направлении — об устойчивости показателей Ляпунова правильных систем — хорошо известен и вытекает из теоремы Богданова — Гробмана [5, 6], вследствие которой если матрица-возмущение $Q(\cdot)$ удовлетворяет условию $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\ln\|Q(t)\| < 0$, то такое возмущение не изменяет показателей Ляпунова правильной системы. Поэтому, чтобы матрица-возмущение $Q(\cdot)$, норма которой убывает к нулю на бесконечности, могла изменять показатели Ляпунова правильной системы, необходимо должно выполняться равенство $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\ln\|Q(t)\| = 0$.

Это утверждение близко к достаточному, как показывает следующая

Теорема. *Для любого* $n \geqslant 2$, *какова бы ни была положительная функция* $\theta(t)$, $t \geqslant 0$, *монотонно возрастающая к* $+\infty$, *для которой* $\theta(t)/t \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *существуют система* $A \in \mathcal{R}_n$ *и кусочно-непрерывная* $n\times n$*-матрица* $Q(\cdot)$, *удовлетворяющая при всех* $t \geqslant 0$ *оценке* $\|Q(t)\| \leqslant \mathrm{const}\exp(-\theta(t))$, *такие, что справедливо неравенство*

$$\lambda_n(A+Q) > \lambda_n(A).$$

В частности, взяв в этой теореме $\theta(t) \equiv \sqrt{t}$, получаем пример Р. Э. Винограда [2]. Доказательство теоремы основывается на конструкции работ [2, 3] с использованием δ-характеристической последовательности функции $\theta(\cdot)$ [7].

Литература

1. Ляпунов А. М. *Собр. соч.* В 6-ти т. Т. 2. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 476 с.
2. Виноград Р. Э. *Неустойчивость характеристических показателей правильных систем* // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91. № 5. С. 999–1002.
3. Виноград Р. Э. *Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем* // Прикл. мат. и мех. 1953. Т. 17. Вып. 6. С. 645–650.
4. Миллионщиков В. М. *О неустойчивости характеристических показателей статистически правильных систем* // Мат. заметки. 1967. Т. 2. Вып. 3. С. 315–318.
5. Гробман Д. М. *Характеристические показатели систем, близких к линейным* // Мат. сб. 1952. Т. 30. № 1. С. 121–166.
6. Богданов Ю. С. *Характеристические числа систем линейных дифференциальных уравнений* // Мат. сб. 1957. Т. 41. № 4. С. 481–498.
7. Барабанов Е. А. *Точные границы крайних показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях* : автореф. дисс. … канд. физ.-мат. наук; Белорус. гос. ун-т. Мн., 1984. 15 с.

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПФАФФА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ НЕСВЯЗНЫМ НИЖНИМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МНОЖЕСТВОМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ m-МЕРЫ ЛЕБЕГА

А.С. Платонов[1], **С.Г. Красовский**[2]

[1] Командно-инженерный институт МЧС Беларуси, Минск, Беларусь
alexpltn@mail.ru
[2] Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
kras@im.bas-net.by

Рассматриваем линейную вполне интегрируемую [1, с. 14–24; 2, с. 16–26] систему Пфаффа

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} = A_i(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t = (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in {\mathbb{R}_+}^m, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

с ограниченными непрерывно дифференцируемыми в ${\mathbb{R}_+}^m = \{t \in \mathbb{R}^m \mid t \geqslant 0\}$ матрицами коэффициентов $A_i(t)$. Нижний характеристический [3] $p[x] = p$ векторы нетривиального решения $x : {\mathbb{R}_+}^m \to \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ системы (1) будем определять условиями

$$l_x(p) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{\ln\|x(t)\| - (p,\ t)}{\|t\|} = 0, \quad l_x(p+\varepsilon e_i) < 0 \quad \forall\varepsilon > 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $e_i = (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{i},0,\ldots,0) \in {\mathbb{R}_+}^m$ — орт. Под нижним характеристическим множеством [3] P_x нетривиального решения $x : {\mathbb{R}_+}^m \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ системы (1) понимают объединение всех нижних характеристических векторов $P_x = \bigcup p[x]$ этого решения. Множество [3] $P(A) = \bigcup_{x \neq 0} P_x$ называют нижним характеристическим множеством системы (1).

Определение 1. Множество $D \subset \mathbb{R}^m$ будем называть ограниченным *сверху*, если существует такое $r \in \mathbb{R}^m$, что $d \leqslant r$ для всех $d \in D$ $(d \leqslant r \;\Leftrightarrow\; d_i \leqslant r_i,\;\; i = \overline{1,m},)$.

Всякой точке $r \in \mathbb{R}^m$ поставим в соответствие множество

$$\overline{K}(r) = \{p \in \mathbb{R}^m : p \geqslant r\},$$

которое назовем *верхним прямыми m-мерными углом с вершиной в точке r*.

Определение 2. *Точной верхней границей* ограниченного сверху множества $D \subset \mathbb{R}^m$ будем называть множество $\sup D$ вершин всех тех верхних прямых m-мерных углов $\overline{K}(r)$, каждый из которых имеет с множеством $\overline{D}$ единственную общую точку — вершину этого угла:

$$\sup D \equiv \left\{ r \in \mathbb{R}^m : \overline{D} \bigcap \overline{K}(r) = \{r\} \right\}.$$

Справедлива

Лемма. *Если множество $D \subset \mathbb{R}^m$ ограничено сверху, то оно имеет точную верхнюю границу $\sup D$, причем для каждого $d \in \overline{D}$ найдется такое $s \in \sup D$, что $d \leqslant s$.*

Определение 3. Множество $D \subset \mathbb{R}^m$ назовем *замкнутым сверху*, если оно содержит свою точную верхнюю границу.

