УДК 517.956.32

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФАКТОРИЗОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТНЫХ ПОРЯДКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАДКИХ ОПЕРАТОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

© 2006 г. Ф.Е. Ломовцев

Задачи Коши для квазигиперболических факторизованных дифференциально-операторных уравнений высших четных порядков с постоянными областями определения изучались в [1]. Задача Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения исследовалась только для уравнений второго порядка [2, 3]. Настоящая работа посвящена доказательству корректной разрешимости в сильном смысле задач Коши для некоторых квазигиперболических факторизованных дифференциально-операторных уравнений высших четных порядков с переменными областями определения переменных неограниченных операторных коэффициентов, к которым сводятся смешанные задачи для некоторых гиперболических уравнений в частных производных с гладко зависящими от времени коэффициентами в граничных условиях. Доказательства проводим модификацией и обобщением функционального метода энергетических неравенств из [1]. В отличие от [1], в данной работе вывод априорных оценок с помощью абстрактных сглаживающих операторов обобщен на случай переменных областей определения переменных неограниченных операторных коэффициентов, а техническое исполнение доказательства разрешимости в сильном смысле индукцией путем декомпозиции абстрактных операторов исходных задач на операторы-сомножители и применением к ним доказанных ниже лемм 5 и 6 является новым и впервые получена формула их сильных решений (см. ниже формулу (25)). Эта формула обобщает аналогичную формулу для гладких (классических) решений и показвывает, что аналогично гладким решениям сильные решения этих задач Коши можно находить рекуррентно по операторам-сомножителям. Кроме того, в отличие от [1], в настоящей работе не повторяются какие-либо этапы доказательств монографии [4]. В конце работы приведен пример новых корректных смешанных задач для гиперболических факторизованных уравнений в частных производных четных порядков с зависящими от t и гладкими по t коэффициентами в граничных условиях.

1. Постановка задач Коши. Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. На ограниченном интервале $]0,T[$ рассматриваются дифференциальные уравнения

$$\mathcal{L}_m(t)u \equiv (d^2/dt^2 + A_m(t))\cdots(d^2/dt^2 + A_1(t))u = f, \quad t \in]0,T[, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$l_j u \equiv (d^j u/dt^j)|_{t=0} = \varphi_j \in H, \quad 0 \leqslant j \leqslant 2m-1, \quad m = 1,\ 2, \dots, \tag{2}$$

где u и f – функции переменной t со значениями в H, $A_k(t)$, $t \in [0,T]$, – положительные самосопряженные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A_k(t))$, $k = \overline{1,m}$.

Предполагается, что все операторы $A_k(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

I. При каждом $t \in [0,T]$ операторы $A_k(t)$ являются сужениями на $D(A_k(t))$ некоторых линейных неограниченных операторов $\tilde{A}_k(t)$ в H с не зависящими от t областями определения $D(\tilde{A}_k)$ таких, что $D(A_k(t)) \subset D(\tilde{A}_k)$ и $\tilde{A}_k(t)u = A_k(t)u \ \ \forall u \in D(A_k(t))$, $t \in [0,T]$, $k = \overline{1,m}$.

II. При каждом $t \in [0,T]$ их обратные операторы $A_k^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0,T],\mathfrak{L}(H)), k=\overline{1,m}$, имеют в H сильную производную по t [5, с. 22] $dA_k^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T],\mathfrak{L}(H))$, удовлетворяющую неравенствам

$$-\left((dA_k^{-1}(t)/dt)g,g\right) \leqslant c_k^{(1)}\left(A_k^{-1}(t)g,g\right) \quad \forall g \in H, \quad k=\overline{1,m}, \tag{3}$$

где $\mathcal{B}([0,T],E)$ – множество всех ограниченных функций по $t \in [0,T]$ в норме банахова пространства E и $0 \leq c_k^{(1)}$ – постоянные, не зависящие от g и t.

III. При каждом $t \in [0,T]$ операторы $dA_k^{-1}(t)/dt$, $k=\overline{1,m}$, имеют в H сильную производную по t $\quad d^2A_k^{-1}(t)/dt^2 \in \mathcal{B}([0,T],\mathfrak{L}(H))$, удовлетворяющую неравенствам

$$|((d^2A_k^{-1}(t)/dt^2)g,v)| \leqslant c_k^{(2)}|g||A_k^{-1/2}(t)v| \quad \forall g,\ v\in H,\ k=\overline{1,m}, \tag{4}$$

где $A_k^{-1/2}(t)$ – обратные операторы к квадратным корням $A_k^{1/2}(t)$ операторов $A_k(t)$ и $0 \leq c_k^{(2)}$ – постоянные, не зависящие от $g,\ v$ и t.

