Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2006. Том 14. № 2. С. 35–47

УДК 517.972.8

КАСАТЕЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА К МНОЖЕСТВАМ И УСЛОВИЯ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ТОЧЕК ПОДМНОЖЕСТВ УПОРЯДОЧЕННЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В. В. Гороховик

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: gorokh@im.bas-net.by
Поступила в редакцию 16.10.2006

Введение. При исследовании различных задач нелинейного анализа, в частности, задач оптимизации с ограничениями наряду с производными функций и отображений широко используются локальные аппроксимации множеств. Наиболее часто в качестве локальных аппроксимаций первого порядка для множеств выбираются конусы, образованные касательными (в различных смыслах) векторами. В настоящей статье рассматривается следующее понятие касательного конуса первого порядка.

Условимся сначала о некоторых обозначениях. Всюду ниже символ S будет обозначать семейство всех последовательностей положительных вещественных чисел (t_n), $t_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$; $S(\alpha)$ — подсемейство из S, состоящее из таких последовательностей (t_n), которые сходятся к вещественному числу $\alpha \geq 0$; $S(\infty)$ — подсемейство последовательностей положительных вещественных чисел, сходящихся к $+\infty$.

Пусть X — вещественное нормированное пространство, Q — подмножество из X.

Через U_Q будем обозначать семейство всех последовательностей (x_n) таких, что $x_n \in Q$, $n = 1, 2, \ldots$; $U_Q(x)$ — подсемейство из U_Q, состоящее из последовательностей (x_n), сходящихся (в смысле нормы пространства X) к x; $U_Q(\infty)$ — подсемейство последовательностей из U_Q таких, что $\|w_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Говорят, что вектор $h \in X$ является *касательным вектором первого порядка* к множеству Q в точке $x^0 \in \operatorname{cl} Q$, если существуют последовательности $(t_n) \in S(0)$ и $(h_n) \in U_X(h)$ такие, что $x^0 + t_n h_n \in Q$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Совокупность всех векторов из X, касательных (первого порядка) к множеству Q в точке $x^0 \in \operatorname{cl} Q$, образует замкнутый конус, который мы будем обозначать символом $TQ(x^0)$.

Непосредственно из определения следует, что

$$TQ(x^0) = \operatorname*{Lim\,sup}_{t \to 0,\ t>0} \frac{Q - x^0}{t},$$

где в правой части последнего равенства стоит верхний предел Пенлеве–Куратовского [9] многозначного отображения $t \rightrightarrows \dfrac{Q - x^0}{t}$ при $t \to 0$, $t > 0$.

В литературе конус $TQ(x^0)$ встречается под различными названиями: *конус направлений, допустимых по ограничениям* , *конус допустимых в широком смысле направлений* [7], *конус возможных направлений* [8], *контингентный конус* [9, 11, 13]. Следуя [1, 10, 15], мы будем называть конус $TQ(x^0)$ *касательным конусом первого порядка* к множеству Q в точке $x^0 \in \operatorname{cl} Q$.

В конечномерных пространствах каждая последовательность из множества, сходящаяся к исследуемой точке, представлена в касательном конусе первого порядка соответствующими ей касательными векторами. Это позволяет получить не только необходимые, но и достаточные условия оптимальности первого порядка, причем разрыв между этими условиями минимален в том смысле, что его нельзя устранить, оставаясь в рамках локальных аппроксимаций первого порядка. Стремление сократить этот разрыв мотивировало исследования локальных аппроксимаций множеств второго и более высокого порядков. Развивая идеи, лежащие в основе понятия касательных (в смысле данного выше определения) векторов первого порядка, в работах [1, 3, 9–11, 15] было введено понятие касательных векторов второго порядка (этот подход будет описан в разд. 1) и с их помощью для решений целого ряда задач оптимизации получены необходимые условия оптимальности второго порядка. Вместе с тем оказалось, что даже в конечномерном случае с помощью таких касательных векторов второго порядка нельзя, вообще говоря, получить достаточные условия оптимальности. Причина в том, что не каждой последовательности, сходящейся к исследуемой точке, и соответствующему этой последовательности касательному вектору первого порядка может быть сопоставлена непустая совокупность касательных векторов второго порядка. Чтобы преодолеть этот недостаток, были предприняты попытки расширить совокупность касательных векторов второго порядка, пополнив их асимптотически касательными векторами второго порядка [14] (см. также [4, 5]). Несколько по-другому фактически те же идеи были реализованы в работе [12]. Настоящая работа примыкает к этим исследованиям. В разд. 1 мы развиваем предложенный в [1, 3, 9–12, 15] подход к построению локальных аппроксимаций второго порядка для абстрактных множеств, а затем в разд. 2 применяем их для анализа минимальных точек подмножеств упорядоченных векторных пространств.

1. Конус касательных векторов второго порядка к множествам. Наиболее естественный путь распространения идей, лежащих в основе понятия касательных векторов первого порядка, на случай касательных векторов второго порядка представлен в следующем определении.

Определение 1.1 (см., например, [1, 3, 9–11, 15]). Вектор $w \in X$ назовем *истинно касательным вектором второго порядка* к множеству $Q \subset X$ в точке $x^0 \in \operatorname{cl} Q$ по направлению $h \in X$ (или просто в $(x^0, h) \in \operatorname{cl} Q \times X$), если существуют последовательности $(t_n) \in S(0)$ и $(w_n) \in U_X(w)$ такие, что $x^0 + t_n h + t_n^2 w_n \in Q$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Множество всех истинно касательных векторов второго порядка к множеству $Q \subset X$ в точке $x^0 \in \operatorname{cl} Q$ по направлению $h \in X$ будем обозначать символом $Q^2(x^0, h)$. Непосредственно из определения 1.1 заключаем, что

$$Q^2(x^0,\, h) = \operatorname*{Lim\,sup}_{t \to 0,\, t>0} \frac{Q - x^0 - th}{t^2}. \tag{1.1}$$

Из свойств верхнего предела Пенлеве–Куратовского (см., например, [9]) следует, что $Q^2(x^0, h)$ является замкнутым (возможно, пустым) подмножеством в X.

Предложение 1.1.

(i) $Q^2(x^0, 0) = TQ(x^0)$.

