УДК 517.589, 517.444

А.А. Ворошилов

Дробное дифференцирование типа Эрдейи-Кобера *H*-функции Фокса

Исследуются операторы дробного дифференцирования типа Эрдейи–Кобера, являющиеся одним из обобщений понятия производной на нецелые порядки дифференцирования. Цель работы – получить формулы правосторонних и левосторонних производных произвольного положительного порядка типа Эрдейи–Кобера от H-функции Фокса, являющейся обобщением многих элементарных и специальных функций. Искомые формулы получены в явном виде, а также найдены условия их применимости. Результаты работы могут быть использованы в теоретических исследованиях дифференциальных уравнений дробного порядка, а также при чтении специальных курсов по дробному исчислению.

Ключевые слова: дробное исчисление, производная и интеграл Римана–Лиувилля, операторы типа Эрдейи–Кобера, интеграл Меллина–Барнса, специальные функции, H-функция Фокса, гипергеометрическая функция.

Область математического анализа, называемая дробным исчислением (т.е. исчислением интегралов и производных произвольного действительного или комплексного порядка), получает все более широкое развитие в последнее время. Это связано, в первую очередь, с их обширными приложениями в физике и других прикладных науках. Так, дробное дифференциальное и интегральное исчисление в теории фракталов и систем с памятью приобретает такое же важное значение, как и классический анализ в физике сплошных сред.

Классическим обобщением операторов интегрирования и дифференцирования на нецелые порядки являются операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана–Лиувилля. Имеется также целый ряд операторов, одни из которых являются модификациями интегралов и производных Римана–Лиувилля, а другие основаны на совершенно иных подходах. В настоящей работе исследуется одна из таких модификаций – операторы типа Эрдейи–Кобера.

Пусть $Re\alpha > 0$, $\sigma > 0$и $\eta \in$ C. Операторы дробного левостороннего и правостороннего интегрирования типа Эрдейи–Кобера $I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}$ и $I^{\alpha}_{-;\sigma,\eta}$ определяются соответственно формулами [1, с.105], [2, с.246]:

$$\left(I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}f\right)(x) := \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^{\sigma\eta+\sigma-1} f(t)\,dt}{(x^{\sigma}-t^{\sigma})^{1-\alpha}} \quad (x > 0)\,, \qquad (1)$$

$$\left(I^{\alpha}_{-;\sigma,\eta}f\right)(x) := \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{+\infty}\frac{t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1}f(t)\,dt}{(t^{\sigma}-x^{\sigma})^{1-\alpha}} \quad (x>0)\ , \tag{2}$$

где Γ – гамма-функция Эйлера [3, с.515]. Основные свойства этих операторов можно найти в книгах [1, с. 105–110], [2, с.245–248]. В частности, операторы (1), (2) определены и ограничены в $Lp(0,+\infty)$, $1 \le p < +\infty$ при условиях $Re\eta > -1 + \frac{1}{p\sigma}$ и $Re\eta > -\frac{1}{p\sigma}$ соответственно.

Операторы дробного левостороннего и правостороннего дифференцирования типа Эрдейи–Кобера $D^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}$ и $D^{\alpha}_{-;\sigma,\eta}$ определяются через операторы дробного интегрирования формулами [1, с.108]:

$$\left(D^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}f\right)(x) := x^{-\sigma\eta}\left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^{n} x^{\sigma(n+\eta)}\left(I^{n-\alpha}_{0+;\sigma,\eta+\alpha}f\right)(x) \quad (x>0)\,, \tag{3}$$

$$\left(D^{\alpha}_{-;\sigma,\eta}f\right)(x) := x^{\sigma(n+\alpha)}\left(-\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^{n} x^{\sigma(n-\eta-\alpha)}\left(I^{n-\alpha}_{-;\sigma,\eta+\alpha-n}f\right)(x) \quad (x>0)\,, \tag{4}$$

где $n = [Re\alpha] + 1$. Операторы (3), (4) являются левыми обратными для операторов (1), (2).

В дробном исчислении важную роль играет так называемая H-функция Фокса, возникающая, в частности, при решении дифференциальных уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля (см. [3], [4]). Это функция общего вида, частными случаями которой являются многие элементарные и специальные функции – степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические, гипергеометрические и многие другие [4, с.93].

Найдем условия существования и получим явные формулы дробных производных типа Эрдейи–Кобера от H-функции. Для этого предварительно выведем формулы дробного интегрирования и дифференцирования типа Эрдейи-Кобера степенной функции.

