Неполиэдральное доказательство конечномерной селекционной теоремы Майкла*

С. М. АГЕЕВ
Белорусский государственный университет,
Минск, Беларусь
e-mail: ageev@bsu.by

УДК 515.126

Ключевые слова: многозначное отображение, селекция, селекционная теорема.

Аннотация

Предложен новый метод доказательства конечномерной селекционной теоремы Майкла. С его помощью получен ряд новых селекционных теорем.

Abstract

S. M. Ageev, Nonpolyhedral proof of the Michael finite-dimensional selection theorem, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 3—22.

We suggest a new method of the proof of the Michael finite-dimensional selection theorem. Using it, we prove a new selection theorem.

1. Введение

Прошло почти 50 лет, как Е. Майкл доказал ряд селекционных теорем, ставших мощным инструментом в топологии: это 0-мерная селекционная теорема [11] в общей топологии, выпуклозначная селекционная теорема [12] в бесконечномерной топологии, конечномерная селекционная теорема [13] в геометрической топологии. Можно констатировать, что из ранга отдельных теорем они переросли в ранг теории — теории непрерывных селекций многозначных отображений.

Приведём формулировку последней теоремы, которой посвящена данная работа.

Теорема 1.1 (конечномерная селекционная теорема Майкла). *Пусть Y есть полное метрическое пространство, $\mathcal{L}$ есть $\mathrm{equi\text{-}LC}^n$-семейство замкнутых подмножеств в Y, X есть $(n+1)$-мерный паракомпакт. Тогда для любого замкнутого подмножества $A \subset X$ и для любой частичной селекции $s\colon A \to Y$ полунепрерывного снизу отображения $F\colon X \rightsquigarrow Y$, $F(x) \in \mathcal{L}$ для любого $x \in X$,*

*Автор был частично поддержан грантом Совета по естественным наукам и исследованиям Канады № OGP005616.

© 2005 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

существует селекция $\hat{s}\colon \mathcal{O}(A) \to Y$ *отображения* F*, определённая на некоторой окрестности* $\mathcal{O}(A) \subset X$ *и являющаяся продолжением* s*. Если дополнительно известно, что* $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^n$*, то можно взять* $\mathcal{O}(A) = X$*.*

Доказательства всех трёх теорем имеют общую идею — последовательное контролируемое улучшение аппроксимативных селекций. Однако если первые две имеют короткие и эффектные доказательства, то конечномерная селекционная теорема выпадает из этого ряда. Достаточно просто она сводится к так называемой теореме Майкла о сдвиге, составляющей сердцевину («... the hard core of the whole proceeding...» [12]) доказательства конечномерной селекционной теоремы.

Теорема 1.2 (теорема о сдвиге). *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1 *за исключением полноты* Y*. Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существует такое покрытие* $\delta_n \in \operatorname{cov} Y$, $\operatorname{mesh} \delta_n < 2^{-n}$*, что любое отображение* $g\colon X \to Y$, $g \overset{\delta_n}{\approx} F$*, может быть* 2^{-n}*-аппроксимировано отображением* $f\colon X \to Y$*, таким что* $f \overset{\delta_{n+1}}{\approx} F$*. Если дополнительно известно, что* $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^n$*, то существует такое отображение* $f\colon X \to Y$*, что* $f \overset{\delta_1}{\approx} F$*.*

Естественно желание получить доказательство теоремы о сдвиге, а следовательно и конечномерной селекционной теоремы, по сложности и объёму сопоставимое с доказательствами 0-мерной и выпуклозначной селекционных теорем. Автору эта задача известна с конца 1970-х годов. Однако первые результаты здесь появились значительно позже. В интересной работе [1] была установлена универсальность 0-мерной селекционной теоремы, к которой полностью сводится выпуклозначная и компактозначная селекционные теоремы. В [2] были предложено фильтрованное обобщение конечномерной селекционной теоремы и осуществлена её частичная редукция к 0-мерной селекционной теореме: центральный момент — построение фильтраций со специальными свойствами связности — осуществляется с помощью компактозначной селекционной теоремы. Следует, однако, сказать, что и здесь присутствует своя «... the hard core...»: доказательство теоремы занимает 20 страниц текста и использует дополнительную, нетрадиционную в теории селекций технику (например, резольвенты специального типа).

Недавно В. Успенский [16] доказал теорему о существовании селекций у отображений со стягиваемыми образами и, как результат этого, охарактеризовал в селекционных терминах $\mathcal{C}$-пространства.

Теорема 1.3. *Пусть* $\mathcal{U}$*-непрерывное отображение* $F\colon X \rightsquigarrow Y$ *таково, что* X *есть* $\mathcal{C}$*-пространство, а* $F(x)$ *стягиваемо для любой точки* $x \in X$*. Тогда существует однозначная селекция* $s\colon X \to Y$ *отображения* F*.*

Именно анализ сформулированной теоремы явился отправной точкой в данном исследовании. Автор в январе 2001 г. предложил неполиэдральное (т. е. не использующее перехода к нервам покрытий) доказательство теоремы 1.3, которое в некоторых чертах напоминает метод Анцеля CE-отношений [5]. В последующем удалось приспособить новый метод к доказательству конечномерной селекционной теоремы. В результате оказалось, что с точки зрения нового подхода наиболее естественным является следующий ряд теорем: 0-мерная селекционная теорема, конечномерная селекционная теорема, теорема В. Успенского (которую естественно было бы назвать $\mathcal{C}$-мерной селекционной теоремой).

Из предложенного нами доказательства легко следует обобщение фильтрованной конечномерной селекционной теоремы [2]: на элементы фильтрации не накладывается условие полноты.

Теорема 1.4. *Пусть* (Y, ϱ) *есть полное метрическое пространство,* X *есть* $(n+1)$*-мерный паракомпакт. Пусть* equi-LC^{i-1}*-семейства* $\mathcal{L}_i$, $0 \leqslant i \leqslant n+1$, *подмножеств* Y *таковы, что*

$$\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{L}_n \subset \mathcal{L}_{n+1}.$$

Пусть

$$F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n \subset F_{n+1}$$

есть полунепрерывные снизу селекции полунепрерывного снизу замкнутозначного отображения $F\colon X \rightsquigarrow Y$. *Если* $\{F_i(x) \mid x \in X\} \subset \mathcal{L}_i$ *для любого* $0 \leqslant i \leqslant n+1$, *а вложение* $F_i(x) \hookrightarrow F_{i+1}(x)$ *является* i-асферичным *для любой точки* $x \in X$ *и для любого* $0 \leqslant i \leqslant n$ *(т. е. вложение индуцирует нуль-гомоморфизм гомотопической группы* π_i*), то существует селекция* $s\colon X \to Y$ *отображения* F.

Чтобы не осложнять статью и другими обобщениями, мы приводим новые доказательства классической конечномерной селекционной теоремы Майкла и теоремы Успенского и даём схему доказательства теоремы 1.4 только для случая, когда

> для любой точки $x \in X$ и для любого $0 \leqslant i \leqslant n$ вложение $F_i(x) \hookrightarrow F_{i+1}(x)$ является *i-аполиэдральным*, т. е. для любого полиэдра K, $\dim K \leqslant i$, каждое отображение $\varphi\colon K \to F_i(x)$ стягиваемо в $F_{i+1}(x)$. (∗)

Безусловно, требовательный читатель найдёт наш метод все ещё сложным в сравнении, например, с доказательством выпуклозначной селекционной теоремой. Это действительно так. Единственная цель данной статьи состоит в нахождении нового подхода, не использующего нервы покрытий. Мы надеемся, что грядущее решение проблемы упрощения доказательства конечномерной селекционной теоремы позволит ещё глубже вскрыть её суть и найти её новые применения.

Статья была написана во время визита в Университет Саскатчеван (Канада). Автор считает своим приятным долгом выразить признательность профессору Э. Д. Тимчатин (E. D. Tymchatyn) за радушие и тёплый приём, за полезные и плодотворные дискуссии. Хочу поблагодарить Н. Бродского, обратившего внимание автора на теорему Успенского, что явилось отправной точкой в данном исследовании.

2. Предварительные факты и сведения

Множество всех открытых покрытий пространства X будем обозначать через $\operatorname{cov} X$. *Окрестностью* множества $A \subset X$ относительно $\omega \in \operatorname{cov} X$ будем называть множество

$$\bigcup\{U \mid U \in \omega,\ U \cap A \neq \varnothing\}$$

и обозначать через $\mathrm{N}(A;\omega)$. *Звездой покрытия ω относительно покрытия ω'* назовём покрытие

$$\mathrm{St}(\omega;\omega') = \{\mathrm{N}(U;\omega') \mid U \in \omega\}.$$

Индукцией по n определяются *степени покрытия*:

$$\omega^2 \rightleftharpoons \mathrm{St}(\omega;\omega), \quad \omega^n \rightleftharpoons \mathrm{St}(\omega^{n-1};\omega) \ \text{ при } \ n > 2.$$

Запись $\omega \prec \omega_1$ будет обозначать вписанность покрытия ω в ω_1. Если $\omega^2 \prec \omega_1$, то покрытие ω называется *звёздно вписанным в покрытие* ω_1. *Телом системы* открытых множеств ω будем называть множество $\bigcup\{U \mid U \in \omega\}$, которое обозначается через $\bigcup\omega$.