(ii) Если $Q^2(x^0, h) \neq \emptyset$, *то* $h \in TQ(x^0)$.

(iii) $Q^2(x^0, \alpha h) = \alpha^2 Q^2(x^0, h)$ *для всех* $\alpha > 0$.

(iv) Если $w \in Q^2(x^0, h)$, *то* $w + \beta h \in Q^2(x^0, h)$ *для всех* $\beta \in \mathbb{R}$.

Доказательство справедливости этих свойств нетрудно получить непосредственно из определений $TQ(x^0)$ и $Q^2(x^0,h)$.

Так как векторы $h_1,h_2 \in TQ(x^0)$, удовлетворяющие при некотором $\alpha > 0$ равенству $h_1 = \alpha h_2$, определяют одно и то же касательное направление к множеству Q в точке x^0, то это мотивирует введение в качестве локальной аппроксимации второго порядка множества следующего конуса:

$$Q^2(x^0,[h]) = \mathrm{cl}\Big(\bigcup_{\alpha>0} Q^2(x^0,\alpha h)\Big). \tag{1.2}$$

Из свойства (iii) (см. предложение 1.1) заключаем, что $Q^2(x^0,[h]) = \mathrm{cl}(\mathrm{cone}\, Q^2(x^0,h))$. Таким образом, $Q^2(x^0,[h])$ является замкнутым конусом, причем

$$Q^2(x^0,[h]) = Q^2(x^0,[\gamma h]) \quad \text{для всех} \quad \gamma > 0.$$

Будем называть конус $Q^2(x^0,[h])$ *истинно касательным конусом второго порядка* к множеству Q в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\, Q$ по направлению $[h]$.

Охарактеризуем элементы конуса $Q^2(x^0,[h])$ через элементы порождающего множества $Q^2(x^0,h)$, т.е. через истинно касательные векторы второго порядка к множеству Q в точке x^0 по направлению h.

Пусть w — произвольный вектор из $Q^2(x^0,[h])$. В силу (1.2) существуют последовательность положительных чисел $(\alpha_n) \in S$ и последовательность векторов $(w_n) \in X$ такие, что $w_n \in Q^2(x^0,\alpha_n h)$ и $w_n \to w$ при $n \to \infty$. Из свойства (iii) следует, что $w_n = \alpha_n^2 w_n'$, где $w_n' \in Q^2(x^0,h)$.

Предположим, что последовательность (α_n) ограничена и пусть некоторое положительное число $\alpha > 0$ является предельной точкой этой последовательности. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можем считать, что $\alpha_n \to \alpha$. Тогда $w_n' = \alpha^{-2} w_n \to \alpha^{-2} w$. В силу замкнутости $Q^2(x^0,h)$ имеем $\alpha^{-2} w \in Q^2(x^0,h)$, т.е. $w \in Q^2(x^0,\alpha h)$ и, следовательно, $w \in \mathrm{cone}\, Q^2(x^0,h)$.

Предположим далее, что последовательность (α_n) ограничена и имеет единственную нулевую предельную точку, т.е. $\alpha_n \to 0$. В этом случае из равенств $w_n = \alpha_n^2 w_n'$, где $w_n' \in Q^2(x^0,h)$, и $w_n \to w$ следует, что $w \in [Q^2(x^0,h)]_\infty$, где $[Q^2(x^0,h)]_\infty$ — асимптотический конус множества $Q^2(x^0,h)$ *).

Рассмотрим наконец третий возможный случай, когда последовательность (α_n) неограничена. Не теряя общности, можем считать в этом случае, что $\alpha_n \to +\infty$. Так как $w_n \to w$, то из равенства $w_n' = \alpha_n^{-2} w_n$ следует, что $w_n' \to 0$ и, следовательно, $0 \in Q^2(x^0,h)$, поскольку множество $Q^2(x^0,h)$ замкнуто. Из определения касательного конуса первого порядка заключаем, что $w \in T[Q^2(x^0,h)](0)$.

Таким образом, справедливо включение

$$Q^2(x^0,[h]) \subset (\mathrm{cone}[Q^2(x^0,h)]) \cup [Q^2(x^0,h)]_\infty \cup T[Q^2(x^0,h)](0),$$

а так как $[Q^2(x^0,h)]_\infty \subset \mathrm{cl}(\mathrm{cone}[Q^2(x^0,h)])$ и $T[Q^2(x^0,h)](0) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{cone}[Q^2(x^0,h)])$, то справедливо равенство

$$Q^2(x^0,[h]) = (\mathrm{cone}[Q^2(x^0,h)]) \cup [Q^2(x^0,h)]_\infty \cup T[Q^2(x^0,h)](0). \tag{1.3}$$

*) Вектор $w \in X$ называется *асимптотическим вектором* множества $\Omega \subset X$, если для него существуют такие последовательности $(\alpha_n) \in S(0)$ и $(h_n) \in U_\Omega$, что $\alpha_n h_n \to w$. Совокупность всех асимптотических векторов множества Ω образует замкнутый конус, который обозначается символом Ω_∞ и называется *асимптотическим конусом множества* Ω. Нетрудно убедиться, что $\Omega_\infty = (\Omega - v)_\infty \subset \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(Q - v))$ для всех $v \in X$.

Пример 1.1. Пусть $Q = x^0 + K$, где K — замкнутый конус из X. Тогда $TQ(x^0) = K$ и $Q^2(x^0, [h]) = TK(h)$ для всех $h \in K$.

Пример 1.2. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $Q := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ x_2 = x_1^2\}$. Для точки $x^0 = (0,0)$, принадлежащей данному множеству, $TQ(0) = \{(h_1, h_2) |\ h_2 = 0\}$, а

$$Q^2(0, [h]) = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 |\ w_2 \geq 0\}$$

для всех $h \in TQ(0)$, $h \neq 0$.

Пример 1.3. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $Q := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ x_1 \geq 0,\ x_1^2 = x_2^3\}$ и пусть $x^0 = (0,0)$.

Непосредственно из определений касательных векторов первого и второго порядков можно получить, что $TQ(0) = \{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 |\ h_1 = 0,\ h_2 \geq 0\}$, а $Q^2(0, [h]) = \emptyset$ для любого $h \in Q^2(0, h)$, $h \neq 0$.

