Литература

1. Амелькин В. В. *Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения.* М.: Едиториал УРСС, 2010.

2. Василевич Н. Д. *Об уравнениях Пфаффа с алгебраическими особенностями* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1981. № 5. С. 28–32.

ПЕРИОДИЧНОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

П.П. Вересович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
Petr.Veresovich@mail.ru

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)x^2+a_3(t)y, \quad \dot{y} = b_0(t)+b_1(t)x+b_2(t)x^2+b_3(t)x^3+b_4(t)y+b_5(t)xy. \tag{1}$$

в которой функции $a_i(t)$ $(i = 0,1,2,3)$, $b_j(t)$ $(j = 0,1,2,3,4,5)$ являются непрерывными, что обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши.

Выясним условия, при выполнении которых отражающая функция этой системы [1, 2] будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} F_1(t,x,y) \\ F_2(t,x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+m_0(t)+m_1(t)x+m_2(t)x^2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

В дальнейшем для любой функции $f(t)$ введем обозначения $f \equiv f(t)$, $\bar{f} \equiv f(-t)$. Справедлива

Лемма 1. *Функция* (2) *будет отражающей функцией системы* (1) *тогда и только тогда, когда выполняются две группы тождеств*

$$a_3+\overline{a_3}=0, \quad a_1+\overline{a_1}+\overline{a_3}m_1=0, \quad a_2+\overline{a_2}+\overline{a_3}m_2=0, \quad a_0+\overline{a_0}+\overline{a_3}m_0=0, \tag{3}$$

и

$$b_4+m_1a_3+\bar{b}_4=0, \quad \dot{m}_1+b_1+m_1a_1+2m_2a_0+\bar{b}_1+\overline{b_4}m_1+\overline{b_5}m_0=0, \quad b_5+2m_2a_3+\bar{b}_5=0,$$
$$\dot{m}_2+b_2+m_1a_2+2m_2a_1+\overline{b_2}+\overline{b_4}m_2+\overline{b_5}m_1=0, \quad b_3+\bar{b}_3+2m_2a_2+\overline{b_5}m_2=0,$$
$$\dot{m}_0+b_0+m_1a_0+\bar{b}_0+\bar{b}_4m_0=0. \tag{4}$$

Для обоснования леммы достаточно применить основное соотношение

$$F_t+F_xX(t,x)+X(-t,F)=0, \quad F(0,x)=x$$

для отражающей функции $F(t,x)$ системы $\dot{x}=X(t,x)$ [1, 2].

Упростим условия (3), (4). Справедлива

Лемма 2. *Пусть выполняются условия леммы* 1. *Тогда коэффициенты* m_i $(i = 0,1,2)$ *отражающей функции определяются вторым, третьим и четвертым равенствами* (3), *а коэффициенты системы связаны условиями:*

а) a_3 *— функция нечетная;*

б) $(a_1+\bar{a}_1)+(b_4+\bar{b}_4)=0$, $2(a_2+\bar{a}_2)+(b_5+\bar{b}_5)=0$.

Выполнение условия *а*) следует из первого равенства (3), а следующими тремя равенствами (3) определяются коэффициенты отражающей функции. С учетом условия *а*) второе равенство (3) и первое равенство (4), а также третье равенство (3) и третье равенство (4) дают условия *б*). Преобразование второго, четвертого, пятого и шестого из равенств (4) также приводит к условиям *б*).

Теорема 1. *Пусть функция* a_3 *обращается в нуль в изолированных точках, в которых функции* $(a_0+\bar a_0)/a_3$, $(a_1+\bar a_1)/a_3$, $(a_2+\bar a_2)/a_3$ *доопределены до непрерывной дифференцируемости и для коэффициентов системы* (1) *выполняются условия леммы* 2. *Тогда отражающая функция этой системы имеет вид* (2), *где* $m_0=(a_0+\bar a_0)/a_3$, $m_1=(a_1+\bar a_1)/a_3$, $m_2=(a_2+\bar a_2)/a_3$.

Доказательство очевидно.

Знание отражающей функции 2ω-периодической дифференциальной системы, как известно [1, 2], позволяет определять начальные данные периодических решений. Эти данные определяются решениями алгебраической системы

$$F(-\omega,x)=x. \tag{5}$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть для* 2ω*-периодической системы* (1) *выполнены условия теоремы* 1. *Тогда эта система либо не имеет периодических решений, либо таких решений бесконечно много, но не все, либо все решения системы периодические.*

Доказательство. Система алгебраических уравнений (5) в нашем случае принимает вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y+m_0(\omega)+m_1(\omega)x+m_2(\omega)x^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{6}$$

откуда следует, что первое уравнение системы является тождеством. Следовательно, решения системы (6) определяются решениями квадратного уравнения

$$(a_2(\omega)+a_2(\omega))x^2+(a_1(\omega)+a_1(\omega)-a_3(\omega))x+(a_0(\omega)+a_0(\omega))=0. \tag{7}$$

Если уравнение (7) не имеет решений, то система (1) не имеет периодических решений. Пусть уравнение (7) имеет одно x_1 решение, или два x_1, x_2 решения. Тогда все решения дифференциальной системы (1), начинающиеся на прямых $t=-\omega$, $x=x_1$ или $t=-\omega$, $x=x_1$ и $t=-\omega$, $x=x_2$ 2ω-периодические. Если же все коэффициенты уравнения (7) есть нули, то все решения 2ω-периодической системы (1) являются периодическими.

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений.* Мн.: Изд-во «Университетское», 1981. 76 с.

2. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. 196 с.

ФУНКЦИЯ ДЮЛАКА — ЧЕРКАСА ДЛЯ СТРУКТУРНО НЕУСТОЙЧИВОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ НА ЦИЛИНДРЕ

А.А. Гринь, С.В. Рудевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
grin@grsu.by, serhiorsv@gmail.com

Рассмотрим на цилиндре $Z=\{(\varphi,y):\ \varphi\in[0,2\pi],\ \ y\in\mathbb{R}\}$ автономную систему

$$\frac{d\varphi}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=h_0(\varphi,\mu)+h_1(\varphi,\mu)y+h_2(\varphi,\mu)y^2+h_3(\varphi,\mu)y^3, \tag{1}$$