + b\cos\varphi + c\sin\varphi),$$

$$h_1(\varphi,\mu) = 3h_3((b^2-c^2)\cos^2\varphi + 2a(b\cos\varphi - c\sin\varphi) + cb\sin 2\varphi + c^2 + a^2 - \frac{1}{2}\mu) - \frac{3}{2}(c\cos\varphi - b\sin\varphi),$$

$$h_0(\varphi,\mu) = \frac{1}{2}(a + b\cos\varphi + c\sin\varphi)(-c\cos\varphi + b\sin\varphi + (2(a + b\cos\varphi + c\sin\varphi)^2 - 3\mu)h_3(\varphi,\mu)), \quad (2)$$

а параметр μ может принимать бифуркационные значения, a, b, c — произвольные действительные параметры.

Теорема 2. *Функция*

$$\Psi = (a + b\cos\varphi + c\sin\varphi + y)^2 - \mu$$

является функцией Дюлака — Черкаса для системы (1) на цилиндре Z при всех $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$, если выполняется условие

$$\Phi(\varphi,y,\mu,k) \equiv \Phi_0(\varphi,\mu) = -\mu(c\cos\varphi - b\sin\varphi + h_3(\varphi,\mu)) > 0 \ \ (< 0). \quad (3)$$

Следствие 1. *Если справедливо условие* (3), *то система* (1) *в случае* (2) *имеет не более одного предельного цикла второго рода при* $\mu < 0$ *и имеет не более трех предельных цикла второго рода при* $\mu > 0$.

Точное число предельных циклов зависит от существования точек покоя системы (1) в области D, количество и расположение которых на оси $O\varphi$ определяется из уравнения $h_0(\varphi, \mu) = 0$. Это уравнение при соответствующем выборе значений коэффициентов a, b, c и функции $h_3(\varphi, \mu)$ может иметь до 6 различных действительных корней или не иметь их вообще. В частности, доказан следующий результат.

Теорема 3. *Если существуют действительные числа* A *и* C, *при которых справедливы следующие условия:*

$$b = c = \mu C, \quad a = c^2\mu^2 + A^2, \quad C > 1, \quad A \gg C, \quad h_3(\varphi, \nu) > 2C^2 + 1, \tag{4}$$

то система (1) *в случае* (2) *не имеет точек покоя.*

Таким образом, получена следующая оценка числа предельных циклов.

Теорема 4 *Система* (1) *при выполнении условий* (2) – (4) *имеет единственный предельный цикл второго рода* LC *при* $\mu < 0$, *который является устойчивым* (*неустойчивым*) *в случае* $h_3(\varphi, \mu) < 0$ (> 0) *и имеет точно три простых предельных цикла второго рода* LC_1, LC_2, LC_3 *при* $\mu > 0$. *Предельные циклы* LC_1 *и* LC_3 *являются устойчивыми* (*неустойчивыми*), *а цикл* LC_2 *является неустойчивым* (*устойчивым*) *в случае* $h_3(\varphi, \mu) > > 0$ (< 0).

Литература

1. Черкас Л. А., Гринь А. А. *Функция предельных циклов второго рода для автономных ситем на цилиндре* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 4. С. 462–470.
2. Cherkas L. A., Grin A. A., Schneider K. R. *A new approach to study limit cycles on a cylinder, Dynamics of continuous, dicrete and impulsive systems* // Series A: Mathematical Analysis. 2011. V. 18. P. 839—851.
3. Гринь А. А., Рудевич С. В. *Оценка числа предельных циклов для одного уравнения Абеля* // Весн. Гродненскага дзярж. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. 2015. № 2(192). С. 28–35.

О СТЕПЕНИ НЕПРЕРЫВНОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И.Н. Грод

Тернопольский национальный педагогический университет, Тернополь, Украина

grod@tnpu.edu.ua

Исследованию инвариантных тороидальных многообразий динамических систем посвящено большое количество работ, в частности [1–3]. Введенное в работе [2] понятие функции Грина задачи об инвариантном торе позволило с единой точки зрения изложить теорию возмущения как дифференцируемых, так и непрерывных инвариантных многообразий и привело к необходимости изучения свойств гладкости этих функций. Изучению этого вопроса также посвящена и настоящая работа.

В теории нелинейных многочастотных колебаний возникают системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi) \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$ — m-мерный тор, $a(\varphi)$, $A(\varphi)$, $f(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, $C^0(\mathcal{T}_m)$ — пространство непрерывных по совокупности переменных φ- и 2π-периодических по каждой переменной φ_j, $j = \overline{1, m}$.