Пример 1.3 показывает, что даже в конечномерных пространствах конус истинно касательных векторов второго порядка к некоторым множествам может оказаться пустым и, следовательно, не давать никакой дополнительной информации о локальном строении таких множеств в окрестности исследуемой точки. Более того, даже в тех случаях, когда конус истинно касательных векторов второго порядка не пуст, он может не содержать в себе информацию о некоторых последовательностях, сходящихся к исследуемой точке и, следовательно, неполно характеризовать локальное строение множества. Это обстоятельство стимулирует введение для множеств в качестве их локальной аппроксимации второго порядка несколько более широкого множества векторов, нежели конус истинно касательных векторов второго порядка.

Определение 1.2 (ср. с [12]). Вектор $w \in X$ назовем *касательным вектором второго порядка* к множеству $Q \subset X$ в точке $x^0 \in \operatorname{cl} Q$ по направлению $h \in X$, если существуют последовательности $(t_n), (\tau_n) \in S(0)$ и $(w_n) \in U_X(w)$ такие, что $x^0 + t_n h + t_n \tau_n w_n \in Q$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Нетрудно видеть, что множество всех касательных векторов второго порядка к множеству $Q \subset X$ в точке $x^0 \in \operatorname{cl} Q$ по направлению $h \in X$ является конусом, который будем обозначать символом $T^2Q(x^0, h)$ и называть *касательным конусом второго порядка* к множеству Q в точке $x^0 \in \operatorname{cl} Q$ по направлению h. Так как

$$T^2Q(x^0, h) = \operatorname*{Lim\,sup}_{\substack{t \to 0,\ t > 0 \\ \tau \to 0,\ \tau > 0}} \frac{Q - x^0 - th}{t\tau}, \tag{1.4}$$

то в силу свойств верхнего предела $T^2Q(x^0, h)$ является замкнутым конусом в X.

Нетрудно видеть, что $T^2Q(x^0, 0) = TQ(x^0)$ и $Q^2(x^0, [h]) \subset T^2Q(x^0, h)$ $\forall\, x^0 \in \operatorname{cl} Q$, $h \in X$. Кроме того,

$$T^2Q(x^0, h) \neq \emptyset \Longrightarrow h \in TQ(x^0).$$

В конечномерных пространствах справедлива и обратная импликация.

Предложение 1.2. *Если* $\dim X < \infty$, *то* $T^2Q(x^0, h) \neq \emptyset$ *для любого* $x^0 \in \operatorname{cl} Q$ *и любого* $h \in TQ(x^0)$.

Доказательство. Пусть $h \in TQ(x^0)$ и пусть $(t_n) \in S(0)$ и $(h_n) \in U_X(h)$ таковы, что $x_n := x^0 + t_n h_n \in Q$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим последовательность $(h_n) \in U_X(h)$. Если $h_n = h$ для бесконечного числа номеров n, то, заменив (x_n) соответствующей подпоследовательностью $x_{n_k} = x^0 + t_{n_k} h$, получим $x_{n_k} = x^0 + t_{n_k} h \in Q$ для всех k, откуда следует $0 \in T^2Q(x^0, h)$, поэтому в этом случае $T^2Q(x^0, h) \neq \emptyset$.

Если же $h_n = h$ лишь для конечного числа номеров n, то без ограничения общности можем считать, что $h_n \neq h$ для всех n. Рассмотрим последовательность $w_n := \dfrac{h_n - h}{\|h_n - h\|}$. Так как единичная сфера конечномерного нормированного пространства X компактна, то из (w_n) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому вектору w, $\|w\| = 1$. Без ограничения общности можем считать, что сама последовательность (w_n) сходится к w. Положив $\tau_n := \|h_n - h\|$, получим $x^0 + t_n h + t_n \tau_n w_n = x_n \in Q$ для всех n. Значит, $w \in T^2Q(x^0, h)$ и, следовательно, $T^2Q(x^0, h) \neq \emptyset$.

Предложение доказано.

Предложение 1.3. *Для любого* $x^0 \in \operatorname{cl} Q$ *и любого* $h \in TQ(x^0)$ *справедливо включение*

$$T^2Q(x^0, h) \subset \operatorname{cl}(\operatorname{cone}(\operatorname{cone}(Q - x^0) - h)). \tag{1.5}$$

Если же Q *— выпуклое множество, то для любого* $x^0 \in Q$ *и любого* $h \in \operatorname{cone}(Q - x^0)$ *имеет место равенство*

$$T^2Q(x^0, h) = \operatorname{cl}(\operatorname{cone}(\operatorname{cone}(Q - x^0) - h)). \tag{1.6}$$

Доказательство. Пусть $w \in T^2Q(x^0, h)$ и пусть $(t_n), (\tau_n) \in S(0)$ и $(w_n) \in U_X(w)$ таковы, что $x_n := x^0 + t_n h + t_n \tau_n w_n \in Q$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $w_n = \tau_n^{-1}(t_n^{-1}(x_n - x^0) - h) \to w$. Так как $t_n^{-1}(x_n - x^0) \in \operatorname{cone}(Q - x^0)$, то $w_n \in \operatorname{cone}(\operatorname{cone}(Q - x^0) - h)$ и, следовательно, $w \in \operatorname{cl}(\operatorname{cone}(\operatorname{cone}(Q - x^0) - h))$.

Предположим теперь, что множество Q является выпуклым и, кроме того, $x^0 \in Q$, $h \in \operatorname{cone}(Q - x^0)$. Тогда существует $\delta_1 > 0$ такое, что $x^0 + \delta_1 h \in Q$, а поскольку $x^0 \in Q$, то $x^0 + th \in Q$ для всех $t \in [0, \delta_1]$.