В работе [3] установлено существование линейной системы Пфаффа (1) с двумерным временем $(m = 2)$ и нижним характеристическим множеством положительной меры Лебега. Далее в [4] было доказано существование линейной системы Пфаффа (1) с двумерным временем $(m = 2)$, имеющей своим нижним характеристическим множеством произвольное несвязное множество положительной плоской меры Лебега. В работах [5, 6] установлено существование линейных систем Пфаффа с m-мерным временем $(m \geqslant 3)$ и нижним характеристическим множеством положительной m-меры Лебега. Перенесем полученный в [4] результат о существовании несвязного нижнего характеристического множества на систему (1) с m-мерным временем t.

Определение 4. Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ — односвязное замкнутое сверху выпуклое множество. Множество, являющееся его точной верхней границей $\sup D$, будем называть *выпуклым вверх*. Отметим, что оно обладает свойствами нижнего характеристического множества.

Введем в рассмотрение ограниченную односвязную замкнутую область $D \subset \mathbb{R}^m$, обладающую следующим свойством: существует направление $V = (v_1, v_2, \ldots, v_m) > 0$ такое, что всякое непустое пересечение $P(D,\alpha)$ области D и гиперплоскости α, нормальной направлению V, имеет некоторую внутреннюю точку O_α, которая видна из любой точки границы $\partial P(D,\alpha)$ фигуры $P(D,\alpha)$. То есть отрезок гиперплоскости α, соединяющий точку O_α с любой точкой границы $\partial P(D,\alpha)$ расположен в пересечении $P(D,\alpha)$. Множество всех областей, обладающих указанным свойством будем далее обозначать $\mathcal{G}(V)$.

Теорема. *Пусть ограниченная замкнутая область $D \subset \mathbb{R}^m$ состоит из конечного числа s непересекающихся областей $D_j \subset \mathcal{G}(V^{(j)})$, $0 < V^{(j)} \in \mathbb{R}^m$, $j = \overline{1,s}$, а ее точная верхняя граница $\sup D$ есть выпуклое вверх множество. Тогда для любых натуральных $n \geqslant m \geqslant 2$ существует вполне интегрируемая линейная система Пфаффа (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми матрицами коэффициентов $A_i(t)$, нижнее характеристическое множество $P(A)$ которой совпадает с D.*

Литература

1. Гайшун И. В. *Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения.* Мн., 1983.
2. Гайшун И. В. *Линейные уравнения в полных дифференциалах.* Мн., 1989.

3. Изобов Н. А. *О существовании линейных систем Пфаффа с множеством нижних характеристических векторов положительной плоской меры* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 12. С. 1623–1630.

4. Изобов Н. А., Платонов А. С. *О существовании линейной системы Пфаффа с несвязным нижним характеристическим множеством положительной меры* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 65–71.

5. Изобов Н. А., Красовский С. Г., Платонов А. С. *Существование линейных систем Пфаффа с нижним характеристическим множеством положительной меры Лебега в пространстве* $\mathbb{R}^3$ // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 10. С. 1311–1318.

6. Изобов Н. А., Красовский С. Г., Платонов А. С. *Линейные системы Пфаффа с нижним характеристическим множеством положительной* m *-меры Лебега* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 635–646.

ГЛОБАЛЬНАЯ ЛЯПУНОВСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

С.Н. Попова[1], **И.Н. Банщикова**[2]

[1] Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
ps@uni.udm.ru
[2] Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
Ижевская государственная сельскохозяйственная академия, Ижевск, Россия
banshhikova.irina@mail.ru

Рассмотрим линейную управляемую систему с дискретным временем

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \tag{1}$$

где $k \in \mathbb{Z}$ — независимая переменная; $x = x(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ — неизвестная функция; $u = u(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$ — управление; $A(k) \in M_n(\mathbb{R})$ — вещественная матрица размерами $n \times n$, $B(k) \in M_{nm}(\mathbb{R})$ — вещественная матрица размерами $n \times m$ при каждом $k \in \mathbb{Z}$.

Будем предполагать, что

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\big(\|A(k)\| + \|A^{-1}(k)\|\big) < \infty, \quad \sup_{k\in\mathbb{Z}}\|B(k)\| < \infty.$$

В дальнейшем управление $u(k)$ в системе (1) будет выбираться линейным по $x(k)$, т. е. иметь вид

$$u(k) = U(k)x(k),$$

где $U : \mathbb{Z} \to M_{mn}(\mathbb{R})$. Подставляя это управление в систему (1), получим замкнутую систему

$$x(k+1) = (A(k) + B(k)U(k))x(k). \tag{2}$$

Можно считать, что $U(k)$ играет роль матричного управления в системе (2).

Определение 1. Матричное управление $U : \mathbb{Z} \to M_{mn}(\mathbb{R})$ называется допустимым для системы (2), если выполнены условия:

1) $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\|U(k)\| < \infty$;

2) при каждом $k \in \mathbb{Z}$ матрица $A(k) + B(k)U(k)$ обратима, при этом

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\|(A(k) + B(k)U(k))^{-1}\| < \infty.$$