Лемма 1. **(a)** *Если* $Re\alpha > 0$ и $Re\left(\eta + \frac{\beta}{\sigma}\right) > -1$, *то существует дробный интеграл типа Эрдейи–Кобера* $I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}$ *от степенной функции* $f(t) = t^{\beta}$ *и справедлива формула*

$$\left(I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}t^{\beta}\right)(x) = \frac{\Gamma\left(\eta+\frac{\beta}{\sigma}+1\right)}{\Gamma\left(\eta+\frac{\beta}{\sigma}+\alpha+1\right)}x^{\beta} \quad (x>0)\ . \tag{5}$$

(b) *Если* $Re\alpha > 0$ *и* $Re\left(\eta - \frac{\gamma}{\sigma}\right) > 0$, *то существует дробный интеграл типа Эрдейи–Кобера* $I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}$ *от степенной функции* $f(t) = t^{\gamma}$ *и справедлива формула*

$$\left(I^{\alpha}_{-;\sigma,\eta}t^{\gamma}\right)(x)=\frac{\Gamma\left(\eta-\frac{\gamma}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\eta-\frac{\gamma}{\sigma}+\alpha\right)}x^{\gamma}\quad (x>0)\ . \tag{6}$$

Доказательство.

(a) Согласно определению (1),

$$\left(I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}t^{\beta}\right)(x)=\frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{t^{\sigma\eta+\sigma-1+\beta}}{(x^{\sigma}-t^{\sigma})^{\,1-\alpha}}dt.$$

Выполним замену переменной: $t=x\tau^{1/\sigma}$. Учитывая, что $dt=\frac{1}{\sigma}x\tau^{\frac{1}{\sigma}-1}d\tau$, получим:

$$\left(I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}t^{\beta}\right)(x)=\frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\sigma\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{x^{\sigma\eta+\sigma+\beta}\tau^{\frac{1}{\sigma}(\sigma\eta+\sigma-1+\beta)+\frac{1}{\sigma}-1}}{(x^{\sigma}-x^{\sigma}\tau)^{\,1-\alpha}}d\tau=$$

$$=\frac{x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{x^{\sigma\eta+\sigma\alpha+\beta}\tau^{\eta+\frac{\beta}{\sigma}}}{(1-\tau)^{\,1-\alpha}}d\tau=\frac{x^{\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\,\alpha-1}\tau^{\eta+\frac{\beta}{\sigma}}d\tau.$$

Интеграл в последнем выражении сходится при условиях $Re\alpha>0$, $Re\left(\eta+\frac{\beta}{\sigma}\right)>-1$ и равен $\mathrm{B}\left(\eta+\frac{\beta}{\sigma}+1;\alpha\right)$, где B – бета-функция Эйлера [5, с.515]. Используя формулу связи бета-функции и гамма-функции $\mathrm{B}(\xi,\zeta)=\frac{\Gamma(\xi)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(\xi+\zeta)}$, окончательно получим

$$\left(I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}t^{\beta}\right)(x)=\frac{x^{\beta}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{B}\left(\eta+\frac{\beta}{\sigma}+1;\alpha\right)=\frac{x^{\beta}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma\left(\eta+\frac{\beta}{\sigma}+1\right)\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\eta+\frac{\beta}{\sigma}+\alpha+1\right)}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\eta+\frac{\beta}{\sigma}+1\right)}{\Gamma\left(\eta+\frac{\beta}{\sigma}+\alpha+1\right)}x^{\beta}.$$

(b) По определению (2),

$$\left(I^{\alpha}_{-;\sigma,\eta}t^{\gamma}\right)(x)=\frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{+\infty}\frac{t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1+\gamma}}{(t^{\sigma}-x^{\sigma})^{\,1-\alpha}}dt.$$

Осуществим замену переменной $t=x\tau^{-1/\sigma}$, $dt=-\frac{1}{\sigma}x\tau^{-\frac{1}{\sigma}-1}d\tau$, получим:

$$\left(I^{\alpha}_{-;\sigma,\eta}t^{\gamma}\right)(x)=-\frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\sigma\Gamma(\alpha)}\int_1^0\frac{x^{\sigma-\sigma\alpha-\sigma\eta+\gamma}\tau^{-\frac{1}{\sigma}(\sigma-\sigma\alpha-\sigma\eta-1+\gamma)-\frac{1}{\sigma}-1}}{\left((x\tau^{-1/\sigma})^{\sigma}-x^{\sigma}\right)^{\,1-\alpha}}d\tau=$$

$$= \frac{x^{\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\eta-\frac{\gamma}{\sigma}-1} d\tau = \frac{x^{\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{B}\left(\eta - \frac{\gamma}{\alpha}; \alpha\right)$$