С другой стороны, для любого $w \in \operatorname{cone}(\operatorname{cone}(Q - x^0) - h)$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $h + \varepsilon w \in \operatorname{cone}(Q - x^0)$, а из этого следует, что для некоторого $\delta_2 > 0$ выполняется $x^0 + \delta_2(h + \varepsilon w) \in Q$ и, следовательно, $x^0 + t(h + \varepsilon w) \in Q$ для всех $t \in [0, \delta_2]$. Таким образом, для всех $t \in [0, \delta]$, где $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, имеем $x^0 + th \in Q$ и $x^0 + th + t\varepsilon w \in Q$. Из этих включений и выпуклости Q для любого $t \in [0, \delta]$ получаем $x^0 + th + t\alpha\varepsilon w \in Q$ для всех $\alpha \in [0, 1]$ или, иначе, $x^0 + th + t\tau w \in Q$ для всех $\tau \in [0, \varepsilon]$. Итак, $x^0 + th + t\tau w \in Q$ для всех $t \in [0, \delta]$ и всех $\tau \in [0, \varepsilon]$, откуда следует, что $w \in T^2Q(x^0, h)$. Таким образом, $\operatorname{cone}(\operatorname{cone}(Q - x^0) - h) \subset T^2Q(x^0, h)$ и, следовательно, в силу замкнутости $T^2Q(x^0, h)$ получаем, что

$$\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(\operatorname{cone}(Q - x^0) - h)) \subset T^2Q(x^0, h).$$

Воспользовавшись далее включением (1.5), приходим к требуемому равенству (1.6).

Предложение доказано.

Определение 1.3. α*-Слоем* касательного конуса второго порядка к множеству $Q \subset X$ в точке $x^0 \in \operatorname{cl} Q$ по направлению $h \in X$ ($\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \{+\infty\}$) назовем подмножество $T^2_\alpha Q(x^0, h)$ из $T^2Q(x^0, h)$, состоящее из таких векторов $w \in X$, для которых существуют последовательности $(t_n), (\tau_n) \in S(0)$ и $(w_n) \in U_X(w)$ такие, что $x^0 + t_n h + t_n \tau_n w_n \in Q$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и, кроме того, $t_n^{-1}\tau_n \to \alpha$ при $n \to \infty$.

Нетрудно убедиться, что

$$T^2Q(x^0, h) = \bigcup_{\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+} T^2_\alpha Q(x^0, h). \tag{1.7}$$

Кроме того,

$$T^2_\alpha Q(x^0, 0) = TQ(x^0) \quad \text{для всех} \quad \alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{1.8}$$

Предложение 1.4. *Для любого* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *справедливы равенства*

$$\alpha T^2_\alpha Q(x^0, h) = Q^2(x^0, h). \tag{1.9}$$

В частности,

$$T^2_1 Q(x^0, h) = Q^2(x^0, h). \tag{1.10}$$

Доказательство. Если $w \in T_\alpha^2 Q(x^0,h)$, то существуют $(t_n),(\tau_n) \in S(0)$ и $(w_n) \in U(w)$ такие, что $x^0+t_nh+t_n\tau_nw_n \in Q$ для всех n и $t_n^{-1}\tau_n \to \alpha$. Положив $w_n' := t_n^{-1}\tau_n w_n$, получим $x^0+t_nh+(t_n)^2w_n' \in Q$ для всех n, причем $t_n \to 0$, $w_n' \to \alpha w$. Следовательно, $\alpha w \in Q^2(x^0,h)$, что влечет $\alpha T_\alpha^2 Q(x^0,h) \subset Q^2(x^0,h)$.

Обратно, пусть $w \in Q^2(x^0,h)$ и пусть $x^0+t_nh+t_n^2w_n \in Q$ для всех n, где $(t_n) \in S(0)$, $(w_n) \in U(w)$. Выбрав $t_n' = t_n$, $\tau_n' = \alpha t_n$, $w_n' = \alpha^{-1}w_n$, получим $x^0+t_n'h+t_n'\tau_nw_n' \in Q$ для всех n, откуда следует $\alpha^{-1}w \in T_\alpha^2Q(x^0,h)$. Значит, $Q^2(x^0,h) \subset \alpha T_\alpha^2 Q(x^0,h)$. Это завершает доказательство равенства (1.9).

Равенство (1.10) является очевидным следствием (1.9).

Предложение доказано.

Следствие 1.1. *Справедливо равенство*

$$T^2Q(x^0,h) = \operatorname{cone} Q^2(x^0,h) \cup T_0^2Q(x^0,h) \cup T_\infty^2 Q(x^0,h). \tag{1.11}$$

Для доказательства (1.11) достаточно воспользоваться равенствами (1.7) и (1.9), а также определением конической оболочки множества.

Замечание 1.1. Слой $T_\infty^2Q(x^0,h)$ есть не что иное, как асимптотически касательный конус второго порядка к множеству Q в точке $x^0 \in \operatorname{cl} Q$ по направлению $h \in X$, который был введен в работах [4, 5, 14].

Предложение 1.5. *Для любого* $\alpha \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \{+\infty\}$ *справедлива импликация*

$$w \in T_\alpha^2Q(x^0,h) \implies w+\mu h \in T_\alpha^2Q(x^0,h) \quad \text{для всех} \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

Доказательство. Зафиксируем вещественное число $\mu \in \mathbb{R}$ и выберем произвольный вектор $w \in T_\alpha^2Q(x^0,h)$, а также соответствующие этому вектору последовательности (t_n), $(\tau_n) \in S(0)$ и $(w_n) \in U(w)$ такие, что $x_n := x^0+t_nh+t_n\tau_nw_n \in Q$ для всех n и $t_n^{-1}\tau_n \to \alpha$. Положим $t_n' = t_n(1+\mu\tau_n)^{-1}$, $\tau_n' = \tau_n$, $w_n' = w_n + \mu\,\dfrac{x_n-x^0}{t_n}$. Заметим, что $t_n' > 0$ при достаточно больших n и $t_n' \to 0$. Кроме того, так как $\dfrac{x_n-x^0}{t_n} \to h$, то $w_n' \to w+\mu h$. Нетрудно также убедиться в справедливости следующей цепочки равенств:

$$w_n' = w_n + \mu\,\frac{x_n-x^0}{t_n} = \frac{\dfrac{x_n-x^0}{t_n}-h}{\tau_n} + \mu\,\frac{x_n-x^0}{t_n} = \frac{(1+\mu\tau_n)\dfrac{x_n-x^0}{t_n}-h}{\tau_n} = \frac{\dfrac{x_n-x^0}{t_n'}-h}{\tau_n},$$

из которой следует, что $x^0+t_n'h+t_n'\tau_nw_n' = x_n \in Q$ для всех n, при этом $\dfrac{\tau_n}{t_n'} = \dfrac{\tau_n}{t_n}(1+\mu\tau_n) \to \alpha$. Следовательно, $w+\mu h \in T_\alpha^2Q(x^0,h)$. Предложение доказано.