Везде в дальнейшем X будет паракомпактом, Y — метрическим пространством. Если $\delta > 0$, то δ-близость отображений $f, g\colon X \to Y$ запишем в виде $\operatorname{dist}(f,g) \prec \delta$ или $f \overset{\delta}{\sim} g$; δ-окрестность множества A записывается в виде $\mathrm{N}(A;\delta)$.

2.1. Экстензорные свойства семейств множеств

Скажем, что семейство $\mathcal{L}$ замкнутых подмножеств в метрическом пространстве Y является equi-LC^n*-семейством*, если для любой точки $x \in \bigcup\mathcal{L}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $L \in \mathcal{L}$ вложение $\mathrm{N}(x;\delta) \cap L \hookrightarrow \mathrm{N}(x;\varepsilon) \cap L$ является n-асферическим. Скажем, что семейство $\mathcal{L}$ замкнутых подмножеств в пространстве Y является equi-$\mathrm{LAE}(n)$*-семейством*, если для любой точки $x \in \bigcup\mathcal{L}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $L \in \mathcal{L}$ вложение $\mathrm{N}(x;\delta) \cap L \hookrightarrow \mathrm{N}(x;\varepsilon) \cap L$ является n-аполиэдральным. Ясно, что equi-$\mathrm{LAE}(n)$-семейство $\mathcal{L}$ является equi-LC^n-семейством. В действительности эти понятия совпадают, что является equi-аналогом известной теоремы Куратовского—Дугунджи [9].

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{L}$ есть семейство замкнутых подмножеств в метрическом пространстве $Y \in \mathrm{ANE}$. Скажем, что $\mathcal{L}$ является Attr^n-семейством, если для любого $\omega \in \operatorname{cov} Y$ существует такое покрытие $\sigma \in \operatorname{cov} Y$, что для любого $L \in \mathcal{L}$ и для любого отображения $\varphi\colon Z \to \mathrm{N}(L;\sigma)$ компакта Z, $\dim Z \leqslant n$, существует отображение $\tilde{\varphi}\colon Z \to L$, ω-гомотопное φ (т. е. существует такая гомотопия $H\colon Z \times I \to Y$, соединяющая φ и $\tilde{\varphi}$, что $\{H(z,I) \mid z \in Z\} \prec \omega$).

Известно (см. [12, с. 578] и [14, лемма о сдвиге, 5.23]), что если тело $\bigcup\mathcal{L} \subset$ $\subset Y \in \mathrm{ANE}$ equi-LC^n-семейства $\mathcal{L}$ замкнуто, то $\mathcal{L}$ является Attr^{n+1}-семейством. Следующая теорема широко известна [9].

Теорема 2.2 (теорема Куратовского—Войдыславского). *Для любого метрического пространства (W, ϱ) существует изометрическое замкнутое вложение $e\colon W \hookrightarrow N$ в линейное бесконечномерное нормированное пространство N. Если дополнительно известно, что W есть полное пространство, то N есть банахово пространство.*

Бесконечномерное выпуклое пространство Z, а также его открытые подмножества являются *сильно универсальными относительно компактов*, т. е. для любой компактной полиэдральной пары (W, A), для любого кусочно-линейного отображения $\varphi\colon W \to Z$, ограничение которого на A есть вложение, и для любого $\varepsilon > 0$ существует кусочно-линейное вложение $\tilde{\varphi}\colon W \hookrightarrow Z$, совпадающее с φ на A и ε-близкое к φ [6].

Для упрощение доказательства теоремы 1.2 Е. Майкл предложил воспользоваться теоремой Куратовского—Войдыславского для пространства W, совпадающего с телом $\bigcup \mathcal{L}$ семейства $\mathcal{L}$, и свести теорему 1.2 к случаю, когда Y есть линейное нормированное пространство N. Он также предложил использовать вместо довольно утомительного языка покрытий обычные вещественные числа. Введём соответствующие понятия.

Определение 2.3. Пусть $\mathcal{L}$ есть семейство замкнутых подмножеств в метрическом пространстве Y. Скажем, что $\mathcal{L}$ является η-равномерным LC^n-семейством, где $\eta > 0$ есть некоторая константа, если для любых чисел $0 < \eta \cdot \delta < \varepsilon < 1$, для любого $L \in \mathcal{L}$, для любого компакта Z размерности не больше n и для любого отображения $\varphi\colon Z \to L$, $\operatorname{diam} \varphi(Z) < \delta$, существует отображение $\hat{\varphi}\colon \operatorname{Con} Z \to L$, продолжающее φ, для которого $\operatorname{diam} \hat{\varphi}(Z) < \varepsilon$.

Определение 2.4. Пусть $\mathcal{L}$ есть семейство замкнутых подмножеств в метрическом пространстве Y. Скажем, что $\mathcal{L}$ является η-равномерным Attr^n-семейством, где $\eta > 0$ есть некоторая константа, если для любых чисел $0 < \eta \cdot \delta < \varepsilon < 1$, для любого $L \in \mathcal{L}$ и для любого компакта Z, $\dim Z \leqslant n$, любое отображение $\varphi\colon Z \to \mathrm{N}_d(L; \delta)$ аппроксимируется отображением $\tilde{\varphi}\colon Z \to L$ так, что между φ и $\tilde{\varphi}$ существует ε-гомотопия $H\colon Z \times I \to Y$ (т. е. $\operatorname{diam} H(z, I) < \varepsilon$ для всех $z \in Z$).

Конечно, введённые равномерные понятия более удобны для работы, чем их неравномерные аналоги. При этом оказывается, что, если правильным образом выбирать метрику, общность в рассуждениях не ограничивается.

Теорема 2.5 (о переметризации). *Пусть (N, ϱ) есть линейное нормированное пространство, $\omega \in \operatorname{cov} N$, а $\mathcal{L}$ есть equi-LC^n-семейство замкнутых подмножеств в N, $\bigcup \mathcal{L}$ есть замкнутое подмножество N. Тогда существуют допустимая метрика d на N и константа $\eta \geqslant 8$, такие что*

1) $d \geqslant \varrho$;
2) $\{\mathrm{N}_d(x; 1)\}_{x \in X} \prec \omega$;
3) *$\mathcal{L}$ является η-равномерным LC^n-семейством;*
4) *$\mathcal{L}$ является η-равномерным Attr^{n+1}-семейством относительно d.*

Эта теорема может быть выведена из [8]. При доказательстве теоремы 1.1 мы столкнёмся с ещё более общей ситуацией. По этой причине, а также чтобы ещё раз привлечь внимание к идее униформизации топологических свойств определённого типа, мы приводим новое доказательство теоремы Дугунджи—Майкла.

2.2. Полосочные отображения

Все основные определения теории многозначных отображений можно найти в книге [14]. Многозначное отображение будем записывать так: $F\colon X \rightsquigarrow Y$, при этом, если не будет возникать путаницы, слово «многозначное» мы будем убирать. Напомним, что *селекцией* (*многозначной*) отображения $F\colon X \rightsquigarrow Y$ называется такое отображение $F_1\colon X \rightsquigarrow Y$, что $F_1(x) \subset F(x)$ для всех $x \in X$. Для этого будем использовать запись $F_1 \subset F$. Однозначная селекция есть частный случай многозначной.

Будем говорить, что отображение $f\colon X \to Y$ есть *ε-селекция* F, $\varepsilon > 0$, и записывать это $f \overset{\varepsilon}{\approx} F$, если $\operatorname{dist}(f(x), F(x)) < \varepsilon$ для всех $x \in X$. Если $a > 0$, то через $F^a\colon X \rightsquigarrow Y$ обозначим отображение, заданное формулой $F^a(x) = \mathrm{N}(F(x); a)$. Ясно, что $f \overset{a}{\approx} F$ тогда и только тогда, когда f есть однозначная селекция F^a. Отображение $F\colon X \rightsquigarrow Y$ называется *полунепрерывным снизу*, если для любых точек $y_0 \in F(x_0)$ и для любой окрестности $\mathcal{O}(y_0)$ существует такая окрестность $\mathcal{O}(x_0)$, что $F(x) \cap \mathcal{O}(y_0) \neq \varnothing$ для любой $x \in \mathcal{O}(x_0)$.

Любое многозначное отображение $F\colon X \rightsquigarrow Y$ порождает свой график

$$\operatorname{Gr}(F) \rightleftharpoons \{(x, y)\colon y \in F(x),\ x \in X\} \subset X \times Y$$

и проекцию $\pi_F\colon \operatorname{Gr}(F) \to X$, $\pi_F(\{x\} \times F(x)) = x$. Обратно, любая проекция $\pi\colon G \to X$, $G \subset X \times Y$, на X порождает многозначное отображение $F\colon X \rightsquigarrow Y$, $F(x) = \operatorname{pr}_Y(G \cap (\{x\} \times Y))$, график $\operatorname{Gr}(F)$ которой совпадает с G, а $\pi_F = \pi$. Таким образом, видно, что многозначные отображения можно отождествлять с их графиками и наоборот.