IV. При каждом $t \in [0,T]$ для всех операторов $A_k(t),\ k=\overline{1,m}$, эквивалентны нормы значений

$$|A_s(t)u| \backsim |A_k(t)u| \backsim |A_s(t)u - A_k(t)u| \ \ \forall u \in D(A_k(t)),\ t\in[0,T],\ 1\leq s\neq k\leq m,$$

и области определения $D(A_k^m(t))$ их степеней $A_k^m(t),\ t\in[0,T]$, являются плотными множествами в H.

Так же как в [1], индукцией по i доказывается эквивалентность норм значений

$$|A_s^i(t)u| \backsim |A_k^i(t)u| \ \ \forall u \in D(A_k^m(t)),\ t\in[0,T],\ 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant s,\ k\leqslant m.$$

Отсюда следует, что $|A_m(t)\cdots A_1(t)u| \backsim |A_1^m(t)u|$ $\forall u\in D(A_1^m(t)),\ t\in[0,T]$. Наделяя при каждом $t\in[0,T]$ области определения $D(A^{\alpha/2m}(t))$ положительных дробных степеней $A^{\alpha/2m}(t)$ самосопряженных операторов $A(t)=A_1^m(t)$ в H эрмитовыми нормами $|v|_{\alpha,t} = = |A_1^{\alpha/2}(t)v|$, получаем гильбертовы пространства $W^\alpha(t),\ t\in[0,T],\ \alpha\leqslant 2m,\ W^0(t)=H$. Очевидно, что имеют место непрерывные и плотные вложения $W^\beta(t)\subset W^\alpha(t),\ t\in[0,T]$, если $\beta>\alpha$. Из условий I и IV при всех $t\in[0,T]$ следуют неравенства

$$|A_s(t)u - A_k(t)u|_{\alpha,t} \geqslant c_{s,k}|u|_{\alpha+2,t} \ \ \forall u\in W^{\alpha+2}(t),\ \alpha\leqslant 2m-2,\ 1\leqslant s<k\leqslant m, \tag{5}$$

в которых постоянные $c_{s,k}>0$ не зависят от u и t. Эти неравенства доказываются сначала для целых четных α так же, как и выше, а потом с использованием неравенства Гайнца [5, с. 177–179] распространяются на все остальные значения α.

V. Существуют не зависящие от t банаховы пространства V^{2i}, $\ 0\leqslant i\leqslant m$, такие, что $V^0=H$; $D(\tilde{A}_k)\subset V^2$; пространства V^{2j} непрерывно вложены в пространства V^{2i}, если $j>i$; пространства $W^{2i}(t)$ непрерывно вложены в пространства V^{2i}, $t\in[0,T]$, $0\leqslant i\leqslant m$, и существуют в H сильные производные по t [5, с. 218] $\ d^i\tilde{A}_k(t)/dt^i \in \in \mathcal{B}([0,T],\mathfrak{L}(V^{2[j/2]+2},V^{2[j/2]}))$, $0\leqslant j\leqslant 2m-2-i$, $0\leqslant i\leqslant 2m-2$, $1\leqslant k\leqslant m$, где $[\cdot]$ – целая часть числа.

VI. При каждом $t\in[0,T]$ для всех операторов $A_k(t),\ k=\overline{1,m},$ выполняются неравенства

$$|A_s(t)A_k(t)u - A_k(t)A_s(t)u|_{\alpha,t} \leqslant \tilde{c}_{s,k}|u|_{\alpha+3,t} \ \ \forall u\in W^{\alpha+4}(t),\ \alpha\leqslant 2m-4,\ 1\leqslant s\neq k\leqslant m, \tag{6}$$

где постоянные $\tilde{c}_{s,k}\geqslant 0$ не зависят от u и t.

Условие I представляет собой новый по сравнению с [6, с. 150–158] и [7] способ выражения все той же специфики некоторых дифференциальных операторов $A_k(t)$: они обычно состоят из дифференциальных выражений $\tilde{A}_k(t)$ и граничных условий, каждое из которых может обладать определенной самостоятельностью. В приложениях роль таких операторов $\tilde{A}_k(t)$ могут играть некоторые эллиптические дифференциальные операторы без граничных условий, а роль их сужений $A_k(t)$ – эти же эллиптические дифференциальные операторы, но уже с некоторыми зависящими от t граничными условиями. Дополнительные требования на операторы $A_k(t)$ будут указаны в формулировках лемм и теорем.

2. Вспомогательное утверждение. В дальнейшем при выводе априорных оценок сильных решений и доказательстве разрешимости рассматриваемых задач Коши нам понадобятся интерполяционные неравенства (8) (см. ниже) в положительной гильбертовой шкале пространств $\{W^\alpha(t)\}$, $t \in [0,T]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2m$, порожденной переменными самосопряженными операторами с переменными областями определения.

