Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений - 2003
Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. 2004. Том 12, №1. С. 64–67

УДК 517.5

ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ КАЛЬДЕРОНА-КОЛЯДЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ ОДНОРОДНОГО ТИПА

И. А. Иванишко

We proof the embedding theorem of Sobolev type

$$\|\mathcal{N}_{\sigma,q}f\|_{\theta,p} \le c\,\|\mathcal{N}_{\eta,q}f\|_p\,, \qquad \eta(t) \le \sigma(t)t^{\gamma(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})}$$

in terms of sharp-maximal functions

$$\mathcal{N}_{\eta,q}f(x) = \sup \frac{1}{\eta(t)} \left(\frac{1}{\mu B(y,t)} \int\limits_{B(y,t)} |f-f(x)|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

and Lorentz classes on the spaces of homogeneous type. In euclidean case this inequality was proved by V.I.Kolyada.

Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, топология которого задается квазиметрикой $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}_+$ (неравенство треугольника заменено неравенством

$$d(x,y) \le a_d[d(x,z) + d(y,z)]$$

с некоторой постоянной $a_d \ge 1$, не зависящей от $x, y, z \in X$), то есть открытые шары

$$B(x,t) = \{y \in X : d(x,y) < t\}, \;\; x \in X, \; t > 0,$$

образуют базу окрестностей топологии X. Пусть еще μ — положительная борелевская мера на X, связанная с d условием удвоения

$$\mu B(x,2t) \le c\mu B(x,t), \;\; x \in X, \; t > 0, \tag{1}$$

(c не зависит от x и t). Тройка (X, d, μ) обычно называется пространством однородного типа [1].

В этом случае существуют постоянные $c \ge 1$ и $\gamma > 0$, такие что для всех $x \in X$, $s \ge 1$ и $t > 0$

$$\mu B(x,st) \le cs^\gamma \mu B(x,t). \tag{2}$$

(можно взять $\gamma = \log_2 c$, где c — постоянная из неравенства (1)). Параметр γ важен для дальнейшего — он выполняет роль размерности.

Keywords: *maximal functions, local smoothness*
2000 Mathematics Subject Classification: 46E30, 46E35

Всюду мы обозначаем через cразличные положительные постоянные, зависящие, возможно, от некоторых параметров, но эта зависимость для нас несущественна. Для простоты будем считать, что $\mu X = 1$ и $\operatorname{diam} X = 1$ (это не ограничивает общности).

Пусть Ω — класс всех возрастающих на $(0,\infty)$ функций η, таких, что $\eta(t)/t$ убывает и $\eta(+0) = 0$. Для $\eta \in \Omega$ и $q \geq 1$ введем максимальные функции

$$\mathcal{N}_{\eta,q} f(x) = \sup \frac{1}{\eta(t)} \left(\frac{1}{\mu B(y,t)} \int\limits_{B(y,t)} |f - f(x)|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \tag{3}$$

где $q \geq 1$ и точная верхняя грань берется по всем шарам $B(y,t)$, содержащим точку $x \in X$.

Впервые подобные максимальные функции на $\mathbb{R}^n$ при $\eta(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, появились в работе А.Кальдерона [2] в связи с оценками сингулярных интегралов. Они использовались затем в [3] для доказательства теорем вложения для некоторой шкалы пространств функций, определяемых в терминах $\mathcal{N}_{\eta,q} f$ и содержащей пространства Соболева. На самом деле в этих работах рассматривались произвольные степенные гладкости $\eta(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, но их трудно приспособить для определения на пространствах однородного типа и мы не касаемся этих обобщений (отметим, что систематическое изложение теории таких мажорант и соответствующих классов функций на евклидовых пространствах имеется в книге [4]).

В случае единичного куба в $\mathbb{R}^n$ для произвольной функции $\eta \in \Omega$ максимальные операторы (3) при $q = 1$ были введены В.И.Колядой [5]. В этой работе доказана теорема вложения соболевского типа, обобщающая результат Кальдерона-Скотта для гладкостей первого порядка. Кроме того, в [5] получены оценки $\mathcal{N}_{\eta,1} f$ в терминах L^p-модулей непрерывности для f, а также условия для принадлежности $\mathcal{N}_{\eta,1} f$ классам $\varphi(L)$.

Основной задачей, которую выполняют максимальные функции $\mathcal{N}_{\eta,q}$, является измерение локальной гладкости суммируемых функций. Это показывает почти очевидное неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq (\mathcal{N}_{\eta,q} f(x) + \mathcal{N}_{\eta,q} f(y)) \, \eta(d(x,y)), \quad x, y \in X.$$

Широкий набор параметров $\eta \in \Omega$ позволяет дать более гибкую классификацию локальных свойств функций по сравнению со случаем степенных функций $\eta(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$.