Полоской называется подмножество $A \times K \subset X \times Y$, если A открыто в X, а K есть компактное подмножество Y. Полоска $A \times K$ называется *стягиваемой* (*k-мерной*), если K есть стягиваемый по себе компакт (если $\dim K \leqslant k$). Размер полоски $A \times K$ измеряется диаметром второго сомножителя.

Пусть $\pi = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \in \operatorname{cov} X$ и $\sigma = \{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ есть семейство подмножеств X. Их *произведением* $\pi \otimes \sigma$ назовём подмножество $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha \times B_\alpha)$. Произведение $\pi \otimes \sigma$ называется *полосочным*, если π есть локально-конечное покрытие X, а σ есть семейство компактов в Y. Полосочное произведение $\pi \otimes \sigma$ называется *стягиваемым* (*k-мерным*), если каждая полоска $A_\alpha \times B_\alpha$ является стягиваемой (является k-мерной).

Многозначное отображение, порождённое произведением $\pi \otimes \sigma \subset X \times Y$, мы будем обозначать так же: $\pi \otimes \sigma\colon X \rightsquigarrow Y$. Если $\pi \otimes \sigma$ есть полосочное произведение, то многозначное отображение $\pi \otimes \sigma\colon X \rightsquigarrow Y$ называется *полосочным*. Размер $\operatorname{mesh}(\pi \otimes \sigma)$ полосочного отображения $\pi \otimes \sigma$, как всегда, определяется диаметрами образов:

$$\operatorname{mesh}(\pi \otimes \sigma) \rightleftharpoons \sup\{\operatorname{diam}(\pi \otimes \sigma)(x) \mid x \in X\}.$$

В следующей лемме собраны простые факты, относящиеся к введённым понятиям.

Лемма 2.6. *Если $F = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \otimes \{K_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\colon X \rightsquigarrow Y$ есть полосочное отображение, то $\Lambda(x) \rightleftharpoons \{\alpha \in \Lambda \mid x \in A_\alpha\}$ есть конечное подмножество Λ для любой точки $x \in X$, а $K(x) \rightleftharpoons \bigcup\{K_\alpha \mid \alpha \in \Lambda(x)\}$ есть компакт. Более того,*

1) *$K(x)$ совпадает с $F(x)$;*
2) $\operatorname{mesh} F = \sup\{\operatorname{diam} K(x) \mid x \in X\}$.

Если $\operatorname{mesh}(\{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}) < \varepsilon$, то полосочное отображение

$$\{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}\colon X \rightsquigarrow Y$$

называется *ε-полосочным*. Если $\pi \otimes \sigma$ есть стягиваемое (есть k-мерное) полосочное произведение, то многозначное отображение $\pi \otimes \sigma\colon X \rightsquigarrow Y$ называется *стягиваемым полосочным* (*k-мерным*).

2.3. $\mathcal{U}$-непрерывные отображения

Многозначное отображение $F\colon X \rightsquigarrow Y$ называется $\mathcal{U}$-непрерывным отображением, если любой компакт $K \subset \{x\} \times F(x)$ содержится в некоторой полоске, лежащей в $\operatorname{Gr}(F)$. Очевидно, что любое полосочное отображение является $\mathcal{U}$-непрерывным отображением, а любое $\mathcal{U}$-непрерывное отображение является полунепрерывным снизу. Простейшая связь между $\mathcal{U}$-непрерывным отображением и полосочным отображением заключена в следующем утверждении, которое приводится без доказательства.

Лемма 2.7. *Если $F\colon X \rightsquigarrow Y$ есть $\mathcal{U}$-непрерывное отображение, то существует 0-мерное полосочное отображение $F_0 = \pi \otimes \sigma\colon X \rightsquigarrow Y$, являющееся селекцией F.*

Раздутие полунепрерывного снизу отображения является $\mathcal{U}$-непрерывным отображением. Этот факт позволяет сводить исследование произвольных полунепрерывных снизу отображений к $\mathcal{U}$-непрерывным.

Лемма 2.8. *Если $F\colon X \rightsquigarrow Y$ есть полунепрерывное снизу отображение, а $a > 0$, то $F^a\colon X \rightsquigarrow Y$ имеет открытый график и, следовательно, является $\mathcal{U}$-непрерывным отображением.*

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) \in \operatorname{Gr}(F^a)$. Тогда $\operatorname{dist}(y_0, F(x_0)) = a - \varepsilon_0 < a$. Пусть $y_1 \in F(x_0)$ и $\operatorname{dist}(y_0, y_1) = a - \varepsilon_0/3$. Так как F полунепрерывное снизу, то существует такая окрестность $\mathcal{O}(x_0)$, что $\mathcal{O}(x_0) \times \mathcal{O}(y_1)$ послойно пересекает $\operatorname{Gr}(F)$, где $\mathcal{O}(y_1) = \mathrm{N}(y_1; \varepsilon_0/3)$. Несложно проверить, что $\mathcal{O}(x_0) \times \mathrm{N}(y_0; \varepsilon_0/3) \subset \subset \operatorname{Gr}(F^a)$. □

Отметим без доказательства, что отображение $F\colon X \rightsquigarrow Y$ является полунепрерывным снизу в том и только в том случае, когда F^a имеет открытый график для любого $a > 0$.

2.4. Звёздное вложение полосочных отображений

Скажем, что полосочное отображение $\{A_\alpha\} \otimes \{B_\alpha\}\colon X \rightsquigarrow Y$ *звёздно содержится* в полосочном отображении $\{C_\mu\} \otimes \{D_\mu\}\colon X \rightsquigarrow Y$ (обозначение $\{A_\alpha\} \otimes \{B_\alpha\} \Subset \{C_\mu\} \otimes \{D_\mu\}$), если

$$A_\alpha \cap C_\mu \neq \varnothing \text{ всегда влечёт } B_\alpha \subset D_\mu. \tag{2.1}$$

Название этого центрального понятия статьи объясняется следующим наблюдением. Если покрытие $\tau = \{U_\alpha\} \in \operatorname{cov} X$ звёздно вписано в покрытие $\omega = \{W_\mu\} \in \operatorname{cov} X$, то для любого α существует такой индекс $\mu = \mu(\alpha)$, что $\mathrm{N}(U_\alpha; \tau) \subset W_\mu$. Легко проверить, что полосочное отображение

$$\{U_\alpha\} \otimes \{U_\alpha\}\colon X \rightsquigarrow X$$

звёздно содержится в полосочном отображении

$$\{U_\alpha\} \otimes \{W_{\mu(\alpha)}\}\colon X \rightsquigarrow X.$$

Ясно, что введённое отношение $\Subset$ транзитивно, а также

а) $\{A_\alpha\} \otimes \{B_\alpha\}(x) \subset \{C_\mu\} \otimes \{D_\mu\}(x)$ и, следовательно,
б) $\operatorname{mesh}(\{A_\alpha\} \otimes \{B_\alpha\}) \leqslant \operatorname{mesh}(\{C_\mu\} \otimes \{D_\mu\})$.

Скажем, что полосочное отображение $G = \{C_\mu\} \otimes \{D_\mu\}\colon X \rightsquigarrow Y$ *индуцирует* полосочное отображение $H = \{S_\delta\} \otimes \{T_\delta\}\colon X \rightsquigarrow Y$, если для любого индекса δ существует такой индекс $\mu = \mu(\delta)$, что

$$S_\delta \subset C_\mu, \text{ а } T_\delta = D_\mu. \tag{2.2}$$

Лемма 2.9. *Пусть полосочные отображения*

$$F = \{A_\alpha\} \otimes \{B_\alpha\}, \quad G = \{C_\mu\} \otimes \{D_\mu\}\colon X \rightsquigarrow Y$$

таковы, что $F \Subset G$, а $H = \{S_\delta\} \otimes \{T_\delta\}\colon X \rightsquigarrow Y$ индуцируется G. Тогда

$$H(x) \subset G(x) \text{ для всех } x \in X \text{ и, следовательно, } \operatorname{mesh} H \leqslant \operatorname{mesh} G; \tag{2.3}$$

$$F \Subset H. \tag{2.4}$$

Доказательство. Из (2.2) и леммы 2.6 следует, что

$$H(x) = T(x) \subset D(x) = G(x)$$

для всех $x \in X$.

Проверим, что $A_\alpha \cap S_\delta \neq \varnothing$ влечёт $B_\alpha \subset T_\delta$. Так как $A_\alpha \cap C_{\mu(\delta)} \neq \varnothing$, то из $F \Subset G$ следует, что $B_\alpha \subset D_{\mu(\delta)} = T_\delta$. □

3. Звёздное продолжение полосочных отображений

Данный раздел является сердцевиной доказательств как теоремы Успенского, так и теоремы Майкла. Через m обозначим любое натуральное число либо ∞. Если $m = \infty$, то будем считать, что $m+1 = m = \infty$. Последовательность

$$F_0 \Subset F_1 \Subset F_2 \Subset \ldots \Subset F_j \Subset \ldots, \quad j < m+1,$$

полосочных селекций отображения $F\colon X \rightsquigarrow Y$, в которой F_j стягиваемо для всех $j \geqslant 1$, будем называть *стягиваемой полосочной последовательностью длины* m. Первое из двух утверждений гарантирует при определённых условиях стягиваемость полосочной последовательности длины 2 и доказывается методами общей топологии.