Лемма 1. *Пусть в гильбертовом пространстве H линейные положительные самосопряженные операторы $A_1(t)$, $t \in [0,T]$, с зависящими от t областями определения $D(A_1(t))$ имеют обратные $A_1^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0,T], \mathfrak{L}(H))$, для которых при всех $t \in [0,T]$ в H существует сильная производная $dA_1^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T], \mathfrak{L}(H))$. Если при всех $t \in [0,T]$ в H первая сильная производная обратных операторов $A^{-1}(t) = A_1^{-m}(t)$ к операторам $A(t) = A_1^m(t)$ такая, что*

$$dA^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T], \mathfrak{L}(H, W^{2m-1}(t))), \tag{7}$$

то $\forall u \in E^m$ (пространства E^m определены в п. 3) и $\forall \tau \in [0,T]$ справедливы неравенства

$$\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2_{2m-2-i,t}\Bigg|_{t=\tau} \leqslant c_1 \int_0^\tau \left|\frac{d^{i+1}u}{dt^{i+1}}\right|^2_{2m-1-(i+1),t} dt \; +$$

$$+ c_1(1 + 2\mathcal{M}_{(2m-2-i)/2m}) \int_0^\tau \left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2_{2m-1-i,t} dt + \left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2_{2m-2-i,t}\Bigg|_{t=0}, \; 0 \leqslant i \leqslant 2m-2, \tag{8}$$

в которых не зависящие от u и t постоянные c_1 и $\mathcal{M}_\gamma$ указаны ниже.

Доказательство. При каждом $t \in [0,T]$ операторы $\mathcal{A}_\varepsilon(t) = A(t)A_\varepsilon^{-1}(t) = \varepsilon^{-1}[I - A_\varepsilon^{-1}(t)]$, $\varepsilon > 0$, где $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1}$, ограничены, самосопряжены и положительны в H. Непосредственно проверяется, что при всех $t \in [0,T]$ они имеют в H сильную производную $d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt = -\mathcal{A}_\varepsilon(t)(dA^{-1}(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon(t) \in \mathcal{B}([0,T], \mathfrak{L}(H))$, удовлетворяющую неравенствам

$$||\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(t)||_{\mathfrak{L}(H)} = ||\mathcal{A}_\varepsilon^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)||_{\mathfrak{L}(H)} =$$

$$= ||A_\varepsilon^{-(1-\beta)}(t)A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)||_{\mathfrak{L}(H)} \leqslant \mathcal{M},$$

где постоянная $\mathcal{M} = \sup\limits_{0<t<T} ||A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)||_{\mathfrak{L}(H)}$, $\beta = 1/(2m)$. Здесь для операторов $A_\varepsilon^{-1}(t)$ были использованы оценки $||A_\varepsilon^{-\rho}(t)||_{\mathfrak{L}(H)} \leq 1$, $t \in [0,T]$, $\forall \varepsilon > 0$, $0 < \rho \leq 1$, при $\rho = 1-\beta$. В $H_1 = H$ операторы $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{A}_\varepsilon^{\beta-1}(t)$ и $\mathcal{T} = \mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(t)$ при всех $t \in [0,T]$ удовлетворяют замечанию 7.1 из [5, с. 179] и, в частности, неравенству

$$|\; \mathcal{B}\; \mathcal{T}x \;|=|\; (dA^{-1}(t)/dt)A^{1-\beta}(t)A_\varepsilon^{-(1-\beta)}(t)\mathcal{A}_\varepsilon^{\beta-1}(t)x| \leq \mathcal{M} \;|\; \mathcal{A}x \;| \quad \forall x \in H,$$

так как $\| \; \overline{(dA^{-1}(t)/dt)A^{1-\beta}(t)}||_{\mathfrak{L}(H)} =\| \; A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)||_{\mathfrak{L}(H)}$, $t \in [0,T]$, где черта сверху означает замыкание по непрерывности стоящих под чертой операторов в H [5], с. 228]. Применив к ним неравенство Гайнца (7.6) из [5, с. 177–178], при всех $t \in [0,T]$ получим неравенства

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-\alpha}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+\alpha}(t)x| \leqslant \mathcal{M}|x| \quad \forall x \in H, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1-\beta. \tag{9}$$

Дифференцируя интегральное представление положительных дробных степеней операторов $\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)$ [5, с. 140], в силу представления резольвент $R_\varepsilon(-s) = (1+\varepsilon s)^{-1}(I+ +\varepsilon A(t))R(-s/(1+\varepsilon s))$ через резольвенту $R(-r) = (A(t)+r)^{-1}$, включения (7) и оценок

$$||A^\beta(t)R(-r)||_{\mathcal{L}(H)} \leq N_\beta/(1+r)^{1-\beta}, \quad r>0, \quad 0 \leq \beta < 1,$$

где N_β – известные из операторного исчисления постоянные, при всех $t \in [0,T]$ имеем следующее интегральное представление производной этих дробных степеней:

$$\frac{d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)}{dt}x = \frac{\sin \pi\gamma}{\pi}\int_0^{+\infty} s^\gamma R_\varepsilon(-s)\frac{d\mathcal{A}_\varepsilon(t)}{dt}R_\varepsilon(-s)x\,ds \quad \forall x \in W^{2m}(t), \quad 0<\gamma<1-\beta, \tag{10}$$