при $Re\alpha > 0$ и $Re\left(\eta - \frac{\gamma}{\sigma}\right) > 0$. Следовательно,

$$\left(I^{\alpha}_{-;\sigma,\eta} t^{\gamma}\right)(x) = \frac{x^{\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{B}\left(\eta - \frac{\gamma}{\alpha}; \alpha\right) =$$

$$= \frac{x^{\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma\left(\eta - \frac{\gamma}{\alpha}\right)\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\eta - \frac{\gamma}{\alpha} + \alpha\right)} = \frac{\Gamma\left(\eta - \frac{\gamma}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\eta - \frac{\gamma}{\alpha} + \alpha\right)} x^{\gamma}.$$

Лемма 2. **(a)** *Если* $Re\alpha > 0$ и $Re\left(\eta + \frac{\beta}{\sigma} + \alpha\right) > -1$, *то существует дробная производная типа Эрдейи–Кобера* $D^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}$ *от степенной функции* $f(t) = t^{\beta}$ *и справедлива формула*

$$\left(D^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta} t^{\beta}\right)(x) = \frac{\Gamma\left(\eta + \frac{\beta}{\sigma} + \alpha + 1\right)}{\Gamma\left(\eta + \frac{\beta}{\sigma} + 1\right)} x^{\beta} \quad (x > 0)\ . \tag{7}$$

(b) *Если* $Re\alpha > 0$ *и* $Re\left(\eta - \frac{\gamma}{\sigma}\right) > 1 - \{Re\alpha\}$, *где* $\{\}$ *означает дробную часть числа, то существует дробная производная типа Эрдейи–Кобера* $D^{\alpha}_{-;\sigma,\eta}$ *от степенной функции* $f(t) = t^{\gamma}$ *и справедлива формула*

$$\left(D^{\alpha}_{-;\sigma,\eta} t^{\gamma}\right)(x) = \frac{\Gamma\left(\eta - \frac{\gamma}{\sigma} + \alpha\right)}{\Gamma\left(\eta - \frac{\gamma}{\sigma}\right)} x^{\gamma} \quad (x > 0)\ . \tag{8}$$

Доказательство.

(a) В соответствии с определением (3),

$$\left(D^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta} t^{\beta}\right)(x) = x^{-\sigma\eta} \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx}\right)^n x^{\sigma(n+\eta)} \left(I^{n-\alpha}_{0+;\sigma,\eta+\alpha} t^{\beta}\right)(x). \tag{9}$$

При выполнении условий леммы дробный интеграл типа Эрдейи–Кобера в правой части формулы (9) существует, и справедлива формула (5), вследствие которой

$$\left(D^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta} t^{\beta}\right)(x) = x^{-\sigma\eta} \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx}\right)^n x^{\sigma(n+\eta)} \frac{\Gamma\left(\eta + \alpha + \frac{\beta}{\sigma} + 1\right)}{\Gamma\left(\eta + \frac{\beta}{\sigma} + n + 1\right)} x^{\beta} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\eta + \alpha + \frac{\beta}{\sigma} + 1\right)}{\Gamma\left(\eta + \frac{\beta}{\sigma} + n + 1\right)} x^{-\sigma\eta} \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx}\right)^n x^{\sigma \mathrm{n} + \sigma\eta + \beta} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\eta+\alpha+\frac{\beta}{\sigma}+1\right)}{\Gamma\left(\eta+\frac{\beta}{\sigma}+n+1\right)} x^{-\sigma\eta} \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} \frac{dx^{\sigma n+\sigma\eta+\beta}}{dx}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\eta+\alpha+\frac{\beta}{\sigma}+1\right)\left(n+\eta+\frac{\beta}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\eta+\frac{\beta}{\sigma}+n+1\right)} x^{-\sigma\eta} \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} \frac{dx^{\sigma(n-1)+\sigma\eta+\beta}}{dx}\right) = ... =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\eta+\alpha+\frac{\beta}{\sigma}+1\right)\left(n+\eta+\frac{\beta}{\sigma}\right)\left(n-1+\eta+\frac{\beta}{\sigma}\right)...\left(1+\eta+\frac{\beta}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\eta+\frac{\beta}{\sigma}+n+1\right)} x^{\beta} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\eta+\alpha+\frac{\beta}{\sigma}+1\right)}{\Gamma\left(\eta+\frac{\beta}{\sigma}+1\right)} x^{\beta},$$

что доказывает (a).