Для нас максимальные функции $\mathcal{N}_{\eta,q}$ представляют интерес именно в связи с возможностью дать классификацию L^q-функций на пространствах однородного типа, так как в этой общей ситуации трудно определить даже L^q-модули непрерывности.

Основной результат нашей работы состоит в обобщении упомянутой теоремы вложения В.И.Коляды на пространства однородного типа. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть $f : X \mapsto \mathbb{R}$ — измеримая функция. Функция

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : m_f(s) < t\}, \quad 0 < t < \infty$$

называется *невозрастающей перестановкой* функции f. Здесь $m_f(\lambda) = \mu\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}$ — функция распределения для $|f|$.

Пусть $0 < p, \theta < \infty$. Говорят, что f принадлежит *пространству Лоренца* $L^{\theta,p}(X)$, если

$$\|f\|_{\theta,p} = \left(\int\limits_0^{\mu X} (t^{\frac{1}{\theta}} f^*(t))^p \, \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Теперь мы готовы к формулировке основного результата работы.

Т е о р е м а 1. *Пусть $q \geq 1$, $1 \leq p < \theta < \infty$, $\eta, \sigma \in \Omega$ удовлетворяют условию*

$$\eta(t) \leq \sigma(t) t^{\gamma(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})} \qquad t \in (0,1]. \tag{4}$$

Тогда для любой функции $f \in L^q(X)$, такой что $\mathcal{N}_{\eta,q} f \in L^p(X)$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{N}_{\sigma,q} f\|_{\theta,p} \le c\, \|\mathcal{N}_{\eta,q} f\|_p \tag{5}$$

($c > 0$ не зависит от f).

В.И.Коляда [5] доказал такое неравенство, рассматривая случай $X = [0,1]^n$, $n \ge 1$, $d(x,y) = |x-y|$, μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ (тогда $\gamma = n$), $q = 1$. При доказательстве теоремы 1 мы следуем схеме рассуждения этой работы с изменениями и дополнениями, связанными с рассмотрением более общей ситуации.

Приведем схему доказательства. Обозначим $\Phi(x) = \mathcal{N}_{\sigma,q} f(x)$, $F(x) = \mathcal{N}_{\eta,q} f(x)$, $x \in X$ и $\psi = \gamma(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})$. Оценим левую часть неравенства (5) следующим образом:

$$\|\Phi\|^p_{\theta,p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int\limits_{2^{-(\nu+1)\gamma}}^{2^{-\nu\gamma}} \left(t^{\frac{1}{\theta}}\ \Phi^*(t)\right)^p \frac{dt}{t} \le \sum_{\nu=0}^{\infty} (\Phi^*(2^{-\nu\gamma}))^p\, 2^{-\nu\gamma\frac{p}{\theta}}. \tag{6}$$

Обозначим через T_k — класс всех шаров $B(y,t)$, где $2^{-k-1} < t \le 2^{-k}$ и

$$\Phi_k(x) = \sup \frac{1}{\sigma(t)} \left(\frac{1}{\mu B(y,t)} \int\limits_{B(y,t)} |f - f(x)|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам, содержащим точку $x \in X$ и входящих в T_k.

В силу (4)

$$\Phi(x) \le F(x) < \infty \ \text{ почти всюду.} \tag{7}$$

Для оценки правой части (6) построим семейства множеств $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{G_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$.

Положим $E_k = \{x \in X : k = \min\{j : \Phi(x) \le 2\Phi_j(x)\}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. По построению, E_k — измеримы, $E_k \cap E_j = \varnothing$ $(k \ne j)$, и в силу (7)

$$\mu\left(X \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k\right)\right) = 0.$$

Другая последовательность множеств $\{G_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ определяется так

$$G_\nu = \{x \in X : \Phi^*(2^{-(\nu+1)\gamma}) > \Phi(x) \ge \Phi^*(2^{-\nu\gamma})\}, \ \ \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

тогда $\mu G_\nu = 2^{-\nu\gamma}(1 - 2^{-\gamma})$, $\mu\left(\bigcup\limits_{\nu=0}^{\infty} G_\nu\right) = 1 = \mu X$.