где $R_\varepsilon(-s) = (\mathcal{A}_\varepsilon(t)+s)^{-1}$ и $\varepsilon > 0$. Действительно, согласно этим представлению и оценкам, при всех $t \in [0,T]$ справедливы оценки

$$\left|\frac{d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)}{dt}x\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{s^\gamma}{(1+\varepsilon s)^2}\left\|A^\beta(t)R\left(\frac{-s}{1+\varepsilon s}\right)\right\|\left\|A^{1-\beta}(t)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}\right\|\left\|R\left(\frac{-s}{1+\varepsilon s}\right)\right\| ds \times$$

$$\times|A(t)x| \leq \frac{1}{\pi}N_\beta\mathcal{M}N_0\int_0^{+\infty}\frac{s^\gamma}{(1+\varepsilon s)^\beta(1+s+\varepsilon s)^{2-\beta}}\ ds\ |A(t)x| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}N_\beta\mathcal{M}N_0\int_0^{+\infty}\frac{s^\gamma}{(1+s)^{2-\beta}}\ ds\ |A(t)x| < +\infty \quad \forall x \in W^{2m}(t),$$

равномерно ограниченные по всем $\varepsilon > 0$ при $0<\gamma<1-\beta$, $\beta = 1/(2m)$.

Если $Q = \mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)R_\varepsilon(-s)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)R_\varepsilon(-s)$ и $x, y \in W^{2m}(t)$, то

$$|(Qx,y)| = |(\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-\frac{1-\gamma}{2}}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+\frac{1-\gamma}{2}}(t)\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)x,\ \mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)y)| \leqslant$$
$$\leqslant ||\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-\frac{1-\gamma}{2}}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+\frac{1-\gamma}{2}}(t)||_{\mathfrak{L}(H)}|\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)x||\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)y|.$$

Воспользуемся интегральным представлением (10), оценками (9) при $\gamma \geq 2\beta-1$ и найдем неравенства

$$\left|\left(\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)\frac{d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)}{dt}\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)x, y\right)\right| \leq \frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\mathcal{M}\int_0^{+\infty} s^\gamma\left|\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)x\right|\left|\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)y\right|\ ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\mathcal{M}\left(\int_0^{+\infty}s^\gamma\left|\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)x\right|^2\ ds\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty}s^\gamma\left|\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)y\right|^2\ ds\right)^{1/2}.$$

При каждом $\varepsilon > 0$ для положительно-определенных операторов $(\mathcal{A}_\varepsilon(t)h,h) \geq c_\varepsilon|h|^2 \quad \forall h \in H$, $c_\varepsilon = (\sup\limits_{0<t<T}||A^{-1}(t)||_{\mathfrak{L}(H)}+\varepsilon)^{-1}$, существует единственное разложение единицы $E_\lambda(\varepsilon)$ такое, что

$$\int_0^{+\infty}s^\gamma\left|\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)x\right|^2\ ds = \int_0^{+\infty}s^\gamma\int_{c_\varepsilon}^{+\infty}\lambda^{1-\gamma}\frac{1}{(\lambda+s)^2}\ d(E_\lambda(\varepsilon)x,x)\,ds =$$

$$= \int_{c_\varepsilon}^{+\infty}\lambda^{1-\gamma}\int_0^{+\infty}\frac{s^\gamma}{(\lambda+s)^2}ds\ d(E_\lambda(\varepsilon)x,x) = \int_{c_\varepsilon}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{(s/\lambda)^\gamma}{(1+s/\lambda)^2}d(s/\lambda)\ d(E_\lambda(\varepsilon)x,x) =$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{\sigma^\gamma}{(1+\sigma)^2}\ d\sigma\int_{c_\varepsilon}^{+\infty}d(E_\lambda(\varepsilon)x,x) = \int_0^{+\infty}\frac{\sigma^\gamma}{(1+\sigma)^2}\ d\sigma|x|^2 \quad \forall t \in [0,T].$$

Отсюда вытекает, что при всех $t \in [0, T]$ имеют место неравенства

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^{\gamma}(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)x| \leqslant \mathcal{M}_\gamma |x| \quad \forall x \in H, \quad \beta \leqslant \gamma \leqslant 1-\beta, \tag{11}$$

где постоянные $\mathcal{M}_\gamma = \pi^{-1}\mathcal{M}\int_0^{+\infty} \sigma^\gamma/(1+\sigma)^2\, d\sigma < +\infty$, если при каждом $t \in [0,T]$ в неравенстве (11) элементы $x \in H$ аппроксимировать некоторыми последовательностями $x_n \in W^{2m}(t)$.