(b) Согласно определению (4),

$$\left(D^{\alpha}_{-;\sigma,\eta} t^{\gamma}\right)(x) := x^{\sigma(n+\alpha)} \left(-\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^{n} x^{\sigma(n-\eta-\alpha)} \left(I^{n-\alpha}_{-;\sigma,\eta+\alpha-n} t^{\gamma}\right)(x) \ ,$$

где интеграл типа Эрдейи–Кобера в правой части существует в силу леммы 1(b), и выполняется соотношение (6), из которого получаем:

$$\left(D^{\alpha}_{-;\sigma,\eta} t^{\gamma}\right)(x) := x^{\sigma(n+\alpha)} \left(-\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^{n} x^{\sigma(n-\eta-\alpha)} \frac{\Gamma\left(\eta+\alpha-n-\frac{\gamma}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\eta-\frac{\gamma}{\sigma}\right)} x^{\gamma} \ =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\eta+\alpha-n-\frac{\gamma}{\sigma}\right)\left(\eta+\alpha-n-\frac{\gamma}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\eta-\frac{\gamma}{\sigma}\right)} x^{\sigma(n+\alpha)} \left(-\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^{n-1} x^{\sigma(n-1-\eta-\alpha)+\gamma} = ... =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\eta+\alpha-n-\frac{\gamma}{\sigma}\right)\left(\eta+\alpha-n-\frac{\gamma}{\sigma}\right)\left(\eta+\alpha-n+1-\frac{\gamma}{\sigma}\right)...\left(\eta+\alpha-\frac{\gamma}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\eta-\frac{\gamma}{\sigma}\right)} x^{\gamma} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\eta+\alpha-\frac{\gamma}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\eta-\frac{\gamma}{\sigma}\right)} x^{\gamma},$$

что доказывает (b).

Рассмотрим теперь действие операторов дробного дифференцирования типа Эрдейи–Кобера на H-функцию.

Для целых m, n, p, q таких, что $0 \le m \le q$, $0 \le n \le p$, комплексных ai, bj и $\alpha_i, \beta_j \in \mathrm{R}_+ = (0, +\infty)$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q)$ H-функция Фокса $H_{p,q}^{m,n}(z)$ определяется интегралом Меллина–Барнса [6, с.30]

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = H_{p,q}^{m,n}\left[z \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] := \frac{1}{2\pi i} \int_L \tilde{H}_{p,q}^{m,n}(s)\, z^{-s} ds, \tag{10}$$

где

$$\tilde{H}_{p,q}^{m,n}(s) = \tilde{H}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \left| s \right. \right] := \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod_{i=1}^{n} \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^{p} \Gamma(a_i + \alpha_i s) \prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)}, \tag{11}$$

причем никакие полюсы b_{jl} $(j = 1, \ldots, m;\ l = 0, 1, 2, \ldots)$ гамма-функций $\Gamma(b_j + \beta_j s)$ в числителе формулы (11) не совпадают ни с какими полюсами a_{ik} $(i = 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots)$ гамма-функций $\Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)$. Интегрирование в формуле (10) ведется вдоль бесконечного контура L, который оставляет все полюсы b_{jl} слева, а все полюсы a_{ik} справа и имеет одну из трех специальных форм. Мы будем использовать контур вида $L = L_{i\gamma\infty}$, начинающийся в точке $\gamma - i\infty$ и заканчивающийся в $\gamma + i\infty$, где $\gamma \in \mathrm{R}$.В этом случае, по теореме 1.1. [6, с.33], H-функция (10) определена для всех действительных ненулевых z при условии

$$a^* > 0, \tag{12}$$

где

$$a^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=n+1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j - \sum_{j=m+1}^{q} \beta_j, \tag{13}$$

а также при

$$a^* = 0, \Delta\gamma + Re\mu < -1, \tag{14}$$

где

$$\Delta = \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i; \quad \mu = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{i=1}^{p} a_i + \frac{p-q}{2} \tag{15}$$

[6, с.31].

Теорема. *Пусть* $Re\alpha > 0$, $\omega \in \mathrm{C}$ и $\nu > 0$. *Пусть также* $a^* \ge 0$, *а в случае* $a^* = \Delta = 0$ *выполняется условие* $Re(\mu + \alpha) < -1$. *Тогда справедливы утверждения*:

(a) *Если*

$$\nu \min_{1\le j\le m}\left\{\frac{Reb_j}{\beta_j}\right\}+Re\left(\omega+\sigma\left(\eta+\alpha\right)\right)>-\sigma \tag{16}$$

при $a^*>0$ *или* $a^*=0{,}\Delta\ge 0$; *либо*

$$\nu \min_{1\le j\le m}\left\{\frac{Reb_j}{\beta_j},\frac{Re\mu+1/2}{\Delta}\right\}+Re\left(\omega+\sigma\left(\eta+\alpha\right)\right)>-\sigma \tag{17}$$