Зафиксируем ν и рассмотрим два возможных варианта:

1) Предположим, что

$$\mu\left(G_\nu \bigcap \left(\bigcup_{k=\nu}^{\infty} E_k\right)\right) \ge \frac{1}{2}\,\mu G_\nu.$$

Тогда для таких ν, используя (4) и условие удвоения (1) получим:

$$(\Phi^*(2^{-\nu\gamma}))^p \le c\, 2^{\nu\gamma} \sum_{k=\nu}^{\infty} \int\limits_{E_k} \Phi_k^p \, d\mu \le c\, 2^{\nu\gamma} \sum_{k=\nu}^{\infty} 2^{-k\psi p} \int\limits_{E_k} F^p \, d\mu. \tag{8}$$

2) Предположим, что

$$\mu\left(G_\nu \bigcap \left(\bigcup_{k=0}^{\nu-1} E_k\right)\right) \ge \frac{1}{2}\,\mu G_\nu.$$

Тогда, используя свойства невозрастающей перестановки (см., например, [6]), условие удвоения (2) и связь (4) между функциями σ и η, получим

$$\Phi^*(2^{-\nu\gamma}) \le c \left(\sum_{i=0}^{\nu} 2^{-i\psi} F^*(2^{-i\gamma}) + 2^{\frac{\nu\gamma}{\theta}} \left(\int\limits_{G_\nu} F^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right). \tag{9}$$

Разобьем сумму в правой части неравенства (6) на две, в первую из которых входят те ν, для которых выполнено предположение 1) (обозначим множество таких ν через Δ_1), во вторую — те, для которых выполнено предположение 2) (обозначим множество таких ν через Δ_2).

Тогда первую из этих сумм в силу (8) мы можем оценить так:

$$\sum_{\nu\in\Delta_1} (\Phi^*(2^{-\nu\gamma}))^p \, 2^{-\nu\gamma\frac{p}{\theta}} \le c \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{k} 2^{\nu\gamma(1-\frac{p}{\theta})} \, 2^{-k\psi p} \int\limits_{E_k} F^p \, d\mu =$$

$$= c \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{k} 2^{(\nu-k)\gamma(1-\frac{p}{\theta})} \int\limits_{E_k} F^p \, d\mu \le c \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{E_k} F^p \, d\mu = c \, \|F\|_p^p . \tag{10}$$

Для оценки второй суммы воспользуемся неравенством

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu^p \, 2^{-\nu\gamma\frac{p}{\theta}} \le c \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu)^p \, 2^{-\nu\gamma\frac{p}{\theta}},$$

где $\lambda_\nu = \sum\limits_{i=0}^{\nu} 2^{-i\psi} \, F^*(2^{-i\gamma})$ (см., например, [7]) и полученным соотношением (9). Тогда

$$\sum_{\nu\in\Delta_2} (\Phi^*(2^{-\nu\gamma}))^p \, 2^{-\nu\gamma\frac{p}{\theta}} \le c \sum_{\nu\in\Delta_2} \left(\left(\sum_{i=0}^{\nu} 2^{-i\psi} F^*(2^{-i\gamma}) \right)^p + 2^{\nu\gamma\frac{p}{\theta}} \int\limits_{G_\nu} F^p \, d\mu \right) 2^{-\nu\gamma\frac{p}{\theta}} \le$$

$$\le c \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu\gamma} (F^*(2^{-(\nu+1)\gamma}))^p + \sum_{\nu=0}^{\infty} \int\limits_{G_\nu} F^p \, d\mu \right) \le c \left(\int\limits_0^1 (F^*(t))^p dt + \int\limits_X F^p \, d\mu \right) = c \, \|F\|_p^p . \tag{11}$$

Утверждение (5) непосредственно следует из (6), (10) и (11).

Литература

1. **Coifman R.R., Weiss G.** Extensions of Hardy spaces and their use in analysis // Bull.Amer.Math. Soc. 1977. V. 44, №4. P. 569–645.

2. **Calderon A.P.** Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions // Studia Math. 1972. V. 44. P. 167–186.

3. **Calderon A.P., Scott R.** Sobolev type inequalities for $p > 0$ // Studia Math. 1978. V. 62. P. 75–92.

4. **De Vore R., Sharpley R.** Maximal functions measuring local smoothness // Mem. Amer. Math. Soc., 1984. V. 47.

5. **Kolyada V.I.** Estimates of maximal functions measuring local smoothness // Analisys Math. 1999. V. 25. P. 277–300.

6. **Bennett C., Sharpley R.** Interpolation of operators. Academic Press. New York. 1988.

7. **Коляда В.И.** О вложении классов $\varphi(L)$ // Известия АН СССР, сер. мат. 1975. V. 39. P. 418–437.

Белорусский государственный университет, г. Минск