Используя в правых частях очевидных тождеств

$$\left|\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{2m-2-i}{2m}}(t)\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2\Bigg|_{t=\tau} = 2Re\int_0^\tau \left(\mathcal{A}_\varepsilon^{-\frac{1}{2m}}(t)\frac{d\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{2m-2-i}{2m}}(t)}{dt}\frac{d^i u}{dt^i}, \mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{2m-1-i}{2m}}(t)\frac{d^i u}{dt^i}\right)dt +$$

$$+2Re\int_0^\tau \left(\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{2m-2-i}{2m}}(t)\frac{d^{i+1}u}{dt^{i+1}}, \mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{2m-2-i}{2m}}(t)\frac{d^i u}{dt^i}\right)dt + \left|\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{2m-2-i}{2m}}(t)\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2\Bigg|_{t=0} \quad \forall u \in D(L_m)$$

неравенства Шварца и Коши-Буняковского, оценки (11) и δ – неравенство $2ab \leq \delta a^2 + \delta^{-1}b^2$ $\forall \delta > 0$, найдем, что для $\forall \tau \in]0, T]$

$$\left|\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{2m-2-i}{2m}}(t)\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2\Bigg|_{t=\tau} \leqslant (c_1 + \varepsilon^{1/(2m)})\int_0^\tau \left|\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{2m-2-i}{2m}}(t)\frac{d^{i+1}u}{dt^{i+1}}\right|^2 dt +$$

$$+(c_1+\varepsilon^{1/(2m)})(1+2\mathcal{M}_{(2m-2-i)/(2m)})\int_0^\tau \left|\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{2m-1-i}{2m}}(t)\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2 dt + \left|\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{2m-2-i}{2m}}(t)\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2\Bigg|_{t=0}, \ 0 \leqslant i \leqslant 2m-2,$$

где постоянная $c_1 = \sup\limits_{0<t<T} ||A_1^{-1}(t)||^{1/2}_{\mathfrak{L}(H)}$ также не зависит от ε. Устремив в последнем неравенстве ε к нулю, согласно свойству

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{\alpha/(2m)}(t)v - A_1^{\alpha/2}(t)v| \to 0 \quad \forall v \in W^\alpha(t), \quad t \in [0,T], \quad \alpha \leqslant 2m, \quad при \ \ \varepsilon \to 0,$$

будем иметь оценки (8) для любых функций u из множеств $D(L_m)$, которые указаны в п. 3. Затем оценки (8) для $\forall u \in D(L_m)$ распространяются предельным переходом на $\forall u \in E^m$.

3. Определение сильных решений задач Коши. Сначала введем пространства и дадим определение сильных решений исследуемых задач Коши. Обозначим через $\mathcal{H}^\alpha$ гильбертовы пространства $L_2(]0,T[, W^\alpha(t))$ с эрмитовыми нормами $||\cdot||_\alpha$, $\alpha \leqslant 2m$, $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}$. Пространство $\mathcal{H}^\alpha$ – множество всех измеримых функций $u : [0,T] \ni t \to u(t) \in H$ таких, что $u(t) \in D(A^{\alpha/2m}(t)), t \in [0,T]$, и функции $h(t) = A^{\alpha/2m}(t)u(t) \in \mathcal{H} = L_2(]0,T[, H)$.

Пусть гильбертовы пространства $\mathcal{H}^{p,q}$ – множества всех функций $u \in \mathcal{H}$ с конечными эрмитовыми нормами

$$||u||_{p,q} = \left(\sum_{i=0}^{p}\left|\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|\right|^2_{q-i}\right)^{1/2};$$

банаховы пространства $\mathcal{E}^{p,q}$ – множества всех функций $u \in B([0,T], H)$ с конечными нормами

$$|||u|||_{p,q} = \left(\sup_{0<t<T}\sum_{i=0}^{p}\left|\frac{d^i u(t)}{dt^i}\right|^2_{q-i,t}\right)^{1/2};$$

банахово пространство $\mathcal{B}([0,T], H)$ – множество всех ограниченных функций переменной $t \in [0,T]$ со значениями в H, наделенное нормой равномерной сходимости $\|\cdot\|_{\mathcal{B}} = \sup\limits_{0<t<T} |\cdot|$. При

определении пространств $\mathcal{H}^{p,q}$ и $\mathcal{E}^{p,q}$ под производной du/dt понимается функция $du/dt \in W^{q-1}(t)$, для которой при всех $t\in[0,T]$ предел

$$|\triangle u(t)/\triangle t - du(t)/dt|_{q-1,t} = |A_1^{(q-1)/2}(t)[\triangle u(t)/\triangle t - du(t)/dt]| \to 0$$

при $\triangle t\to 0$. Производные высших порядков $d^iu/dt^i \in W^{q-i}(t)$ определяются аналогичным образом рекуррентно. В данном определении производной du/dt предполагается, что для $u(t)\in W^q(t)$ при всех достаточно малых $\tau>0$ имеют место включения $u(t+\tau)\in W^{q-1}(t)$, которые выполняются не для любых операторов $A_1(t)$ с переменными областями определения $D(A_1(t))$. В случае переменных $D(A_1(t))$ достаточные условия корректности этого определения и существования всех производных из указанных ниже пространств $\mathcal{H}^{2m,2m}$ и $\mathcal{E}^{2m-1,2m-1}$ содержатся в лемме 1. В случае постоянных областей определения операторов $A_1(t)$ обычно имеют место непрерывные вложения $\mathcal{H}^{p,q}\subset\mathcal{E}^{p-1,q-1}$[1]. В случае переменных областей определения операторов $A_1(t)$ эти вложения могут не выполняться.