при $a^*=0{,}\Delta<0$, *то дробная производная* $D^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}$ *типа Эрдейи-Кобера от* H*-функции существует, и справедлива формула*

$$\left(D^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}t^{\omega}H^{m,n}_{p,q}\left[t^{\nu}\left|\begin{array}{c}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{array}\right.\right]\right)(x)=$$
$$=x^{\omega}H^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left[x^{\nu}\left|\begin{array}{cc}\left(-\alpha-\eta-\frac{\omega}{\sigma},\frac{\nu}{\sigma}\right)&(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}&\left(-\eta-\frac{\omega}{\sigma},\frac{\nu}{\sigma}\right)\end{array}\right.\right]. \tag{18}$$

(b) *Если*

$$\nu \max_{1\le i\le n}\left\{\frac{Rea_i-1}{\alpha_i}\right\}+Re\left(\omega-\sigma\eta\right)<\sigma\left(\{Re\alpha\}-1\right) \tag{19}$$

при $a^*>0$ *или* $a^*=0{,}\Delta\le 0$; *либо*

$$\nu \max_{1\le i\le n}\left\{\frac{Rea_i-1}{\alpha_i},\frac{Re\mu+1/2}{\Delta}\right\}+Re\left(\omega-\sigma\eta\right)<\sigma\left(\{Re\alpha\}-1\right) \tag{20}$$

при $a^*=0{,}\Delta>0$,*где* $\{\}$ *означает дробную часть числа, то дробная производная* $D^{\alpha}_{-;\sigma,\eta}$ *типа Эрдейи-Кобера от* H*-функции существует и справедлива формула*

$$\left(D^{\alpha}_{-;\sigma,\eta}t^{\omega}H^{m,n}_{p,q}\left[t^{\nu}\left|\begin{array}{c}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{array}\right.\right]\right)(x)=$$
$$=x^{\omega}H^{m+1,n}_{p+1,q+1}\left[x^{\nu}\left|\begin{array}{cc}(a_i,\alpha_i)_{1,p}&\left(\eta-\frac{\omega}{\sigma},\frac{\nu}{\sigma}\right)\\\left(\alpha+\eta-\frac{\omega}{\sigma},\frac{\nu}{\sigma}\right)&(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{array}\right.\right]. \tag{21}$$

Доказательство.

Обозначим через a_1^*, Δ_1, μ_1 и a_2^*, Δ_2, μ_2параметры (13), (15) для H-функций в правых частях равенств (18) и (21) соответственно. Непосредственно проверяется, что

$$a_1^*=a_2^*=a^*,\ \ \Delta_1=\Delta_2=\Delta,\ \ \mu_1=\mu_2=\mu+\alpha. \tag{22}$$

Докажем утверждение (а). Для H-функций в правой и левой частях равенства (18) выберем контур $L = L_{i\gamma\infty}$, где $\gamma < -\frac{Re(\mu+\alpha)+1}{\Delta}$ при $a^* = 0,\Delta > 0$; $\gamma > -\frac{Re(\mu+\alpha)+1}{\Delta}$ при $a^* = 0,\Delta < 0$ и значение γ произвольное при $a^* = \Delta = 0$ или $a^* > 0$. Тогда $\Delta\gamma + Re\,(\mu+\alpha) < -1$ при $a^* = 0,\Delta \neq 0$ и, по условиям теоремы, $\Delta\gamma + Re\,(\mu+\alpha) = Re\,(\mu+\alpha) < -1$ при $a^* = 0,\Delta = 0$. Следовательно, $\Delta\gamma + Re\mu < \Delta\gamma + Re\,(\mu+\alpha) < -1$. В соответствии с условиями существования (12), (14), во всех случаях H-функция в левой части формулы (18) определена. H-функция в правой части (18) также существет, поскольку из формул (22) следует $a_1^* > 0$ при $a^* > 0$ и $\Delta\gamma + Re\mu_1 = Re(\mu+\alpha) < -1$ при $a_1^* = \Delta_1 = 0$.