Предложение 1.6. *Если* $T_0^2Q(x^0,h) \neq \emptyset$, *то* $0 \in T_\alpha^2Q(x^0,h)$ *для всех* $\alpha \in \mathbb{R}_+$. *Если же нормированное пространство* X *конечномерно, то справедливо и обратное: из того, что* $0 \in T_\alpha^2Q(x^0,h)$ *для некоторого (а, значит, и для любого)* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, *следует* $T_0^2Q(x^0,h) \neq \emptyset$. *Более того, существует ненулевой вектор* w *такой, что* $w \in T_0^2Q(x^0,h)$.

Доказательство. Предположим, что $T_0^2Q(x^0,h) \neq \emptyset$. Выберем произвольный вектор $w \in T_0^2Q(x^0,h)$ и соответствующие ему последовательности $(t_n),(\tau_n) \in S(0),(w_n) \in U(w)$ такие, что $x^0+t_nh+t_n\tau_nw_n \in Q$ для всех n и $t_n^{-1}\tau_n \to 0$. Так как $w_n' = t_n^{-1}\tau_nw_n \to 0$ и $x^0+t_nh+t_n^2w_n' \in Q$ для всех n, то $0 \in Q^2(x^0,h)$. В силу (1.9) $\alpha T_\alpha^2Q(x^0,h) = Q^2(x^0,h)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и, следовательно, $0 \in T_\alpha^2Q(x^0,h)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Обратно, пусть $0 \in T_\alpha^2Q(x^0,h)$ при некотором $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тогда найдутся последовательности $(t_n),(\tau_n) \in S(0)$, $(w_n) \in U(0)$ такие, что $x^0+t_nh+t_n\tau_nw_n \in Q$ для всех n и $t_n^{-1}\tau_n \to \alpha$. Пусть $w_n' := \dfrac{w_n}{\|w_n\|}$, $n = 1,2,\ldots$ Если нормированное пространство X конечномерно, то в силу компактности единичного шара без ограничения общности можно считать, что последовательность (w'_n) сходится к некоторому вектору w, $\|w\| = 1$. Определим, кроме того, последовательности $t'_n = t_n$ и $\tau'_n = \tau_n\|w_n\|$. Тогда $(t'_n), (\tau'_n) \in S(0)$, причем $(t'_n)^{-1}(\tau'_n) = t_n^{-1}\tau_n\|w_n\| \to 0$ и $x^0 + t'_n h + t'_n\tau'_n w'_n \in Q$ для всех n. Значит, $w \in T_0^2 Q(x^0, h)$.

Предложение доказано.

Для множества $Q := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ x_1 \geq 0,\ \ x_1^2 = x_2^3\}$, точки $x^0 = (0, 0) \in Q$ и любого вектора $h \in TQ(0)$, $h \neq 0$, как было указано в примере 1.3, множество истинно касательных векторов $Q^2(0, h)$ пусто. Из предложений 1.4 и 1.6 следует, что в этом случае множества $T_\alpha^2 Q(x^0, h)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, также являются пустыми. Поскольку в силу предложения 1.2 $T^2Q(x^0, h) \neq \emptyset$, то из равенства (1.7) заключаем, что $T_\infty^2 Q(x^0, h) \neq \emptyset$. Непосредственно вычисляя, получаем $T_\infty^2 Q(x^0, h) = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 |\ w_1 \geq 0\}$.

2. Условия минимальности второго порядка для точек подмножеств упорядоченных нормированных пространств. Пусть X — вещественное векторное пространство. Непустое множество P из X называется *конусом*, если $\lambda x \in P$ для всех $x \in P$ и всех положительных вещественных чисел $\lambda > 0$. Конус P называется *асимметричным*, если $P \cap (-P) = \emptyset$, т.е. если из $x \in P$ следует, что $-x \notin P$. Конус P является *выпуклым*, если $P + P \subset P$.

Всякий асимметричный выпуклый конус $P \subset X$ индуцирует на X отношение предпочтения (асимметричное и транзитивное бинарное отношение) $\prec_P$ на X, определенное следующим образом:

$$x_1 \prec_P x_2 \iff x_2 - x_1 \in P, \tag{2.1}$$

конус P называется при этом *конусом положительных элементов* или просто *положительным конусом* отношения предпочтения $\prec_P$.

Пусть Q — подмножество из X.

Говорят, что точка $x^0 \in Q$ является P*-минимальной* точкой множества Q, если в Q не существует точки $x \in Q$, удовлетворяющей соотношению $x \prec_P x^0$.

Множество всех P-минимальных точек множества $Q \subset X$ будем обозначать символом $\mathrm{Min}(Q\,|\,P)$. Очевидно, что

$$x^0 \in \mathrm{Min}(Q\,|\,P) \iff (Q - x^0) \cap (-P) = \emptyset. \tag{2.2}$$

Далее будем предполагать, что пространство X является нормированным, а конус положительных элементов P, определяющий на X отношение предпочтения $\prec_P$, имеет непустую внутренность, т.е. $\mathrm{int}\, P \neq \emptyset$.

Точка $x^0 \in Q$ называется *слабо* P*-минимальной* точкой множества Q, если

$$x^0 \in \mathrm{Min}(Q\,|\,\mathrm{int}\, P),$$

т.е. если $(Q - x^0) \cap (-\mathrm{int}\, P) = \emptyset$.

Множество, элементами которого являются слабо P-минимальные точки множества Q, будем обозначать символом $w - \mathrm{Min}(Q\,|\,P)$. Так как $\mathrm{int}\, P \subset P$, то

$$\mathrm{Min}(Q\,|\,P) \subset w - \mathrm{Min}(Q\,|\,P). \tag{2.3}$$

Если конус положительных элементов P является открытым, то понятия P-минимальности и слабой P-минимальности совпадают. Если же $P \neq \mathrm{int}\, P$, то включение (2.3) является, вообще говоря, собственным.