Предложение 3.1. *Пусть $F\colon X \rightsquigarrow Y$ есть $\mathcal{U}$-непрерывное отображение, такое что*

$F(x)$ есть сильно универсальное относительно компактов пространство для любого $x \in X$. (3.1)

Пусть селекция $G\colon X \rightsquigarrow Y$ отображения F и числа $0 < \delta \leqslant \varepsilon \leqslant \infty$ и $n \in \mathbb{N}$ таковы, что

для любого $x \in X$ любой n-мерный компакт $A \subset G(x)$, $\operatorname{diam} A < \delta$, стягивается в точку по компакту $B \subset F(x)$, $\operatorname{diam} B < \varepsilon$. (3.2)

Тогда для любой n-мерной и δ-полосочной селекции $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \otimes \{K_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ отображения G существует стягиваемая $(n+1)$-мерная и (2ε)-полосочная селекция $\{C_\gamma\} \otimes \{M_\gamma\}$ отображения F, такая что

$\{B_\beta\} \otimes \{L_\beta\} \Subset \{C_\gamma\} \otimes \{M_\gamma\}$ для некоторого полосочного отображения $\{B_\gamma\} \otimes \{L_\gamma\}$, индуцированного $\{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}$. (3.3)

Доказательство. Из условия предложения и леммы 2.6 следует, что

$\delta > \operatorname{mesh}(\{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}) = \sup\{\operatorname{diam} K(x) \mid x \in X\}$, где $K(x) = \bigcup\{K_\alpha \mid \alpha \in \Lambda(x)\} \subset G(x)$ есть n-мерный компакт; (3.4)

существует такое вложение $\operatorname{Con} K(x) \hookrightarrow F(x)$ конуса, что $\operatorname{diam} \operatorname{Con} K(x) < \varepsilon$. (3.5)

Так как F является $\mathcal{U}$-непрерывным отображением, то существует такая окрестность $\mathcal{O}(x)$, что $\mathcal{O}(x) \times \operatorname{Con} K(x) \subset \operatorname{Gr}(F)$. Не теряя общности, можно считать, что $\{\mathcal{O}(x) \mid x \in X\}$ есть локально-конечное покрытие X и $\{\mathcal{O}(x)\}^3 \prec \{A_\alpha\}$. Далее, фиксируем локально-конечное покрытие $\{B_\beta\} \prec \{\mathcal{O}(x)\}$. Пусть для определённости

$$B_\beta \subset \mathcal{O}(x_\beta) \text{ и } \mathrm{N}(B_\beta; \{\mathcal{O}(x)\}^2) \subset A_{\alpha(\beta)}. \tag{3.6}$$

Полагаем $P_\beta \rightleftharpoons \operatorname{Con} K(x_\beta)$ и $L_\beta \rightleftharpoons K_{\alpha(\beta)}$. Тем самым многозначное отображение $\{B_\beta\} \otimes \{L_\beta\}$ индуцировано многозначным отображением $\{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}$. Следующая несложная лемма является ключевой в доказательстве предложения.

Лемма 3.2. *Если* $\mathrm{N}(B_{\beta_0}; \{\mathcal{O}(x)\}) \subset A_{\alpha_0}$, *то* $K_{\alpha_0} \subset K(x_{\beta_0}) \subset P_{\beta_0}$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что из (3.6) и условия леммы следует, что

$$x_{\beta_0} \in \mathcal{O}(x_{\beta_0}) \subset \mathrm{N}(B_{\beta_0}; \{\mathcal{O}(x)\}) \subset A_{\alpha_0}.$$

Поэтому

$$K(x_{\beta_0}) = \bigcup \{K_\alpha \mid x_{\beta_0} \in A_\alpha\} \supset K_{\alpha_0}.$$

В итоге имеем $P_{\beta_0} = \operatorname{Con} K_{\beta_0} \supset K_{\beta_0} \supset K_{\alpha_0}$. □

Пусть локально-конечное покрытие $\{C_\gamma\} \in \operatorname{cov} X$ таково, что $\{C_\gamma\}^3 \prec \{B_\beta\}$. Если $\mathrm{N}(C_\gamma; \{C_\gamma\}^2) \subset B_{\beta(\gamma)}$, то полагаем $M_\gamma \rightleftharpoons P_{\beta(\gamma)}$. Следующая цепочка вложений очевидна:

$$C_\gamma \times M_\gamma \subset B_{\beta(\gamma)} \times P_{\beta(\gamma)} \subset \mathcal{O}(x_{\beta(\gamma)}) \times \operatorname{Con} K(x_{\beta(\gamma)}) \subset \operatorname{Gr}(F). \tag{3.7}$$

Тем самым показано, что $\{C_\gamma\} \otimes \{M_\gamma\}$ есть стягиваемая $(n+1)$-мерная полосочная селекция отображения F. Проверим звёздную вписанность отображений

$$\{B_\beta\} \otimes \{L_\beta\} \Subset \{C_\gamma\} \otimes \{M_\gamma\}.$$

Лемма 3.3. *Если* $C_\gamma \cap B_\beta \neq \varnothing$, *то* $L_\beta \subset M_\gamma$.

Доказательство. Напомним, что по определению

а) $M_\gamma = P_{\beta(\gamma)}$, где $\mathrm{N}(C_\gamma; \{C_\gamma\}^2) \subset B_{\beta(\gamma)}$;

б) $L_\beta = K_{\alpha(\beta)}$, где $\mathrm{N}(B_\beta; \{\mathcal{O}(x)\}^2) \subset A_{\alpha(\beta)}$.

Так как

$$B_{\beta(\gamma)} \cap B_\beta \supset C_\gamma \cap B_\beta \neq \varnothing$$

и $\{B_\beta\} \prec \{\mathcal{O}(x)\}$, то имеем $B_{\beta(\gamma)} \subset \mathrm{N}(B_\beta; \{\mathcal{O}(x)\})$ и

$$\mathrm{N}(B_{\beta(\gamma)}; \{\mathcal{O}(x)\}) \subset \mathrm{N}(B_\beta; \{\mathcal{O}(x)\}^2) \subset A_{\alpha(\beta)}.$$

Отсюда и из леммы 3.2 следует, что $L_\beta = K_{\alpha(\beta)} \subset P_{\beta(\gamma)} = M_\gamma$. □

Завершает доказательство предложения оценка числа

$$\sigma = \operatorname{mesh}(\{C_\gamma\} \otimes \{M_\gamma\}).$$

Очевидно, что $\sigma = \sup\{\operatorname{diam} M(x) \mid x \in X\}$, где $M(x) = \bigcup \{M_\gamma \mid x \in C_\gamma\} \subset F(x)$ есть объединение компактов $M_\gamma = \operatorname{Con} K(x_{\beta(\gamma)})$ диаметра меньше ε.

Пусть $x \in C_\gamma \cap B_\beta$. Так как в силу леммы 3.3 $M_\gamma \supset L_\beta$, то $\{M_\gamma \mid x \in C_\gamma\}$ есть центрированная система компактов, и следовательно, $\sigma = \sup\{\operatorname{diam} M(x) \mid x \in X\} < 2\varepsilon$. □

Наличие стягиваемой полосочной последовательности селекций отображения $F\colon X \rightsquigarrow Y$ тесно связано с существованием её однозначной селекции $s\colon X \to Y$: чем больше длина последовательности, тем выше размерность X.

Предложение 3.4. *Пусть* $F_0 \Subset F_1 \Subset F_2 \Subset \ldots \Subset F_j \Subset \ldots$, $j < m+1$, *есть стягиваемая полосочная последовательность селекций отображения* $F\colon X \rightsquigarrow Y$. *В каждом из следующих случаев существует однозначная селекция* $s\colon X \to Y$ *отображения* F:

а) $m < \infty$ *и* $\dim X \leqslant m$;

б) $m = \infty$ *и* X *является* $\mathcal{C}$*-пространством.*

Доказательство. Пусть для определённости

$$F_i = \{A_\alpha(i)\}_{\alpha\in\Lambda(i)} \otimes \{K_\alpha(i)\}_{\alpha\in\Lambda(i)}, \quad 0 \leqslant i < m+1.$$

Из условия следует, что существует такое локально-конечное замкнутое покрытие $\omega = \bigcup\limits_{i=0}^{m} \omega_i$ пространства X, что $\omega_i = \{W_\gamma(i) \mid \gamma \in \Gamma(i)\}$ есть дискретное семейство, вписанное в $\{A_\alpha(i)\}_{\alpha\in\Lambda(i)}$ (в случае а) это известный факт, в случае б) — определение $\mathcal{C}$-пространства). Через $X_i = \bigcup\{W_\gamma(i) \mid \gamma \in \Gamma(i)\}$ обозначим тело семейства ω_i, которое, как легко видеть, является замкнутым подмножеством X. Ясно, что X есть тело локально-конечного замкнутого покрытия $\{X_i\}_{i=0}^m$.