По следствиям 1.11.1, 1.12.1 и 1.13.1 [4, с. 50-53], функция $H_{p,q}^{m,n}(x)$ имеет асимптотическое поведение возле нуля вида

$$H_{p,q}^{m,n}(x) = O\left(x^{\rho*}(\ln x)^{N*-1}\right)\ , \quad x \to 0,$$

где – наивысший порядок полюсов функции $\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s)$, а $\rho^* = \min\limits_{1\le j\le m}\left\{\frac{Reb_j}{\beta_j}\right\}$ при $\Delta \ge 0$ или $\Delta < 0$, $a^* > 0$ и $\rho^* = \min\limits_{1\le j\le m}\left\{\frac{Reb_j}{\beta_j}, \frac{Re\mu+1/2}{\Delta}\right\}$ при $\Delta < 0,a^* = 0$. Следовательно,

$$t^{\omega}H_{p,q}^{m,n}\left[t^{\nu}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right] = O\left(t^{\nu\rho*+\omega}(\ln t^{\nu})^{N*-1}\right)\ , \quad t\to 0. \tag{23}$$

В соответствии с неравенствами (16) и (17), справедлива оценка $\nu\rho^* + Re\,(\omega+\sigma\,(\eta+\alpha)) > -\sigma$ или, равносильно, $Re\left(\eta + \frac{\nu\rho^*+\omega}{\sigma} + \alpha\right) > -1$. Тогда, по лемме 2 (а), дробная производная типа Эрдейи–Кобера в левой части (18) существует.

Докажем формулу (18). Изменим порядок интегрирования и используем формулу (7) леммы 2 (а), условия которой выполняются при любом $s \in L_{i\gamma\infty}$, что проверяется непосредственно. Получим:

$$\left(D_{0+;\sigma,\eta}^{\alpha}t^{\omega}H_{p,q}^{m,n}\left[t^{\nu}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]\right)(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{i\gamma\infty}}\tilde{H}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\,\middle|\,s\right]\left(D_{0+;\sigma,\eta}^{\alpha}t^{\omega-\nu s}\right)(x)\,ds\ =$$

$$= \frac{x^{\omega}}{2\pi i}\int_{L_{i\gamma\infty}}\tilde{H}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\,\middle|\,s\right]\frac{\Gamma\left(\eta+\frac{\omega-\nu s}{\sigma}+\alpha+1\right)}{\Gamma\left(\eta+\frac{\omega-\nu s}{\sigma}+1\right)}x^{-\nu s}ds\ =$$

$$= \frac{x^{\omega}}{2\pi i}\int_{L_{i\gamma\infty}}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+\alpha_i s)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-\beta_j s)}\frac{\Gamma\left(1-\left(-\alpha-\eta-\frac{\omega}{\sigma}\right)-\frac{\nu}{\sigma}s\right)}{\Gamma\left(1-\left(-\eta-\frac{\omega}{\sigma}\right)-\frac{\nu}{\sigma}s\right)}x^{-\nu s}ds\ =$$

$$\left[a_0 = -\alpha - \eta - \frac{\omega}{\sigma},\;\; \alpha_0 = \frac{\nu}{\sigma},\;\; b_{q+1} = -\eta - \frac{\omega}{\sigma},\;\; \beta_{q+1} = \frac{\nu}{\sigma}\right]$$

$$= \frac{x^\omega}{2\pi i}\int_{L_{i\gamma\infty}} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j+\beta_j s)\cdot\Gamma(1-a_0-\alpha_0 s)\prod_{i=1}^n \Gamma(1-a_i-\alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i+\alpha_i s)\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j-\beta_j s)\cdot\Gamma(1-b_{q+1}-\beta_{q+1}s)} x^{-\nu s}ds \;=$$

$$= \frac{x^\omega}{2\pi i}\int_{L_{i\gamma\infty}} \tilde{H}^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left[\begin{array}{cc} \left(-\alpha-\eta-\frac{\omega}{\sigma},\frac{\nu}{\sigma}\right) & (a_i,\alpha_i)_{1,p} \\ (b_j,\beta_j)_{1,q} & \left(-\eta-\frac{\omega}{\sigma},\frac{\nu}{\sigma}\right)\end{array}\middle| s\right] x^{-\nu s}ds \;=$$

$$= x^\omega H^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left[x^\nu \middle| \begin{array}{cc} \left(-\alpha-\eta-\frac{\omega}{\sigma},\frac{\nu}{\sigma}\right) & (a_i,\alpha_i)_{1,p} \\ (b_j,\beta_j)_{1,q} & \left(-\eta-\frac{\omega}{\sigma},\frac{\nu}{\sigma}\right)\end{array}\right],$$

что и требовалось доказать.