Точка $x^0 \in Q$ называется *строго* P*-минимальной* точкой множества Q, если

$$(Q - x^0) \cap (-\mathrm{cl}\, P) = \{0\}.$$

Для обозначения множества строго P-минимальных точек множества Q будем использовать символ $st - \mathrm{Min}(Q\,|\,P)$. Нетрудно видеть, что

$$st - \mathrm{Min}(Q\,|\,P) \subset \mathrm{Min}(Q\,|\,P). \tag{2.4}$$

Если конус положительных элементов P является таким, что $\mathrm{cl}\,P = P \cup \{0\}$, то понятия P-минимальности и строгой P-минимальности совпадают. Если же $P \neq \mathrm{cl}\,P \setminus \{0\}$, то включение (2.4) может быть собственным.

Естественным образом определяются локальные аналоги введенных выше понятий P-минимальных, слабо P-минимальных и строго P-минимальных точек из Q: точка $x^0 \in Q$ называется *локально P-минимальной* (соответственно *локально слабо P-минимальной* или *локально строго P-минимальной*) точкой множества Q, если существует вещественное число $\varepsilon > 0$ такое, что $x^0 \in \mathrm{Min}(Q \cap B_\varepsilon(x^0)\,|\,P)$ (соответственно $x^0 \in w - \mathrm{Min}(Q \cap B_\varepsilon(x^0)\,|\,P)$ или $x^0 \in st - \mathrm{Min}(Q \cap B_\varepsilon(x^0)\,|\,P)$), где $B_\varepsilon(x^0)$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x^0.

Основная цель настоящего раздела — получить необходимые, а также достаточные условия второго порядка для локально P-минимальных точек подмножеств упорядоченных нормированных пространств. Эти условия будут сформулированы в терминах локальных конических аппроксимаций множеств первого и второго порядков, которым были посвящены предыдущие разделы.

В силу включений (2.3) и (2.4) любая локально P-минимальная точка множества Q является также локально слабо P-минимальной точкой, а любая локально строго P-минимальная точка локально P-минимальной точкой. Следовательно, любое необходимое условие локальной слабой P-минимальности является также необходимым и для P-минимальных точек. Аналогично, любое достаточное условие локальной строгой P-минимальности является достаточным для локальной P-минимальности.

Как следует из определения, понятие слабой P-минимальности корректно лишь в том случае, когда конус положительных элементов $P \subset X$ имеет непустую внутренность, поэтому всюду ниже будем полагать, что $\mathrm{int}\,P \neq \emptyset$. В двойственных терминах непустота внутренности конуса P может быть охарактеризована следующим образом.

Пусть X^* — пространство, топологически двойственное нормированному пространству X, т.е. векторное пространство, элементами которого являются непрерывные линейные функционалы, определенные на X.

Говорят, что непрерывный линейный функционал $x^* \in X^*$ является *P-положительным,* если $x^*(x) \geq 0$ для всех $x \in P$; множество P-положительных непрерывных линейных функционалов на X будем обозначать символом P^+.

Из теорем об отделимости выпуклых множеств следует, что для любого выпуклого конуса $P \subset X$ с непустой внутренностью ($\mathrm{int}\,P \neq \emptyset$) множество P-положительных непрерывных линейных функционалов P^+ является нетривиальным ($P^+ \neq \emptyset$) $*$-слабо замкнутым выпуклым конусом в X^*.

Предложение 2.1. *Выпуклый конус $P \subset X$ телесен тогда и только тогда, когда конус P-положительных непрерывных линейных функционалов P^+ имеет $*$-слабо компактную базу B, при этом*

$$\mathrm{int}\,P = \{x \in X|\ \min_{b^* \in B} b^*(x) > 0\},$$

$$\mathrm{cl}\,P = \{x \in X|\ \min_{b^* \in B} b^*(x) \geq 0\}.$$

Напомним, что выпуклое подмножество $B \subset P^+$ называется *базой* выпуклого конуса P^+, если $0 \notin \mathrm{cl}\,B$ и для любого $x^* \in P^+$, $x^* \neq 0$, существуют единственным образом определенные $b^* \in B$ и вещественное число $\lambda > 0$ такие, что $x^* = \lambda b^*$.

Используя предложение 2.1, непосредственно из определений получаем следующие аналитические характеристики слабо P-минимальных и строго P-минимальных точек.

Предложение 2.2 (ср. с [2], предложение 19.2). *Для того чтобы точка $x^0 \in Q$ была локально слабо P-минимальной, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство*

$$\max_{b^* \in B} b^*(x - x^0) \geq 0 \quad \textit{для всех} \quad x \in Q \cap B_\varepsilon(x^0).$$

Предложение 2.3 (ср. с [2], предложение 19.3). *Для того чтобы точка $x^0 \in Q$ была локально строго P-минимальной, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство*

$$\max_{b^* \in B} b^*(x - x^0) > 0 \quad \textit{для всех} \quad x \in Q \cap B_\varepsilon(x^0), \quad x \neq x^0.$$

Теорема 2.1 (необходимое условие слабой минимальности первого порядка). *Для того чтобы точка $x^0 \in Q$ была локально слабо P-минимальной, необходимо, чтобы выполнялось неравенство*

$$\max_{b^* \in B} b^*(h) \geq 0 \quad \textit{для всех} \quad h \in TQ(x^0) \tag{2.5}$$

или, эквивалентно, чтобы

$$0 \in w - \mathrm{Min}(TQ(x^0) \,|\, P). \tag{2.6}$$

Доказательство. Пусть $h \in TQ(x^0)$ и пусть последовательности $(t_n) \in S(0)$ и $(h_n) \in U_X(h)$ таковы, что $x^0 + t_n h_n \in Q$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Если точка $x^0 \in Q$ является локально слабо P-минимальной в Q, то в силу предложения 2.2 при достаточно больших n имеем $\max\limits_{b^* \in B} b^*(h_n) \geq 0$, откуда, переходя к пределу по n, вследствие непрерывности функции $x \to \max\limits_{b^* \in B} b^*(x)$ получим $\max\limits_{b^* \in B} b^*(h) \geq 0$. Это доказывает условие (2.5), которое эквивалентно в силу предложения 2.2 условию (2.6). Теорема доказана.