Пусть $\mathcal{H}^{2m,2m}$ и $\mathcal{E}^{2m-1,2m-1}$ – замыкания указанных ниже множеств $D(L_m)$, определение которых содержит требование соответствующей гладкости по t операторов $\tilde{A}_k(t)$, по нормам $||u||_{2m,2m}$ и $|||u|||_{2m-1,2m-1}$ соответственно. Следующее утверждение описывает случай переменных областей определения $D(A_1(t))$, когда справедливы непрерывные вложения $\mathcal{H}^{2m,2m}\subset\ \mathcal{E}^{2m-1,2m-1}$.

Утверждение 1. *Если выполняются предположения леммы 1, то* $\forall u\in\mathcal{H}^{2m,2m}$ *и* $\forall t\in[0,T]$ *имеют место неравенства*

$$\left|\frac{d^iu(t)}{dt^i}\right|^2_{2m-1-i,t} \leqslant c_1\left|\left|\frac{d^{i+1}u}{dt^{i+1}}\right|\right|^2_{2m-i-1} + c_1(1+2\mathcal{M}_{(2m-1-i)/2m}+T^{-1}c_1)\left|\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|\right|^2_{2m-i},\ \ i=\overline{0,2m-1}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. Надо только при интегрировании по t от 0 до τ (см. окончание доказательства леммы 1) вместо нижнего предела интегрирования $t=0$ взять переменный нижний предел интегрирования s, $s<\tau$, и затем, проводя оценки, еще дополнительно проинтегрировать по s от 0 до T.

Однако условие (7) весьма обременительно для дифференциальных операторов $A_1(t)$, у которых зависимость областей определения от t обусловлена зависимостью от t коэффициентов граничных условий. Примеры операторов $A_1(t)$ с переменными областями определения $D(A_1(t))$, которые ему удовлетворяют или не удовлетворяют, приведены в п. 6 настоящей работы. Поэтому в дальнейшем при необходимости (см. замечание 1) мы будем просто предполагать выполненным алгебраическое вложение $D(L_m)\subset\mathcal{E}^{2m-1,2m-1}$, т.е.

$$A_1^{(2m-1-i)/2}(t)(d^iu/dt^i)\in B([0,T],H),\quad 0\leqslant i\leqslant 2m-1,\quad \forall u\in D(L_m). \tag{12}$$

В качестве пространств сильных решений задач Коши (1), (2) возьмем банаховы пространства E^m – замыкания множеств $D(L_m)=\{u\in\tilde{D}(L_m): d^su/dt^s\in\mathcal{H}^{2m-2[(s+1)/2]},\ 0\leqslant\leqslant s\leqslant 2m-1\}$, где

$$\tilde{D}(L_m)=\Bigg\{u\in\mathcal{H}: d^su/dt^s\in L_2(]0,T[,V^{2m-2[(s+1)/2]}),\quad 0\leqslant s\leqslant 2m;$$

$$\frac{d^{2m-2}u}{dt^{2m-2}}, \frac{d^{\alpha_1}\tilde{A}_{k_1}(t)}{dt^{\alpha_1}}\times\cdots\times\frac{d^{\alpha_p}\tilde{A}_{k_p}(t)}{dt^{\alpha_p}}\frac{d^{2m-2p-2-|\alpha(p)|}u}{dt^{2m-2p-2-|\alpha(p)|}}\in\mathcal{H}^2,\quad 0\leqslant|\alpha(p)|\leqslant 2m-2p-2,$$

$$1\leqslant p\leqslant m-1,\quad 1\leqslant k_1,\dots,k_p\leqslant m,\quad k_i\neq k_j\Bigg\},$$

$[\cdot]$ – целая часть числа, $\alpha(p) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{Z}_+^p$ и $|\alpha(p)| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p$, по нормам

$$|||u|||_m = \left\{ \sup_{0<t<T} \sum_{i=0}^{2m-1} \left| \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right|^2_{2m-1-i,t} \right\}^{1/2}.$$

В качестве пространств правых частей уравнений (1) и начальных условий (2) возьмем гильбертовы пространства $F^m = \mathcal{H} \times W^{2m-1}(0) \times \cdots \times H$ – множества всех элементов $\mathcal{F} = \{f, \varphi_0, \ldots, \varphi_{2m-1}\} \in F^m$ с конечными эрмитовыми нормами

$$\langle\|\mathcal{F}\|\rangle_m = \left\{ ||f||_0^2 + \sum_{j=0}^{2m-1} |\varphi_j|^2_{2m-1-j,0} \right\}^{1/2}.$$

Задачам Коши (1), (2) соответствуют линейные неограниченные операторы $L_m \equiv \{\mathcal{L}_m(t), l_0, \ldots, l_{2m-1}\} : E^m \supset D(L_m) \to F^m$ с плотными областями определения $D(L_m)$, $m = 1, 2, \ldots$ В дальнейшем мы будем использовать следующее достаточное условие их замыкаемости.