Утверждение (b) доказывается аналогично. Действительно, H-функции в левой и правой части (21) определены при выборе контура $L = L_{i\gamma\infty}$такого же, как в случае (a). Функция $t^\omega H^{m,n}_{p,q}\left[t^\nu \middle| \begin{array}{c}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\ (b_j,\beta_j)_{1,q}\end{array}\right]$ по следствиям 1.7.1, 1.8.1 и 1.9.1 [6, с. 40-45] имеет асимптотическое поведение возле бесконечности вида

$$t^\omega H^{m,n}_{p,q}\left[t^\nu \middle| \begin{array}{c}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\ (b_j,\beta_j)_{1,q}\end{array}\right] = O\left(t^{\nu\rho+\omega}\left(\ln t^\nu\right)^{N-1}\right)\;,\quad t\to+\infty,$$

где N – наивысший порядок полюсов функции $\prod_{j=1}^m \Gamma(1-a_i-\alpha_i s)$,а $\rho = \max\limits_{1\le i\le n}\left\{\frac{Rea_i-1}{\alpha_i}\right\}$ при $\Delta\le 0$ или $\Delta>0,\; a^*>0$ и $\rho = \max\limits_{1\le i\le n}\left\{\frac{Rea_i-1}{\alpha_i},\frac{Re\mu+1/2}{\Delta}\right\}$ при $\Delta>0,\; a^*=0$. следовательно, в силу неравенств (19), (20) и леммы 2 (b), дробная производная типа Эрдейи–Кобера в левой части (21) существует. Формула (21) доказывается аналогично формуле (18) с помощью формулы дробного дифференцирования типа Эрдейи–Кобера степенной функции (8).

Доказанная теорема позволяет находить формулы дробных производных типа Эрдейи–Кобера для целого ряда элементарных и специальных функций.

Пример 1. Рассмотрим экспоненциальную функцию, для которой справедливо следующее представление в виде H-функции [6, с.93]:

$$e^{-t} = H^{1,0}_{0,1}\left[t \middle| \begin{array}{c} - \\ (0,1)\end{array}\right].$$

В данном случае $\omega = 0$, $\nu = 1 > 0$, параметр H-функции $a^* = 1 > 0$, условие (16) принимает вид $Re\left(\sigma\left(\eta+\alpha\right)\right) > -\sigma$ и выполнено при $Re\left(\eta+\alpha\right) > -1$. Тогда, в соответствии с формулой (18),

$$\left(D^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}e^{-t}\right)(x) = \left(D^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}H^{1,0}_{0,1}\left[t\left|\begin{array}{c} - \\ (0,1)\end{array}\right.\right]\right)(x) =$$

$$= H^{1,1}_{1,2}\left[x\left|\begin{array}{cc} & \left(-\alpha-\eta,\frac{1}{\sigma}\right) \\ (0{,}1) & \left(-\eta,\frac{1}{\sigma}\right)\end{array}\right.\right] = {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}\left(\alpha+\eta+1,\frac{1}{\sigma}\right) \\ \left(\eta+1,\frac{1}{\sigma}\right)\end{array}\left|-x\right.\right],$$

где

$${}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(a,\alpha) \\ (b,\beta)\end{array}\left|x\right.\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(a+k\alpha\right)}{\Gamma\left(b+k\beta\right)}\frac{x^k}{k!}$$

– обобщенная гипергеометрическая функция Райта [6, с.95].

В частности, при $\sigma = 1$ получим

$$\left(D^{\alpha}_{0+;1,\eta}e^{-t}\right)(x) = {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(\alpha+\eta+1,1) \\ (\eta+1,1)\end{array}\left|-x\right.\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\alpha+\eta+1+k\right)}{\Gamma\left(\eta+1+k\right)}\frac{(-x)^k}{k!} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\eta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\eta+1\right)}\,{}_1F_1\left(\alpha+\eta+1,\eta+1;-x\right),$$

где ${}_1F_1\left(a,b;x\right)$– вырожденная гипергеометрическая функция Куммера [5, с.115].

Пример 2. Рассмотрим обобщенную гипергеометрическую функцию [7, с.41]

$${}_pF_q\left(a_1,a_2,...,a_p;b_1,b_2,...,b_q;z\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{h=1}^{p}\left(a_h\right)_k}{\prod_{h=1}^{q}\left(b_h\right)_k}\frac{z^k}{k!},$$

где $a_i, b_j \in \mathrm{C}\backslash\left\{0,-1,-2,...\right\}$, $i = 1,...,p$, $j = 1,...,q$, $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ – символ Похгаммера. Эта функция представима в виде H-функции следующим образом [6, с.94]:

$${}_pF_q\left(a_1,a_2,...,a_p;b_1,b_2,...,b_q;-t\right) = \frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j\right)}{\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(a_i\right)}H^{1,p}_{p,q+1}\left[t\left|\begin{array}{cc} & \left(1-a_i,1\right)_{1,p} \\ (0,1) & \left(1-b_j,1\right)_{1,q}\end{array}\right.\right].$$

