$$0 = \theta(x) = \rho(x) < \hat{\nu}^\bullet(x) = \hat{\gamma}^\bullet(x) = \hat{\omega}(x)^\bullet = \infty,$$

$$0 = \gamma(x) = \rho(x) < \hat{\theta}^\bullet(x) = \hat{\nu}^\bullet(x) = \hat{\omega}(x)^\bullet = \infty,$$

$$0 = \theta(x) = \nu(x) = \rho(x) < \hat{\gamma}^\bullet(x) = \hat{\omega}(x)^\bullet = \infty,$$

$$0 = \theta(x) = \gamma(x) = \rho(x) < \hat{\nu}^\bullet(x) = \hat{\omega}(x)^\bullet = \infty,$$

$$0 = \theta(x) = \nu(x) = \gamma(x) = \rho(x) < \hat{\omega}(x)^\bullet = \infty.$$

Особенности уравнения второго порядка. Во множествах $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $\mathcal{M}^n$ можно выделить подмножества $\widetilde{\mathcal{E}}^n$ и $\mathcal{E}^n$ неограниченных и соответственно ограниченных систем, отвечающих каждое одному линейному *уравнению* n-го порядка.

Теорема 5. *Для любого решения* $x \in \mathcal{S}(A)$ *любой системы* $A \in \widetilde{\mathcal{E}}^2$ *верны соотношения*

$$\tilde{\theta}(x) = \tilde{\nu}(x) = \tilde{\gamma}^\circ(x) = \tilde{\omega}^\circ(x) = \tilde{\rho}^\circ(x) \leqslant \tilde{\gamma}^\bullet(x) = \tilde{\omega}^\bullet(x) = \tilde{\rho}^\bullet(x),$$

а в случае $A \in \mathcal{E}^2$ *— даже равенства*

$$\tilde{\theta}(x) = \tilde{\nu}(x) = \tilde{\gamma}(x) = \tilde{\omega}(x) = \tilde{\rho}(x).$$

Единственное неравенство теоремы 5, которое обращается в равенство для ограниченного уравнения второго порядка, в случае произвольного неограниченного уравнения второго порядка уже *нельзя заменить* равенством, что и подтверждает

Теорема 6. *Существует система* $A \in \widetilde{\mathcal{E}}^2$, *имеющая решение* $x \in \mathcal{S}(A)$ *с точными показателями*

$$0 = \theta(x) = \nu(x) < \gamma^\bullet(x) = \omega^\bullet(x) = \rho^\bullet(x) = \infty.$$

Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения* // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.

2. Сергеев И. Н. *Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. № 6. С. 21–26.

3. Сергеев И. Н. *Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы* // Изв. РАН. Сер. математическая. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172.

4. Сергеев И. Н. *Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем* // Матем. сб. 2013. Т. 204, № 1. С. 119–138.

5. Сергеев И. Н. *Свойства характеристических частот линейного уравнения произвольного порядка* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 414–442.

6. Сергеев И. Н. *Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361.

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МАТРИЦ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА ДЛЯ ЧЕТЫРЕХ И ПЯТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Л.А. Хвощинская

Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь
ludmila.ark@gmail.com

Рассматривается проблема Римана определения системы двух функций $Y(z) = (y_1, y_2)$, которая при обходе вокруг особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = \infty$ ($n = 3$ или $n = 4$) испытывает линейные преобразования $Y \to V_k Y$ с помощью постоянных невырожденных матриц

V_k второго порядка, образующих группу монодромии. Решение этой проблемы сводится к решению регулярной системы дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{dY}{dz} = Y \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{z - a_k}, \tag{1}$$

где U_k — дифференциальные матрицы, подлежащие определению. Нетрудно заметить, что если Y — решение проблемы Римана, а C — постоянная невырожденная матрица, то YC также является решением этой проблемы. Поэтому дифференциальные матрицы определяются неоднозначно, а с точностью до преобразования подобия.

Пусть $n = 3$. Обозначая α_k, β_k — характеристические числа матриц V_k $(k = 1, 2, 3, 4)$, α_{12}, β_{12} и α_{23}, β_{23} — характеристические числа матриц V_1V_2 и V_2V_3, находим числа

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \alpha_k, \quad \sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \beta_k, \quad \rho_{j,j+1} = \frac{1}{2\pi i} \ln \alpha_{j,j+1}, \quad \sigma_{j,j+1} = \frac{1}{2\pi i} \ln \beta_{j,j+1}, \quad j = 1, 2,$$

$$\tau_1 = \rho_{23}\sigma_{23}, \quad \tau_3 = \rho_{12}\sigma_{12}, \quad \tau_2 = \rho_1\sigma_1 + \rho_2\sigma_2 + \rho_3\sigma_3 + \rho_4\sigma_4 - \tau_1 - \tau_3.$$

Выбор ветвей ρ_k и σ_k $(k = 1, 2, 3)$ зависит от выбора класса функций, в котором ищется решение, а ветви $\rho_4, \sigma_4, \rho_{12}, \sigma_{12}, \rho_{23}, \sigma_{23}$ выбираются из условий

$$\sum_{k=1}^{4} (\rho_k + \sigma_k) = 0, \quad \rho_{12} + \sigma_{12} = \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2, \quad \rho_{23} + \sigma_{23} = \rho_2 + \sigma_2 + \rho_3 + \sigma_3.$$

Воспользовавшись формулой логарифмирования произведения трех невырожденных матриц второго порядка [2], получим