Лемма 2. *Если выполняются условия I, II (без неравенств (3)), IV и V и условие (12), то операторы* L_m, $m = 1,\ 2, ...,$ *допускают замыкание.*

Доказательство. Сначала убедимся в плотности множества $\mathcal{H}_0^{1,1} = \{v \in \mathcal{H}^{1,1} : v(0) = v(T) = 0\}$ в $\mathcal{H}$. От противного, пусть существует некоторая функция $0 \neq w \in \mathcal{H}$ такая, что интеграл $\int_0^T (v, w)dt = 0$ $\forall v \in \mathcal{H}_0^{1,1}$. В нем положим $v = A_{1,\varepsilon}^{-1}(t)h$, где $A_{1,\varepsilon}^{-1}(t) = (I + \varepsilon A_1(t))^{-1}$, $\varepsilon > 0$, $h, dh/dt \in \mathcal{H}$ и $h(0) = h(T) = 0$, и придем к равенству $\int_0^T (A_{1,\varepsilon}^{-1}(t)h, w)dt = 0$, в котором операторы $A_{1,\varepsilon}^{-1}(t)$ удовлетворяют свойствам 1) и 2) из начала доказательства теоремы 1. В нем по известному свойству (15) переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$, полученное равенство распространяем предельным переходом на все $h \in \mathcal{H}$, полагаем $h = w$ и приходим к равенству $\|w\|_0^2 = 0$, т.е. $w = 0$.

Теперь проверим справедливость критерия замыкаемости линейных операторов L_m, согласно которому если $u_n \in D(L_m)$, $u_n \to 0$ в E^m и $L_m u_n = \{\mathcal{L}_m(t)u_n, l_0 u_n, ..., l_{2m-1}u_n\} \to \mathcal{F} = \{f, \varphi_0, ..., \varphi_{2m-1}\}$ в F^m при $n \to \infty$, то $\mathcal{F} = 0$. Тогда отсюда ввиду ограниченности операторов $l_j : E^m \to W^{2m-1-j}(0)$, $0 \leq j \leq 2m-1$, вытекают равенства $\varphi_j = 0$, $0 \leq j \leq 2m-1$, и, следовательно, после интегрирования по частям один раз по t для $\forall v \in \mathcal{H}_0^{1,1}$ имеем

$$\int_0^T (f, v)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T (\mathcal{L}_m(t)u_n, v)dt = -\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left(\frac{d}{dt}\mathcal{M}_{m-1}(t) \cdots \mathcal{M}_1(t)u_n, \frac{dv}{dt} \right) dt +$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T (A_m^{1/2}(t)\mathcal{M}_{m-1}(t) \cdots \mathcal{M}_1(t)u_n, A_m^{1/2}(t)v)dt = 0,\ \mathcal{M}_k(t) = \frac{d^2}{dt^2} + \tilde{A}_k(t).$$

Это означает, что $f = 0$, так как множество $\mathcal{H}_0^{1,1}$ плотно в $\mathcal{H}$. Лемма 2 доказана.

Затем строим замыкания $\overline{L}_m : E^m \supset D(\overline{L}_m) \to F^m$ операторов L_m, $m = 1, 2, \ldots$ К областям определения $D(\overline{L}_m)$ операторов $\overline{L}_m$ относим все те функции $u \in E^m$, для каждой из которых существуют такая последовательность $u_n \in D(L_m)$ и такой элемент $\mathcal{F} \in F^m$, что $|||u_n - u|||_m \to 0$ и $\langle\|L_m u_n - \mathcal{F}\|\rangle_m \to 0$ при $n \to \infty$, $m = 1, 2, \ldots$ При этом полагаем $\overline{L}_m u = \lim\limits_{n\to\infty} L_m u_n = \mathcal{F}$, $m = 1, 2, \ldots$

Определение 1. Решения $u \in D(\overline{L}_m)$ $(u \in D(L_m))$ операторных уравнений $\overline{L}_m u = \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in F^m$, $m = 1,\ 2, \ldots,$ $(L_m u = \mathcal{F},\ \mathcal{F} \in R(L_m) = L_m(D(L_m)),\ m = 1,\ 2, \ldots,)$ называются *сильными (гладкими) решениями* задач Коши (1), (2).

4. Теорема единственности решений задач Коши. Сначала выведем априорные оценки для гладких решений задач Коши (1), (2).