Теорема 2.2 (достаточное условие строгой минимальности первого порядка). *Если пространство X конечномерно, то для того чтобы точка $x^0 \in Q$ была локально строго P-минимальной, достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\max_{b^* \in B} b^*(h) > 0 \quad \textit{для всех} \quad h \in TQ(x^0), \quad h \neq 0, \tag{2.7}$$

или, эквивалентно, чтобы

$$0 \in st - \mathrm{Min}(TQ(x^0) \,|\, P). \tag{2.8}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что эквивалентность условий (2.7) и (2.8) следует из предложения 2.3. Докажем достаточность условия (2.7). Будем рассуждать от противного. Предположим, что условие (2.7) выполнено, а точка $x^0 \in Q$ не является локально строго P-минимальной. Тогда найдется последовательность $(x_n) \in U_Q(x^0)$, $x_n \neq x^0$, такая, что

$$\max_{b^* \in B} b^*(x_n - x^0) \leq 0 \quad \text{для всех} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность $h_n := \dfrac{x_n - x^0}{\|x_n - x^0\|}$, порожденная последовательностью (x_n), является сходящейся. Если это не так, то перейдем к подпоследовательности с таким свойством. Пусть $h = \lim\limits_{n \to \infty} h_n$. Очевидно, что $h \in TQ(x^0)$, причем

$h \neq 0$. С другой стороны, из условия (2.9) получим $\max\limits_{b^* \in B} b^*(h_n) \leq 0$, откуда в силу непрерывности функции $x \to \max\limits_{b^* \in B} b^*(x)$ приходим к неравенству $\max\limits_{b^* \in B} b^*(h) \leq 0$, которое противоречит условию (2.7). Теорема доказана.

Теорема 2.3 (необходимое условие слабой минимальности второго порядка). *Для того чтобы точка $x^0 \in Q$ была локально слабо P-минимальной, необходимо, чтобы*

N1) *для каждого $h \in TQ(x^0)$ такого, что $\max\limits_{b^* \in B} b^*(h) = 0$, выполнялось неравенство*

$$\max_{b^* \in B(h)} b^*(w) \geq 0 \quad \text{для всех} \quad w \in T^2Q(x^0, h), \tag{2.10}$$

где $B(h) := \{b^* \in B |\ b^*(h) = 0\}$,

или, эквивалентно, чтобы

N2) *для каждого $h \in TQ(x^0) \cap (-\operatorname{cl} P)$ выполнялось условие*

$$0 \in w - \operatorname{Min}(T^2Q(x^0, h) |\ P(h)), \tag{2.11}$$

где $P(h)$ — асимметричная часть выпуклого замкнутого конуса

$$\overline{P}(h) := \{x \in X |\ b^*(x) \geq 0 \quad \text{для всех} \quad b^* \in B(h)\},$$

т.е. $P(h) = \overline{P}(h) \setminus (-\overline{P}(h))$.

Доказательство. Пусть точка $x^0 \in Q$ является локально слабо P-минимальной в Q. Тогда в силу теоремы 2.1 выполнено условие (2.5). Поскольку $-\operatorname{cl} P = \{x \in X |\ \max\limits_{b^* \in B} b^*(x) \leq 0\}$, то условие $h \in TQ(x^0) \cap (-\operatorname{cl} P)$ эквивалентно тому, что $h \in TQ(x^0)$ и $\max\limits_{b^* \in B} b^*(h) = 0$. Выберем произвольный $h \in TQ(x^0) \cap (-\operatorname{cl} P)$. Вследствие равенства $\max\limits_{b^* \in B} b^*(h) = 0$ множество $B(h)$ и функция $u \to \max\limits_{b^* \in B(h)} b^*(u)$ есть соответственно субдифференциал и производная по направлениям функции $x \to \max\limits_{b^* \in B} b^*(x)$ в точке $x = h$. Более того, так как вследствие непрерывности и выпуклости функция $x \to \max\limits_{b^* \in B} b^*(x)$ является также локально липшицевой, то

$$\lim_{t \to +0,\ u \to v} \frac{\max\limits_{b^* \in B} b^*(h + tu) - \max\limits_{b^* \in B} b^*(h)}{t} = \max_{b^* \in B(h)} b^*(v). \tag{2.12}$$

Рассмотрим произвольный вектор $w \in T^2Q(x^0, h)$ и выберем последовательности $(t_n), (\tau_n) \in S(0)$ и $(w_n) \in U_X(w)$ так, что $x_n := x^0 + t_n h + t_n \tau_n w_n \in Q$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Поскольку $x_n \to x^0$, то из предложения 2.2 следует, что при достаточно больших n выполняется неравенство $\max\limits_{b^* \in B} b^*(h + \tau_n w_n) \geq 0$. Следовательно,

$$\frac{\max\limits_{b^* \in B} b^*(h + \tau_n w_n) - \max\limits_{b^* \in B} b^*(h)}{\tau_n} \geq 0.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу по n, получим в силу (2.12) неравенство

$$\max_{b^* \in B(h)} b^*(w) \geq 0.$$

Таким образом, условие (2.10) доказано. Эквивалентность неравенства (2.10) условию (2.11) следует из того, что множество $B(h)$ $*$-слабо компактно и является базой конуса $P(h)$.

Теорема доказана.

Замечание 2.1. Более слабый вариант необходимого условия минимальности второго порядка с $Q^2(x^0,[h])$ вместо $T^2Q(x^0,h)$ в (2.10) и (2.11) получен в [3].

Для формулировки достаточного условия минимальности второго порядка нам понадобится следующее понятие.

Вектор $h \in TQ(x^0)$ назовем *радиально касательным* вектором первого порядка к множеству Q в точке x^0, если найдется такая последовательность $(t_n) \in S(0)$, что $x_n := x^0 + t_n h \in Q$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Совокупность всех радиально касательных векторов первого порядка к множеству Q в точке x^0 образует (вообще говоря, не замкнутый) подконус конуса $TQ(x^0)$, который мы будем обозначать символом $RQ(x^0)$.