Параметры этой H-функции $a^* = p - q$, $\Delta = 1 - p + q$. Тогда, в соответствии с пунктом (а) доказанной теоремы, если $p \geq q$ и

$$\min_{1 \leq j \leq m} \{Reb_j\} + Re\,(\omega + \eta + \alpha) > -1,$$

то справедлива формула дробного дифференцирования типа Эрдейи–Кобера обобщенной гипергеометрической функции

$$\left(D^{\alpha}_{0+;1,\eta}\, t^{\omega}\ {}_pF_q\,(a_i; b_j; -t)\right)(x) =$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{q} \Gamma\,(b_j)}{\prod_{i=1}^{p} \Gamma\,(a_i)} x^{\omega} H^{1,p+1}_{p+1,q+2} \left[x \left| \begin{array}{ccc} (-\alpha - \eta - \omega, 1) & (1 - a_i, 1)_{1,p} & \\ (0,1) & (1 - b_j, 1)_{1,q} & (-\eta - \omega, 1) \end{array} \right. \right] =$$

$$= \frac{\Gamma\,(\alpha + \eta + \omega + 1)}{\Gamma\,(\eta + \omega + 1)}\ {}_pF_q\,(\alpha + \eta + \omega + 1, a_1, a_2, ..., a_p; \eta + \omega + 1, b_1, b_2, ..., b_q; -t)\,.$$

Полученная формула является модификацией формулы n-кратного дифференцирования обобщенной гипергеометрической функции [7, с.44]

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[t^{\delta}\ {}_pF_q\,(a_i; b_j; t)\right] = (\delta - n + 1)_n\, t^{\delta - n}\ {}_{p+1}F_{q+1}\,(\delta + 1, a_i; \delta + 1 - n, b_j; t)\,.$$

Литература

1. Kilbas, A.A. Theory and Applications of Fractional Diferential Equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo; editor J. van Mill. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.

2. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев; под ред. С.М. Никольского. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

3. Ворошилов, А.А. Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана–Лиувилля / А.А. Ворошилов, А.А. Килбас // Доклады академии наук. – 2006. – Т. 406, N 1. – С. 12–16.

4. Ворошилов, А.А. Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто / А.А. Ворошилов, А.А. Килбас // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, N 5. – С. 599–609.

5. Зорич, В.А. Математический анализ: в 2 ч. / В.А. Зорич. – 4-е изд. – М.: МЦМНО, 2002. – Ч. 2. – 794 с.

6. Kilbas, A.A. H-Transforms. Theory and Applucations / A.A. Kilbas, M. Saigo. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 384 p.

7. Luke, Y.L. The Special Functions and Their Approximations: in 2 vol. / Y.L. Luke. – London: Academic Press, 1969. – Vol. 1. – 349 p.

УДК 517.589, 517.444

А.А. Ворошилов

Дробное дифференцирование типа Эрдейи-Кобера $\boldsymbol{H}$-функции Фокса

Ключевые слова: дробное исчисление, производная и интеграл Римана–Лиувилля, операторы типа Эрдейи–Кобера, интеграл Меллина–Барнса, специальные функции, H-функция Фокса, гипергеометрическая функция.

Исследуются операторы дробного дифференцирования типа Эрдейи–Кобера, являющиеся одним из обобщений понятия производной на нецелые порядки дифференцирования. Цель работы – получить формулы правосторонних и левосторонних производных произвольного положительного порядка типа Эрдейи–Кобера от H-функции Фокса, являющейся обобщением многих элементарных и специальных функций. Искомые формулы получены в явном виде, а также найдены условия их применимости. Результаты работы могут быть использованы в теоретических исследованиях дифференциальных уравнений дробного порядка, а также при чтении специальных курсов по дробному исчислению.

A.A. Voroshilov

Erdelyi–Kober type fractional differentiation of the Fox H-function

Summary

Erdelyi–Kober type fractional differentiation operators investigated. These operators are one of the generalizations of the concept of derivative for fractional orders of differentiation. The purpose of the article is to get formulas of arbitrary positive order Erdelyi–Kober type derivative of the Fox H-function, which is a generalization of many elementary and special functions. We obtain these formulas in closed form and found the conditions of their applicability. The result can be used in theoretical studies of differential equations of fractional order, as well as in special courses of fractional calculus.

Keywords: fractional calculus, Riemann–Liouville fractional derivative and integral, Erdelyi–Kober type operators, Mellin–Barnes type integral, special functions, Fox H-function, hypergeometric function.