Доказательство будет завершено, если мы построим последовательность

$$s_n\colon X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \to Y, \quad n = 0,1,2,3,\ldots, \quad n < m+1,$$

селекций отображения F_n так, что будут выполнены следующие свойства:

$$\begin{array}{ll} (\alpha)_{n,\,n>0} & s_n = s_{n-1} \text{ на } X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{n-1}; \\ (\beta)_{n,\,n\geqslant 0} & \text{если } W_\gamma(n) \subset A_{\alpha(\gamma)}(n), \\ & \text{то } s_n(W_\gamma(n)) \subset K_{\alpha(\gamma)}(n) \text{ для любого } \gamma \in \Gamma(n). \end{array}$$

Полагаем $s_0(W_\gamma(0))$ равным любой точке из $K_{\alpha(\gamma)}(0)$. Очевидно, что при этом отображение s_0 будет корректно определено.

Предположим, что отображение s_j определено для любого $j < n$ так, что свойства $(\alpha)_j$, $(\beta)_j$ выполнены. Построим отображение s_n так, что свойства $(\alpha)_n$, $(\beta)_n$ будут выполнены. Так как X_n есть дискретное объединение $W_\gamma(n)$, то достаточно будет построить s_n на каждом $W_\gamma(n)$, $\gamma \in \Gamma(n)$.

Лемма 3.5. $s_{n-1}(W_\gamma(n) \cap X_j) \subset K_{\alpha(\gamma)}(n)$ *для любого* $j < n$.

Доказательство. Достаточно будет проверить, что

$$s_{n-1}(W_\gamma(n) \cap W_{\gamma'}(j)) \subset K_{\alpha(\gamma)}(n)$$

для любого $\gamma' \in \Gamma(j)$. Так как $F_j \Subset F_n$, то из $\varnothing \neq W_\gamma(n) \cap W_{\gamma'}(j)$ следует, что $K_{\alpha(\gamma')}(j) \subset K_{\alpha(\gamma)}(n)$. Но в силу $(\alpha)_{n-1}$ имеем

$$s_{n-1}(W_\gamma(n) \cap W_{\gamma'}(j)) = s_j(W_\gamma(n) \cap W_{\gamma'}(j)).$$

В силу $(\beta)_j$ имеем

$$s_j(W_\gamma(n) \cap W_{\gamma'}(j)) \subset s_j(W_{\gamma'}(j)) \subset K_{\alpha(\gamma')}(j) \subset K_{\alpha(\gamma)}(n).$$

Лемма доказана. □

Итак, частичное отображение

$$W_\gamma(n) \hookleftarrow W_\gamma(n) \cap (X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{n-1}) \overset{s_{n-1}}{\to} K_{\alpha(\gamma)}(n)$$

корректно определено. Так как пространство $K_{\alpha(\gamma)}(n)$ стягиваемо, то существует продолжение $s_n\restriction_{W_\gamma(n)}\colon W_\gamma(n) \to K_{\alpha(\gamma)}(n)$ этого частичного отображения. Так как X_n есть дискретное объединение $W_\gamma(n)$, $\gamma \in \Gamma(n)$, то определено отображение $s_n\colon X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \to Y$, совпадающее с s_{n-1} на $X_0 \cup X_1 \cup \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{n-1}$. Несложно проверить, что s_n есть селекция F_n и выполнены $(\alpha)_n$, $(\beta)_n$. $\square$

4. Неполиэдральное доказательство теоремы Успенского

Предложение 4.1. *Пусть $\mathcal{U}$-непрерывное отображение $F\colon X \rightsquigarrow Y$, удовлетворяющее условию* (3.1) *предложения* 3.1. *Если $F(x)$ стягиваемо для любого $x \in X$, то существует стягиваемая полосочная последовательность селекций F бесконечной длины.*

Доказательство. В силу леммы 2.7 существует 0-полосочная селекция $F_0\colon X \rightsquigarrow Y$ отображения F. Стягиваемость слоёв $F(x)$ означает, что выполнено условие (3.2) предложения 3.1 для $\delta = \varepsilon = \infty$. Последовательно применяя предложение 3.1, построим последовательность $F_0' \Subset F_1$, $F_1' \Subset F_2$, $F_2' \Subset F_3$, $F_3' \Subset \ldots$ полосочных селекций отображения F, в которой F_i, $i \geqslant 1$, стягиваемы, а F_i' является отображением, индуцированным F_i, для любого $i \geqslant 0$. В силу леммы 2.9 $F_i' \Subset F_{i+1}'$ для всех i, $0 \leqslant i < m$, и, следовательно, $F_0' \Subset F_1' \Subset F_2' \Subset \ldots \Subset F_n \Subset \ldots$ есть искомая стягиваемая полосочная последовательность селекций F бесконечной длины. $\square$

Любое метрическое пространство Y после умножения на гильбертов куб Q или гильбертово пространство l_2 становится универсальным пространством относительно компактов. По этой причине все рассматриваемые в статье задачи о нахождении однозначных селекций у многозначных отображений F легко сводятся к случаю, когда все образы $F(x)$ являются универсальными относительно компактов. В дальнейшем будем предполагать это условие выполненным. В качестве лёгкого следствия предложений 4.1 и 3.4 ($m = \infty$) получаем доказательство теоремы Успенского (теоремы 1.3).

5. Доказательство теоремы о сдвиге

С учётом теорем 2.2 и 2.5 теорема о сдвиге (теорема 1.2) легко сводится к более простому для проверки факту.

Теорема 5.1 (редуцированная теорема о сдвиге). *Пусть N есть линейное нормированное пространство с метрикой d, а $\mathcal{L}$ есть η-равномерное Attr^{n+1}- и η-равномерное LC^n-семейство замкнутых подмножеств в N. Пусть также X есть $(n+1)$-мерный паракомпакт. Тогда для любых чисел $0 < \Pi \cdot \beta < \varepsilon < 1$, где*

$\Pi \rightleftharpoons 2 \cdot (1 + (4\eta)^{n+1})$ *и* $\eta = 10$, *для любого отображения* $g\colon X \to N$, $g \overset{\beta}{\approx} F$, *и для любого* $\mu > 0$ *существует такое отображение* $f\colon X \to N$, *что* $f \overset{\mu}{\approx} F$ *и* $f \overset{\varepsilon}{\sim} g$. *Если дополнительно известно, что* $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^n$, *то для любого* $\mu > 0$ *существует такое отображение* $f\colon X \to N$, *что* $f \overset{\mu}{\approx} F$.

Доказательство основывается на теоремах 1.3 и 3.4, для чего необходимо построить последовательность стягиваемых полосочных селекций F^μ с контролируемыми размерами её членов. Первый шаг в указанном направлении связан с исследованием свойств послойной n-асферичности вложения $F^a \hookrightarrow F^{\eta a}$.

Предложение 5.2. *В условии редуцированной теоремы о сдвиге зафиксируем такие числа* $\delta > 0$ *и* $a > 0$, *что*

$$\delta < \frac{1}{\eta}, \quad a < \min\left\{\frac{\delta}{2\eta + 1}; \frac{1 - \eta\delta}{2\eta^2}\right\}. \tag{5.1}$$

Тогда для любого частичного отображения $\mathrm{Con}\, A \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} L^a$, *где* A *есть* n-*мерный компакт и* $L \in \mathcal{L}$, *имеющего диаметр меньше* δ, *существует отображение* $\hat{\varphi}\colon \mathrm{Con}\, A \to L^{\eta a}$, *продолжающее* φ *и такое, что* $\mathrm{diam}\, \hat{\varphi} < (2\eta)\delta$.

Если дополнительно известно, что $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^n$, *то для любого* $0 < \eta \cdot a < 1$ *и для любого частичного отображения* $\mathrm{Con}\, A \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} L^a$ *существует отображение* $\hat{\varphi}\colon \mathrm{Con}\, A \to L^{\eta a}$, *продолжающее* φ.

Доказательство. Так как $a < \eta a < 1$ и $\mathcal{L}$ есть η-равномерное Attr^n-семейство, то существует отображение $\tilde{\varphi}\colon A \to L$, такое что $\tilde{\varphi} \overset{H}{\simeq} \varphi$, где $H[\mathrm{rel}\, \eta a]$. Отсюда очевидно, что $\mathrm{diam}\, \hat{\varphi} < 2\eta a + \delta$. Так как в силу (5.1) $2\eta a + \delta < 2\eta^2 a + {} + \eta\delta < 1$, а $\mathcal{L}$ есть η-равномерное LC^n-семейство, то существует отображение $\chi\colon \mathrm{Con}\, A \to L$, продолжающее $\tilde{\varphi}$ и такое, что $\mathrm{diam}\, \chi < \eta(2\eta a + \delta)$. Соединяя отображения χ и $H\colon A \times I \to L^{\eta a}$ по их общей области определения, построим искомое отображение $\hat{\varphi}\colon \mathrm{Con}\, A \to L^{\eta a}$, продолжающее φ. Ясно, что

$$\mathrm{diam}\, \hat{\varphi} < \eta(2\eta a + \delta) + \eta a = \eta\delta + \eta((2\eta + 1)a) < \eta\delta + \eta\delta.$$

Доказательство добавления проводится дословно аналогично, если игнорировать все ссылки на диаметры образов отображений. □

Теперь построим первый член последовательности стягиваемых полосочных селекций.