Теорема 2.4 (достаточное условие строгой минимальности второго порядка). *Если X — конечномерное евклидово пространство, то для того чтобы точка $x^0 \in Q$ была локально строго P-минимальной, достаточно, чтобы*

S1) *было справедливо (2.5) и для каждого $h \in TQ(x^0)$, $h \neq 0$, такого, что $\max\limits_{b^* \in B} b^*(h) = 0$ имело место включение $h \in TQ(x^0) \setminus RQ(x^0)$ и выполнялось неравенство*

$$\max_{b^* \in B(h)} b^*(w) > 0 \quad \text{для всех} \quad w \in T^2Q(x^0,h) \cap L_h^{\perp}, \quad w \neq 0, \tag{2.13}$$

где $L_h^{\perp}$ — произвольное прямое дополнение одномерного подпространства $L_h := \{\beta h |\ \beta \in \mathbb{R}\}$,

или, эквивалентно, чтобы

S2) *было справедливо (2.6) и для каждого $h \in TQ(x^0) \cap (-\operatorname{cl} P)$, $h \neq 0$, имело место включение $h \in TQ(x^0) \setminus RQ(x^0)$ и выполнялось условие*

$$0 \in st - \operatorname{Min}(T^2Q(x^0,h) \cap L_h^{\perp} |\ P(h)). \tag{2.14}$$

Доказательство. Эквивалентность условий S1) и S2) следует из эквивалентности условий (2.5) и (2.6) и тех же аргументов, которые были приведены в доказательстве предыдущей теоремы при обосновании эквивалентности условий N1) и N2).

Докажем достаточность условия S1). Так же, как и при доказательстве теоремы 2.2, будем рассуждать от противного. Предположим, что условие S1) выполняется, а точка x^0 не является локально строго P-минимальной. Тогда найдется последовательность $(x_n) \in U_Q(x^0)$, $x_n \neq x^0$, удовлетворяющая (2.9) и такая, что соответствующая ей последовательность $h_n := \dfrac{h_n - h}{\|h_n - h\|}$ сходится к некоторому вектору $h \in TQ(x^0)$, для которого выполняется равенство $\max\limits_{b^* \in B} b^*(h) = 0$.

Если $h_n = h$ для бесконечного числа номеров n, то из последовательности (h_n) можно выделить подпоследовательность (h_{n_k}) такую, что $h_{n_k} = h$ для всех k. Без ограничения общности можно считать, что исходная последовательность (x_n) такова, что $h_n = h$ для всех n. В этом случае $x_n = x^0 + t_n h$, где $t_n = \|x_n - x^0\|$ для всех n и, значит, $h \in RQ(x^0)$, что невозможно в силу условий теоремы.

Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что $h_n \neq h$ для всех n. Рассмотрим последовательность $w_n := \dfrac{h_n - h}{\|h_n - h\|}$ и предположим, что $w_n \to w$ при $n \to \infty$ (при необходимости перейдем к подпоследовательности, для которой это условие выполняется). Из определений векторов h_n и w_n имеем, что $x_n = x^0 + t_n h + t_n \tau_n w_n$, где $t_n := \|x_n - x^0\|$, $\tau_n := \|h_n - h\|$. Следовательно, $w \in T^2Q(x^0,h)$, причем $w \neq 0$. Без ограничения общности можем считать, что на X задано скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \to \mathbb{R}$ и $\|x\| = (\langle x,x\rangle)^{\frac{1}{2}}$. При любом n справедлива следующая цепочки равенств

$$1 = \langle h_n, h_n\rangle = \|h_n - h\|^2 + 2\langle h_n - h, h\rangle + \|h\|^2,$$

а поскольку $\|h\| = 1$, то

$$\|h_n - h\| + \langle \|h_n - h\|^{-1}(h_n - h), h\rangle = 0.$$

Устремляя $n \to \infty$, получаем $\langle w, h\rangle = 0$. Следовательно, w принадлежит ортогональному дополнению L_h.

Так как последовательность (x_n) удовлетворяет условию (2.9), то

$$\max_{b^*\in B} b^*(h + \tau_n w_n) \le 0 \quad \text{для всех} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Из этих неравенств, рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 2.3, получим

$$\max_{b^*\in B(h)} b^*(w) \le 0.$$

Полученное неравенство противоречит, однако, условию (2.13).

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф06Р-020).

Литература

1. *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997. 254 с.
2. *Гороховик В.В.* Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Минск: Наука и техника, 1990. 239 с.
3. *Гороховик В.В., Рачковский Н.Н.* Условия первого и второго порядка локальной собственной минимальности в задачах векторной оптимизации. Минск, 1990. 27 с. (Препринт / Ин-т математики АН БССР: № 50 (450).)
4. *Гороховик В.В.* К условиям локального минимума второго порядка в гладких задачах оптимизации с абстрактными ограничениями // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2005. № 3. С. 5–12.
5. *Гороховик В.В.* Асимптотически касательный конус второго порядка к множествам и условия локального минимума в задаче оптимизации с ограничениями // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 10. 2006. Вып. 1. С. 34–41.
6. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 3. С. 395–453.
7. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Приближенные методы решения экстремальных задач. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1968. 180 с.
8. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
9. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. Boston: Birkhauser, 1990. 461 p.
10. *Bonnans J.F., Cominetti R., Shapiro A.* Second order optimality conditions based on parabolic second order tangent sets // SIAM J. Optimization. 1999. V. 9. № 2. P. 466–492.
11. *Bonnans J.F., Shapiro A.* Perturbation Analysis of Optimization Problems. Berlin: Springer, 2000. 601 p.
12. *Cambini A., Martein L., Vlach M.* Second order tangent sets and optimality conditions // Math. Japonica. 1999. V. 49. № 3. P.451–461.
13. *Mordukhovich B.S.* Variational Analysis and Generalized Differentiation. V. I: Basic Theory. Berlin et al.: Springer, 2005. 1057 p.
14. *Penot J.P.* Second order conditions for optimization problems with constraints // SIAM J. Control and Optimization. 1998. V. 37. № 1. P. 303–318.
15. *Rockafellar R.T., Wets R.J.-B.* Variational analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 733 p.

V. V. Gorokhovik

Second order tangent vectors to sets and minimality conditions for points of subsets of ordered normed spaces

Summary

Using the extended second order tangent cone as a local approximation of a subset at a neighborhood of the point under consideration, we obtain both necessary and sufficient (in finite-dimensional spaces) conditions for locally minimal points of subsets of ordered normed spaces. The gap between necessary and sufficient conditions obtained in the paper is irremovable in the setting of second order local approximations.