Линейные системы с L^p-дихотомией на полуоси достаточно полно разработаны в работах В. Коппеля, Р. Конти, Н. А. Изобова и Р. А. Прохоровой.

Для систем с L^p-дихотомией на оси справедливы большей частью аналогичные [3] результаты.

Теорема 1. *Любая L^p-дихотомичная с числом $p>0$ и проекторами P_1 и P_2 линейная система* (1) *является L^q-дихотомичной с любым числом q, $0<q<p$, причем включение $L^pD\subset L^qD$ является строгим.*

Теорема 2. *Если матрица $A(t)$ интегрально ограничена и $A\in L^pD$, $p>0$, то система* (1) *является экспоненциально дихотомичной на оси.*

Наряду с линейной однородной системой (1) рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\dot y = A(t)y + f(t). \tag{2}$$

Справедлива теорема, аналогичная теореме Коппеля — Конти [1, с. 131; 2] об ограниченных решениях системы (2).

Теорема 3. *Линейная неоднородная система* (2) *при любой вектор-функции $f(t)$ из пространства $L_q(\mathbb{R})$, $1<q\leqslant+\infty$, имеет единственное ограниченное на оси решение тогда и только тогда, когда соответствующая линейная однородная система* (1) *обладает L^p-дихотомией на оси с числом p, сопряженным с q: $1/p+1/q=1$.*

С помощью этой теоремы установлена открытость множества L^pD при $p\geqslant 1$.

Теорема 4. *Если система* (1) *обладает L^p-дихотомией на $\mathbb{R}$ с числом $p\geqslant 1$, то существует такое $\varepsilon_A>0$, что система $\dot x=[A(t)+B(t)]x$, в которой $B(t)$ — кусочно-непрерывная матрица, $\|B(t)\|<\varepsilon_A$, $t\in\mathbb{R}$, также обладает L^p-дихотомией на $\mathbb{R}$.*

Однако свойство L^p-дихотомии не является грубым при возмущениях следующего вида:

1) матрица возмущения $B(t)$ — интегрально мала;

2) матрица $B(t)$ — суммируема на оси со степенью $q\geqslant 1$;

3) матрица $B(t)$ — исчезающая на бесконечности.

Литература

1. Coppel W. A. *Stability and asymptotic behavior of differential equations*: Heath. Math. Monographs. D.C. Heath and Company. Boston, 1965. 166 pp.

2. Conti R. *On the boundedness of solutions of ordinary differential equations* // Funkcialaj Ekvacioj. 1966. Vol. 9, № 1. P. 23–26.

3. Изобов Н. А., Прохорова Р. А. *Линейные дифференциальные системы Копеля — Конти.* Мн.: Белорусская наука, 2008. 230 с.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СТАРШЕГО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ИЗОБОВА СИСТЕМЫ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.В. Быков

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
vvbykov@gmail.com

Для заданного $n\in\mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ пространство линейных систем вида

$$\dot x = A(t)x, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{1}$$

с непрерывными (не обязательно ограниченными) оператор-функциями A (которые будем отождествлять с соответствующими системами) с естественными для функций операциями сложения и умножения на действительное число.

Определение. Старшим экспоненциальным показателем Изобова системы (1) называется величина [1]
$$\nabla(A) = \sup_{Q\in\mathcal{E}} \lambda_n(A+Q),$$
где $\lambda_n(\cdot)$ — старший показатель Ляпунова, а $\mathcal{E}$ — множество экспоненциально убывающих возмущений, т. е. оператор-функций $Q \in \mathcal{M}^n$, удовлетворяющих условию
$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Q(t)\| < 0.$$

Для заданных $K > 0$, $m > 1$ и $\rho > 0$ обозначим через $\mathcal{F}_{K,m,\rho}$ множество непрерывных функций $f\colon \mathbb{R}^+ \times U_\rho \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию
$$\|f(t,x)\| \leqslant K\|x\|^m, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in U_\rho \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| < \rho\}.$$
Далее, положим $\mathcal{F}_{K,m} = \bigcup_{\rho>0} \mathcal{F}_{K,m,\rho}$.

Теорема. *Пусть* $\nabla(A) < -\alpha < 0$. *Тогда для любых* $K > 0$ *и* $m > 1$ *существует такое* $C > 0$, *что для любой функции* $f \in \mathcal{F}_{K,m}$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что всякое решение системы*
$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2}$$
удовлетворяющее условию $\|x(0)\| < \delta$, *продолжается на всю полуось* $\mathbb{R}^+$, *и выполнена оценка*
$$\|x(t)\| \leqslant C\|x(0)\|e^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$
Таким образом, нулевое решение всякой системы (2) *с* $f \in \mathcal{F}_{K,m}$ *экспоненциально устойчиво* [2, с. 251].

Замечание. В случае, когда коэффициенты системы (1) ограничены, условие $\nabla(A) <$ < 0 необходимо и достаточно, чтобы у всякой системы (2) с $f \in \bigcup_{K>0,\ m>1} \mathcal{F}_{K,m}$ нулевое решение было экспоненциально устойчивым [3].

Литература

1. Изобов Н. А. *О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1186–1192.

2. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

3. Изобов Н. А. *Экспоненциальная устойчивость по линейному приближению.* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 8. С. 1011–1027.

МЕТОД НЕОРДИНАРНЫХ СЕМЕЙСТВ В ТЕОРИИ БЭРОВСКИХ КЛАССОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

А.Н. Ветохин

Российский государственный университет туризма и сервиса, Москва, Россия
vetokhin@front.ru

I. Множество точек полунепрерывности снизу показателей Ляпунова их мажорант и минорант. Пусть $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ — показатели Ляпунова линейной системы
$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0; +\infty), \tag{1}$$