Предложение 5.3. *Пусть выполнены условия редуцированной теоремы о сдвиге. Тогда для любого отображения* $g\colon X \to B$, $g \overset{\beta}{\approx} F$, $\beta > 0$, *для любого* $a > 0$ *существует 0-мерная полосочная селекция* $\{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}\colon X \rightsquigarrow B$ *отображения* F^a, *такая что*

$$\mathrm{mesh}(\{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}) < 2\beta, \quad g \overset{2\beta}{\approx} \{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Зафиксируем покрытие $\{\mathcal{O}(x) \mid x \in X\} \in \operatorname{cov} X$ и соответствие $X \ni x \to b_x \in F(x)$ так, чтобы

$$\omega_g(\mathcal{O}(x)) < \frac{\beta}{2}, \quad g(x) \overset{\beta}{\sim} b_x. \tag{5.3}$$

В силу леммы 2.8 F^a является $\mathcal{U}$-отображением. Поэтому можно дополнительно считать, что $\mathcal{O}(x) \times \{b_x\} \subset \operatorname{Gr}(F^a)$. Рассмотрим локально-конечное открытое покрытие $\{A_\alpha\} \prec \{\mathcal{O}(x)\}$, и пусть для определённости $A_\alpha \subset \mathcal{O}(x_\alpha)$. Тогда полагаем $K_\alpha \rightleftharpoons b_{x_\alpha}$. Ясно, что $\{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}$ есть 0-полосочная селекция отображения F^a.

Проверим выполнение (5.2). В силу утверждения 2) леммы 2.6 имеем

$$\operatorname{mesh}(\{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}) = \sup\{\operatorname{diam} K(x) \mid x \in X\},$$

где

$$K(x) = \bigcup\{K_\alpha \mid x \in A_\alpha\} = \bigcup\{b_{x_\alpha} \mid x \in A_\alpha\}.$$

Поэтому достаточно показать, что $\operatorname{dist}(b_{x_\alpha}, b_{x_{\alpha'}}) < 2\beta$ для $x \in A_\alpha \cap A_{\alpha'}$, а также что $g(x) \overset{2\beta}{\sim} g(x_\alpha)$ для любой точки $x \in A_\alpha$. Но это так в силу оценок, следующих из (5.3):

$$b_{x_\alpha} \overset{\beta}{\sim} g(x_\alpha) \overset{\beta/2}{\sim} g(x) \overset{\beta/2}{\sim} g(x_{\alpha'}) \overset{\beta}{\sim} b_{x_{\alpha'}}.$$

Предложение доказано. □

Приводимое ниже предложение позволяет осуществить индуктивное построение $(i+1)$-го члена последовательности стягиваемых полосочных селекций, зная её i-й член.

Предложение 5.4. *Пусть выполнены условия редуцированной теоремы о сдвиге 5.1, и пусть фиксированы числа $\delta > 0$ и $a > 0$, удовлетворяющие условию (5.1) предложения 5.2. Тогда для любой k-мерной полиэдральной полосочной селекции $\{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, отображения F^a с $\operatorname{mesh}(\{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}) < \delta$ существует стягиваемая $(k+1)$-мерная полиэдральная полосочная селекция $\{C_\gamma\} \otimes \{M_\gamma\}$ отображения $F^{\eta \cdot a}$, такая что*

а) *$\{B_\beta\} \otimes \{L_\beta\} \Subset \{C_\gamma\} \otimes \{M_\gamma\}$ для некоторого полосочного отображения $\{B_\gamma\} \otimes \{L_\gamma\}$, индуцированного $\{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}$;*

б) *$\operatorname{mesh}(\{C_\gamma\} \otimes \{M_\gamma\}) < 4\eta\delta$.*

Если дополнительно известно, что $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^n$, то для любого числа $a > 0$, $\eta a < 1$, и для любой k-полосочной селекции $\{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, отображения F^a существует такая стягиваемая $(k+1)$-мерная полосочная селекция $\{C_\gamma\} \otimes \{M_\gamma\}$ отображения $F^{\eta \cdot a}$, что выполнено а).

Доказательство. В силу замечания, сделанного после теоремы 2.2, $F^{\eta a}(x)$ является сильно универсальным относительно компактов. В силу предложения 5.2 любой k-мерный компакт $A \subset F^a(x)$, $\operatorname{diam} A < \delta$, стягивается в точку по компакту $B \subset F^{\eta a}(x)$, $\operatorname{diam} B < 2\eta\delta \rightleftharpoons \varepsilon$. Следовательно, для чисел $\delta < \varepsilon$, для $\mathcal{U}$-непрерывного отображения $F^{\eta a}$ и его селекции F^a, для $\{A_\alpha\} \otimes \{K_\alpha\}$ выполнены все условия предложение 3.1. Применение предложения 3.1 завершает доказательство.

Дополнение доказывается аналогично, если полностью игнорировать все ссылки на mesh отображений. $\square$

Завершение доказательства теоремы 5.1. В силу предложения 5.3 существует 0-мерная полосочная селекция

$$F_0 = \{A_\alpha(0)\} \otimes \{K_\alpha(0)\} \colon X \rightsquigarrow N$$

отображения F^a, такая что $\mathrm{mesh}(F_0) < 2\beta$ и $g \overset{\beta}{\approx} F_0$.

В силу теоремы 5.4 существует стягиваемая 1-мерная полиэдральная полосочная селекция

$$F_1 = \{A_\alpha(1)\} \otimes \{K_\alpha(1)\} \colon X \rightsquigarrow N$$

отображения $F^{\eta \cdot a}$, такая что $F_0' \Subset F_1$ для некоторого 0-мерного полосочного отображения F_0', индуцированного F_0, и $\mathrm{mesh}(F_1) < 4\eta \cdot (2\beta) = 8\eta \cdot \beta$. Из утверждения (2.4) леммы 2.9 следует, что $\mathrm{mesh}(F_0') \leqslant \mathrm{mesh}(F_0) < 2\beta$ и $g \overset{2\beta}{\approx} F_0'$.

Повторяем предыдущее рассуждение для F_1: в силу теоремы 5.4 существует стягиваемая 2-мерная полиэдральная полосочная селекция

$$F_2 = \{A_\alpha(2)\} \otimes \{K_\alpha(2)\} \colon X \rightsquigarrow N$$

отображения $F^{\eta^2 \cdot a}$, такая что $F_1' \Subset F_2$ для некоторого 1-мерного полиэдрального полосочного отображения F_1', индуцированного F_1, и $\mathrm{mesh}(F_2) < (4\eta)^2 \cdot (2\beta)$. Из утверждения (2.4) леммы 2.9 следует, что F_1' является стягиваемым 1-мерным полиэдральным полосочным отображением, $\mathrm{mesh}(F_1') < (4\eta) \cdot (2\beta)$. И т. д.

В результате мы построим последовательность

$$F_0' \Subset F_1' \Subset F_2' \Subset \ldots \Subset F_n' \Subset F_{n+1}$$

стягиваемых полосочных селекций отображения $F^{\eta^{n+1} \cdot a} \subset F^\mu$, в которой $\mathrm{mesh}(F_{n+1}) < (4\eta)^{n+1} \cdot (2\beta)$. Из теоремы 3.4а) следует, что существует однозначная селекция $f \colon X \to B$ отображения F_{n+1}. Поскольку $\eta^{n+1} \cdot a < \mu$, то $F_{n+1} \subset F^\mu$ и $f \overset{\mu}{\approx} F$.

Так как $g \overset{2\beta}{\approx} F_0'$, $F_0' \Subset F_{n+1}$ и $\mathrm{mesh}(F_{n+1}) < (4\eta)^{n+1} \cdot (2\beta)$, то $\mathrm{dist}(g, f) < 2(1 + (4\eta)^{n+1}) \cdot \beta = \Pi \cdot \beta$, что меньше ε по условию теоремы 5.1.