Утверждение 1. *Если матрицы 2-го порядка V_1, V_2, V_3, V_4 образуют группу монодромии и $\rho_4 \neq \sigma_4$, то решение проблемы Римана удовлетворяет системе уравнений* (1) *с дифференциальными матрицами*

$$U_k = \Bigg(\begin{matrix} s_k & \gamma_k / c_k \\ c_k & \rho_k + \sigma_k - s_k \end{matrix} bigg), \quad k = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где

$$s_k = \frac{1}{\rho_4 - \sigma_4} [\rho_4(\sigma_4 + \rho_k + \sigma_k) + \rho_k\sigma_k - \tau_k], \quad \gamma_k = -(s_k - \rho_k)(s_k - \sigma_k), \quad k = 1, 2, 3,$$

$$t = \frac{1}{2\gamma_1} (\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_3 \pm \sqrt{(\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_3)^2 - 4\gamma_1\gamma_3}),$$

$c_1 = c$, $c_2 = -(1 + t)c$, $c_3 = ct$, c *— произвольная постоянная.*

Эти формулы согласуются с формулами, полученными ранее в работе [3] другим способом.

При $n = 4$, то кроме логарифмов $\rho_{j,j+1}, \sigma_{j,j+1}$ характеристических чисел матриц V_jV_{j+1} $(j = 1, 2, 3)$, находим логарифмы $\rho_{j,j+1,j+2}$, $\sigma_{j,j+1,j+2}$ характеристических чисел матриц $V_jV_{j+1}V_{j+2}$ $(j = 1, 2)$, а также числа

$$\tau_1^* = \rho_{234}\sigma_{234}, \quad \tau_4^* = \rho_{123}\sigma_{123}, \quad \tau_2^* = \rho_5\sigma_5 + \rho_1\sigma_1 + \rho_2\sigma_2 + \rho_{34}\sigma_{34} - \rho_{12}\sigma_{12} - \tau_1^*,$$

$$\tau_3^* = \rho_5\sigma_5 + \rho_3\sigma_3 + \rho_4\sigma_4 + \rho_{12}\sigma_{12} - \rho_{34}\sigma_{34} - \tau_4^*.$$

Тогда справедливо

Утверждение 2. *Если матрицы 2-го порядка* $V_1, V_2, \ldots, V_5$ *образуют группу монодромии и* $\rho_5 \neq \sigma_5$, *то решение проблемы Римана удовлетворяет системе* (1) *с дифференциальными матрицами вида* (2), *где*

$$s_k = \frac{1}{\rho_5 - \sigma_5}[\rho_5(\sigma_5 + \rho_k + \sigma_k) + \rho_k\sigma_k - \tau_k^*], \quad \gamma_k = -(s_k - \rho_k)(s_k - \sigma_k), \quad k = 1,2,3,4,$$

$$t_1 = \frac{1}{2\gamma_1}(\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_{34} \pm \sqrt{(\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_{34})^2 - 4\gamma_1\gamma_{34}}),$$

$$t_2 = \frac{1}{2\gamma_{12}}(\gamma_3 - \gamma_4 - \gamma_{12} \pm \sqrt{(\gamma_3 - \gamma_4 - \gamma_{12})^2 - 4\gamma_4\gamma_{12}}),$$

$$\gamma_{12} = -(s_{12} + \rho_{12})(s_{12} + \sigma_{12}), \quad \gamma_{34} = -(s_{34} - \rho_{34})(s_{34} - \sigma_{34}),$$

$$s_{12} = \frac{1}{\rho_5 - \sigma_5}[\rho_{12}\sigma_{12} - (\rho_5 + \rho_{34})(\rho_5 + \sigma_{34})], \quad s_{34} = \frac{1}{\rho_5 - \sigma_5}[\rho_{34}\sigma_{34} - (\rho_5 + \rho_{12})(\rho_5 + \sigma_{12})],$$

$c_1 = c$, $c_2 = -(1 + t_1)c$, $c_3 = (1 + t_2)t_1c$, $c_4 = -t_1t_2c$, c — *произвольная постоянная.*

Литература

1. Еругин Н. П. *Проблема Римана.* Мн.: Наука и техника, 1982.

2. Хвощинская Л. А., Жоровина Т. Н. *Уравнение связи интегральных подстановок проблемы Римана.* // Тез. докл. 8-го международного семинара AMADE–2015, 14–19 сентября 2015 г. Минск, 2015. С 84.

3. Хвощинская Л. А. *Нахождение акцессорных параметров при решении некоторых краевых задач.* // Тр. Ин-та матемаитки НАН Беларуси. 2001. С. 150–160.

ОБ ОБОБЩЕННОМ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ПОДОБИИ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ

П.А. Худякова

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
khudziakova@tut.by

Через $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ обозначим алгебру вещественных $n \times n$-матриц со стандартной топологией (т. е. топологией, порожденной какой-либо матричной нормой). Класс всех кусочно-непрерывных матричнозначных функций $A(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ обозначим через через $\mathcal{M}_n^*$. Далее матричнозначные функции $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^*$ называем просто матрицами. Подкласс класса $\mathcal{M}_n^*$, состоящий из ограниченных функций, обозначается через $\mathcal{M}_n$ (ограниченность матричнозначной функции $A(\cdot)$ означает, что $\sup\limits_{t \geqslant 0} \|A(t)\| < +\infty$), а подкласс класса $\mathcal{M}_n$, состоящий из непрерывных функций — через $C\mathcal{M}_n$.

Рассмотрим линейную однородную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с матрицей $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^*$ и сделаем в этой системе линейную замену переменных $x = L(t)y$ с невырожденной при всех $t \geqslant 0$ и кусочно-дифференцируемой на $[0, +\infty)$ матрицей $L(\cdot)$. Тогда придем к линейной однородной дифференциальной системе

$$\dot{y} = B(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$