Пусть дополнительно известно, что $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^n$. В силу предложения 5.3 существует 0-мерная полосочная селекция $F_0 = \{A_\alpha(0)\} \otimes \{K_\alpha(0)\} \colon X \rightsquigarrow N$ отображения F^a, такая что $\mathrm{mesh}(F_0) < 2\beta$ и $g \overset{\beta}{\approx} F_0$. Далее следует повторить рассуждения из начала доказательства, убрав все ссылки на mesh отображений. $\square$

6. Дополнение

Доказательство теоремы 2.5. Пусть $\mathcal{Q}$ есть свойство, которым обладают некоторые пары $\sigma \prec \tau$ вписанных открытых покрытий метрического пространства W. Пусть известно, что $\mathcal{Q}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) если $(\sigma \prec \tau) \in \mathcal{Q}$ и $\tau \prec \tau'$, то $(\sigma \prec \tau') \in \mathcal{Q}$;

б) если $\sigma' \prec \sigma$ и $(\sigma \prec \tau) \in \mathcal{Q}$, то $(\sigma \prec \tau) \in \mathcal{Q}$;

в) для любого покрытия τ существует пара $(\sigma \prec \tau) \in \mathcal{Q}$.

В случае теоремы 2.5 мы рассматриваем следующее свойство $\mathcal{Q}$ вписанных покрытий метрического пространства $N \in \mathrm{ANE}$: $(\sigma \prec \omega) \in \mathcal{Q}$ в том и только в том случае, когда для них выполнено заключение определения 2.1 для $\mathcal{L}$, а также для любого $V \in \sigma$ существует такое $U \in \omega$, что $V \subset U$ и любое вложение $V \cap L \hookrightarrow U \cap L$, $L \in \mathcal{L}$, i-асферично. Легко видеть, что для $\mathcal{Q}$ выполнены условия а)—в). Таким образом, теорема 2.5 получается как частный случай следующего более общего утверждения.

Теорема 6.1. *Пусть $\varphi\colon W \to T$ есть отображение метрических пространств (W, ϱ_W) и (T, ϱ_T), а $\omega \in \operatorname{cov} W$. Тогда существует допустимая метрика $d \geqslant \varrho$ на W и константа $\eta \geqslant 8$, такие что*

1) *$\varphi\colon (W, d) \to (T, \varrho_T)$ есть отображение Липшица с константой 1;*

2) *$\{\mathrm{N}_d(w; 1)\}_{w \in W} \prec \omega$;*

3) *для любых $0 < \eta\delta < \varepsilon < 1$ имеем*

$$(\{\mathrm{N}_d(w; \delta) \mid w \in W\} \prec \{\mathrm{N}_d(w; \varepsilon) \mid w \in W\}) \in \mathcal{Q}.$$

Переходя, если требуется, к допустимой метрике $\varrho_W + \varphi^* \varrho_T \geqslant \varrho_W$, где $(\varphi^* \varrho_T)(w, w') \rightleftharpoons \varrho_T(\varphi(w), \varphi(w'))$, мы с самого начала можем считать, что φ удовлетворяет условию 1).

Нам будем удобно в дальнейшем перейти от покрытий к функциям. Пусть $\alpha\colon W \to (0, 1]$ есть непрерывная функция (постоянные функции отождествляются с их значением). Через $\mathcal{U}(\alpha)$ обозначим симметричную окрестность

$$\{(w, w') \mid w' \in \mathrm{N}(w, \alpha(w)) \text{ и } w \in \mathrm{N}(w', \alpha(w'))\} \subset W \times W$$

диагонали $\mathrm{Diag} = \{(w, w) \mid w \in W\}$; через $\mathcal{W}(\alpha)$ обозначим «несимметричную» окрестность

$$\{(w, w') \mid w' \in \mathrm{N}(w, \alpha(w))\} \subset W \times W.$$

Очевидно, что $\mathrm{Diag} \subset \mathcal{U}(\alpha) \subset \mathcal{W}(\alpha)$. Можно считать, что $\mathcal{U}(\alpha) \subset \mathcal{W}(\alpha)$ есть многозначные отображения из W в W. Через $\mathcal{W}(\alpha)(w)$ и $\mathcal{U}(\alpha)(w)$ обозначаются образы точки $w \in W$.

Центральную роль в доказательстве теоремы играет следующая метризационная лемма, аналогичная [10, с. 185].

Лемма 6.2. *Пусть $\{U_n \mid n \geqslant 1\}$ есть такая последовательность симметричных подмножеств $W \times W$, что $U_1 = W \times W$, $\bigcap\{U_n \mid n \geqslant 1\} = \mathrm{Diag}$ и $(U_{n+1})^3 \subset U_n$ для всех $n \geqslant 1$. Тогда существует допустимая метрика $\rho(w, w')$ на W, такая что $U_n \subset \mathcal{W}_\rho(2^{-n+1}) \subset U_{n-1}$ для всех $n > 1$.*

Сделаем ряд простых уточнений к лемме 6.2, доказательство которых опускаем.

Если $0 < 8\delta < \varepsilon < 1$, то $\mathcal{W}_\rho(\delta) \subset U_{n+1} \subset U_n \subset \mathcal{W}_\rho(\varepsilon)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. (6.1)

Если $\operatorname{diam}_{\varrho_W}(U_{n-1}(w)) < 4^{-n}$ для всех $w \in W$, то $d \geqslant \varrho_T$. (6.2)

Очевидно, что с учётом (6.1) доказательство теоремы 6.1 сводится к следующей лемме.

Лемма 6.3. *Существуют такие функции $\alpha_i\colon W \to (0, 2^{-i}]$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, что*

$$\{\mathcal{W}(\alpha_1)(w) \mid w \in W\} \prec \omega; \tag{6.3}$$

$$(\mathcal{W}(\alpha_{i+1}))^3 \subset \mathcal{W}(\alpha_i) \text{ для всех } i \geqslant 1; \tag{6.4}$$

$$(\{\mathcal{W}(\alpha_{i+1})(w) \mid w \in W\} \prec \{\mathcal{W}(\alpha_i)(w) \mid w \in W\}) \in \mathcal{Q}. \tag{6.5}$$

Доказательству этой леммы предшествует ряд вспомогательных утверждений. Возможность заменить произвольные непрерывные функции функциями Липшица гарантирует следующая лемма. Обозначим через $\operatorname{Lip}(W)$ функции Липшица с константой Липшица $L < 1/2$.

Лемма 6.4 (см. [7]). *Для любой непрерывной функции $\alpha\colon W \to (0,1]$ существует такая функция $\beta\colon W \to (0,1]$ из класса $\operatorname{Lip}(W)$, что $\beta < \alpha$.*

Для любой функции $\alpha\colon W \to (0,1]$ имеем $\mathcal{U}(\alpha) \subset \mathcal{W}(\alpha)$. Пусть $\beta \in \operatorname{Lip}(W)$ и $2\beta < \alpha$. Если $\varrho_T(w, w') < \beta(w)$, то отсюда следует, что

$$\frac{2}{3}\beta(w') \leqslant \beta(w) \leqslant 2\beta(w') < \alpha(w').$$

Следовательно, нами доказано, что

для любой функции $\alpha\colon W \to (0,1]$ существует такая функция $\beta\colon W \to (0,1]$, что $\mathcal{W}(\beta) \subset \mathcal{U}(\alpha)$. (6.6)

Следующее предложение подготавливает условия для применения метризационной леммы.

Лемма 6.5. *Пусть W есть метрическое пространство с метрикой ϱ_T и функции $\alpha, \beta\colon W \to (0,1] \in \operatorname{Lip}(W)$ таковы, что $8 \cdot \beta < \alpha$. Тогда*

$$(\mathcal{U}(\beta))^3 = \mathcal{U}(\beta) \circ \mathcal{U}(\beta) \circ \mathcal{U}(\beta) \subset \mathcal{U}(\alpha).$$

Доказательство. Ясно, что имеют место следующие два неравенства:

$$\beta(b) \leqslant \beta(a) + \frac{1}{2} \cdot \varrho_T(a,b) < \beta(a) + \frac{1}{2} \cdot \beta(a),$$
$$\beta(a) \leqslant \beta(b) + \frac{1}{2} \cdot \varrho_T(a,b) < \beta(b) + \frac{1}{2} \cdot \beta(b).$$

Первое из них влечёт $\beta(b) < 2\beta(a)$, второе — $\beta(a) < 2\beta(b)$.

Пусть $(w_l, w_{l+1}) \in \mathcal{U}(\beta)$ для $l = 1, 2, 3$. Тогда

$$\begin{aligned} \varrho_T(w_1, w_4) &\leqslant \sum_{l=1}^{3} \varrho_T(w_l, w_{l+1}) \leqslant \\ &\leqslant \min\{\beta(w_1) + \beta(w_2) + \beta(w_3), \beta(w_2) + \beta(w_3) + \beta(w_4)\} \leqslant \\ &\leqslant \min\{\beta(w_1) + 2\beta(w_1) + 4\beta(w_1), 4\beta(w_4) + 2\beta(w_4) + \beta(w_4)\} \leqslant \\ &\leqslant \min\{\alpha(w_1), \alpha(w_4)\}. \end{aligned}$$

Следовательно, $(w_1, w_4) \in \mathcal{U}(\alpha)$. □

Доказательство леммы 6.3. Используя паракомпактность W и условия а)—в) свойства $\mathcal{Q}$, несложно заключить, что существует такая функция $\alpha_1\colon W \to (0, 2^{-1}]$, что для $\sigma \in \operatorname{cov} W$, совпадающего с ω, имеем

$$\{\mathcal{W}(\alpha_1)(w) \mid w \in W\} \prec \sigma, \quad (\{\mathcal{W}(\alpha_1)(w) \mid w \in W\} \prec \sigma) \in \mathcal{Q}. \tag{6.7}$$

Далее, в силу (6.7) существует такая функция $\beta_1\colon W \to (0, 1]$, $\beta_1 < \alpha_1$, что

$$(\{\mathcal{W}(\beta_1)(w) \mid w \in W\} \subset \{\mathcal{W}(\alpha_1)(w) \mid w \in W\}) \in \mathcal{Q}.$$

В силу леммы 6.5 существует такая функция $\gamma_1\colon W \to (0, 1]$, что

$$(\mathcal{U}(\gamma_1))^3 \subset \mathcal{U}(\beta_1) \subset \mathcal{W}(\beta_1).$$

Наконец, в силу (6.6) существует такая функция $\alpha_2\colon W \to (0, 2^{-1}]$, что

$$\mathcal{W}(\alpha_2) \subset \mathcal{U}(\gamma_1).$$

Далее следует повторить рассуждения из предыдущего абзаца и построить искомые функции $\alpha_3, \alpha_4, \dots$. □

Доказательство теоремы 1.4. До конца раздела предполагаем, что выполнены условия теоремы 1.1. Легко заметить, что из теоремы 1.2 о сдвиге для F_{n+1} следует, что

> для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое покрытие $\delta_n \in \operatorname{cov} Y$, $\operatorname{mesh} \delta_n < 2^{-n}$, что любое отображение $g\colon X \to Y$, $g \overset{\delta_n}{\approx} F$, может быть 2^{-n}-аппроксимировано отображением $f\colon X \to Y$, таким что $f \overset{\delta_{n+1}}{\approx} F$. (6.8)

Если дополнительно к (6.8) мы докажем, что для любого $\delta \in \operatorname{cov} Y$ существует δ-селекция отображение F, то естественным образом возникающая последовательность

$$f_1 \overset{2^{-1}}{\sim} f_2 \overset{2^{-2}}{\sim} f_3 \overset{2^{-3}}{\sim} \dots$$

однозначных δ_n-селекций $f_n\colon X \to Y$ отображения F в пределе даёт искомую селекцию $s\colon X \to Y$ отображения F. Доказательство теоремы 1.4 будет завершено.

Предложение 6.6. *Для любого* $\delta \in \operatorname{cov} Y$ *существует отображение* $f\colon X \to Y$, *такое что* $f \overset{\delta}{\approx} F$.

В силу теоремы 2.2 для подпространства $A_i \rightleftharpoons \bigcup \mathcal{L}_i$, $0 \leqslant i \leqslant n+1$, метрического пространства (Y, ϱ) существует изометрическое замкнутое вложение $A_i \hookrightarrow \mathfrak{L}(A_i)$ в линейное бесконечномерное нормированное пространство $\mathfrak{L}(A_i)$.

Пусть $\varphi_i\colon \mathfrak{L}(A_i) \to \mathfrak{L}(A_{i+1})$ есть продолжение вложения $A_i \hookrightarrow A_{i+1}$. Воспользовавшись теоремой 6.1, построим обратной индукцией совместимые метрики $d_{n+1}, d_n, \ldots, d_1, d_0$ на пространствах $\mathfrak{L}(A_{n+1}), \mathfrak{L}(A_n), \ldots, \mathfrak{L}(A_1), \mathfrak{L}(A_0)$, такие что

$\varphi_i\colon (\mathfrak{L}(A_i), d_i) \to (\mathfrak{L}(A_{i+1}), d_{i+1})$, $0 \leqslant i \leqslant n$, есть отображение Липшица с константой 1; (6.9)

$\{\mathrm{N}_{d_{n+1}}(w; 1) \mid w \in \mathfrak{L}(A_{n+1})\}\restriction_{A_{n+1}}$ как угодно мелко; (6.10)

$\bigcup\{\mathcal{L}_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n+1\}$ есть η-равномерное Attr^{n+1}- и LC^{i-1}-семейство подмножеств в $\mathfrak{L}(A_{n+1})$. (6.11)

С учётом приведённых рассуждений предложение 6.6 легко сводится к более простому для проверки факту.

Предложение 6.7. *Пусть выполнены условия* (6.9)—(6.11). *Тогда для любого* $\mu \in [0,1]$ *существует отображение* $f\colon X \to \mathfrak{L}(A_{n+1})$, *такое что* $f \overset{\mu}{\approx} F_{n+1}$.

Пусть $\eta^{n+1} \cdot a < \mu$. В силу (6.9)

$$\varphi_i((F_i)^{\eta^i \cdot a}) \subset (F_{i+1})^{\eta^i \cdot a} \text{ для любого } i \leqslant n. \tag{6.12}$$

Из (6.12) легко следует, что

если $\{A_\alpha(i)\} \otimes \{K_\alpha(i)\}$ есть полосочная селекция отображения $(F_i)^{\eta^i \cdot a}$, то $\varphi_i(\{A_\alpha(i)\} \otimes \{K_\alpha(i)\})$ есть полосочная селекция отображения $(F_{i+1})^{\eta^i \cdot a}$. (6.13)

Если мы построим последовательность

$$\begin{aligned} H_0 = \{A_\alpha(0)\}_{\alpha\in\Lambda(0)} \otimes \{K_\alpha(0)\}_{\alpha\in\Lambda(0)} &\xrightarrow{\varphi_0} \\ \xrightarrow{\varphi_0} H_1 = \{A_\alpha(1)\}_{\alpha\in\Lambda(1)} \otimes \{K_\alpha(1)\}_{\alpha\in\Lambda(1)} &\xrightarrow{\varphi_1} \ldots \xrightarrow{\varphi_n} \\ \xrightarrow{\varphi_n} H_{n+1} = \{A_\alpha(n+1)\}_{\alpha\in\Lambda(n+1)} &\otimes \{K_\alpha(n+1)\}_{\alpha\in\Lambda(n+1)} \end{aligned}$$

стягиваемых полосочных селекций

$$H_i = \{A_\alpha(i)\} \otimes \{K_\alpha(i)\}$$

отображений $(F_i)^{\eta^i \cdot a}\colon Y \rightsquigarrow \mathfrak{L}(A_i)$ так, чтобы $\varphi_i(H_i) \Subset H_{i+1}$, то аналогично предложению 3.4а) можно доказать, что существует однозначная селекция $f\colon X \to \mathfrak{L}(A_{n+1})$ отображения $(F_{n+1})^{\eta^{n+1} \cdot a}$, а следовательно, и μ-селекция F.

Если мы имеем полосочную селекцию H_i отображения $(F_i)^{\eta^i \cdot a}$, то, повторив рассуждения из предложения 5.4, относящиеся к случаю $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^n$, мы построим стягиваемую полосочную селекцию H_{i+1} отображения F_{i+1} так, чтобы

$\varphi_i(H_i) \Subset H_{i+1}$. Тем самым будет завершено доказательство предложения 6.7, а следовательно, и теоремы 1.4. $\square$

Литература

[1] Семёнов П. В., Щепин Е. В. Об универсальности 0-мерной селекционной теоремы // Функцион. анализ и его прил. — 1992. — Т. 26, № 2. — С. 105—108.

[2] Щепин Е. В., Бродский Н. Б. Селекции фильтрованных многозначных отображений // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. — 1996. — Т. 212. — С. 218—239.

[3] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

[4] Ageev S. Non-polyhedral proof of Uspenskij's Selection Theorem. — Preprint. — 2001.

[5] Ancel F. D. The role of countable dimensionality in the theory of cell-like relations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1985. — Vol. 287. — P. 1—40.

[6] Bessaga C., Pelchinskii A. Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology. — Warsaw: PWN, 1975.

[7] Bestvina M., Mogilskii J. Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts // Michigan Math. J. — 1986. — Vol. 33. — P. 291—313.

[8] Dugundji J., Michael E. On local and uniformly local topological properties // Proc. Amer. Math. Soc. — 1956. — Vol. 7. — P. 304—308.

[9] Hu S. T. Theory of retracts. — Wayne State Univ. Press, 1965.

[10] Kelley J. L. General Topology. — Berlin: Springer, 1975. — (Grad. Texts Math.; Vol. 27).

[11] Michael E. Continuous selections. I // Ann. of Math. (2). — 1956. — Vol. 63. — P. 361—382.

[12] Michael E. Continuous selections. II // Ann. of Math. (2). — 1956. — Vol. 64. — P. 562—580.

[13] Michael E. Continuous selections. III // Ann. of Math. (2). — 1957. — Vol. 65. — P. 375—390.

[14] Repovš D., Semenov P. V. Continuous Selections of Multivalued Mappings. — Kluwer Academic, 1998.

[15] Rourke C. P., Sanderson B. J. Introduction to Piece-Linear Topology. — Springer, 1982.

[16] Uspenskij V. V. A selection theorem for $\mathbf{C}$-spaces // Topology Appl. — 1998. — Vol. 85. — P. 351—374.