Теорема 1. *Если выполняются условия I,II,IV-VI и условие (7) при $m > 1$, то существуют не зависящие от u постоянные $c_0(m) > 0$ такие, что*

$$|||u|||_m^2 \leqslant c_0(m)\langle\|L_m u\|\rangle_m^2 \quad \forall u \in D(L_m), \quad m = 1,\ 2,\ \ldots \tag{13}$$

Доказательство. Ввиду условий I и V обозначим $\mathcal{M}_k(t) = d^2/dt^2 + \tilde{A}_k(t)$, $\mathcal{L}_k^{(n,s)}(t) = \mathcal{M}_n(t) \times \cdots \times \mathcal{M}_{k+1}(t) \times \mathcal{M}_{k-1}(t) \times \cdots \times \mathcal{M}_s(t)$, $1 \leqslant s \leqslant k \leqslant n \leqslant m$, $\mathcal{L}_k^{(k,k)}(t) = I$ и запишем $\mathcal{L}_m(t) = \mathcal{M}_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t) + \mathcal{P}_{k,m}(t)$, где в силу неравенств (6) для всех $t \in [0, T]$

$$|\mathcal{P}_{k,m}(t)u|^2 \leqslant \tilde{c}_k \sum_{i=0}^{2m-3} \left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2_{2m-1-i,t} \qquad \forall u \in D(L_m), \tag{14}$$

с не зависящими от u и t постоянными $\tilde{c}_k \geqslant 0$. Операторы сглаживания $A_{k,\varepsilon}^{-1}(t) = (I+ +\varepsilon A_k(t))^{-1}$, $\varepsilon > 0$, $1 \leq k \leq m$, обладают следующими свойствами [2]:

1) для $\forall t \in [0, T]$ при $\varepsilon \to 0$ норма

$$|A_{k,\varepsilon}^{-1}(t)v - v| \to 0 \quad \forall v \in H; \tag{15}$$

2) операторы $A_{k,\varepsilon}^{-1}(t)$ при всех $t \in [0, T]$ имеют в H сильную производную $dA_{k,\varepsilon}^{-1}(t)/dt \in \in \mathcal{B}([0, T], \mathfrak{L}(H))$.

Интегрируя один раз по частям, получаем для $\forall u \in \tilde{D}(L_m)$ тождества

$$(A_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u, A_{k,\varepsilon}^{-1}(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u)\big|_{t=\tau} = 2Re\int_0^\tau \left(A_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u, A_{k,\varepsilon}^{-1}(t)\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right)dt+$$
$$+\int_0^\tau \left(\frac{d(A_k(t)A_{k,\varepsilon}^{-1}(t))}{dt}\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u, \mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right)dt + (A_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u, A_{k,\varepsilon}^{-1}(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u)\big|_{t=0},$$
$$m = 1, 2, \ldots.$$

Здесь во втором интеграле правой части воспользуемся формулами [2]

$$d(A_k(t)A_{k,\varepsilon}^{-1}(t))/dt = -A_k(t)A_{k,\varepsilon}^{-1}(t)(dA_k^{-1}(t)/dt)A_k(t)A_{k,\varepsilon}^{-1}(t),$$

неравенствами (3) и придем к неравенствам

$$(A_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u, A_{k,\varepsilon}^{-1}(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u)\big|_{t=\tau} \leqslant 2Re\int_0^\tau \left(A_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u, A_{k,\varepsilon}^{-1}(t)\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right)dt+$$
$$+c_k^{(1)}\int_0^\tau (A_{k,\varepsilon}^{-1}(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u, A_{k,\varepsilon}^{-1}(t)A_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u)dt + (A_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u, A_{k,\varepsilon}^{-1}(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u)\big|_{t=0}.$$

В этих неравенствах, используя свойство (15), перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ и будем иметь неравенства

$$(A_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u, \mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u)\big|_{t=\tau} \leqslant 2Re\int_0^\tau \left(A_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u, \frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right)dt+$$
$$+c_k^{(1)}\int_0^\tau (\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u, A_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u)dt + (A_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u, \mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u)\big|_{t=0}. \tag{16}$$

Интегрируя один раз по частям, найдем тождества

$$\left|\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right|^2\Big|_{t=\tau} = 2Re\int_0^\tau \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u, \frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right)dt + \left|\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right|^2\Big|_{t=0} \quad \forall u \in \tilde{D}(L_m).$$

Сложив эти тождества с неравенствами (16), получим неравенства

$$\left[\left|\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right|^2+\left|A_k^{1/2}(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right|^2\right]\Big|_{t=\tau}\leqslant 2Re\int_0^\tau\left(\mathcal{L}_m(t)u,\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right)dt+$$
$$+\int_0^\tau\Phi_k(u,u)dt+\left[\left|\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right|^2+\left|A_k^{1/2}(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right|^2\right]\Big|_{t=0}\quad\forall u\in\tilde{D}(L_m),\tag{17}$$

где $\Phi_k(u,u)=c_k^{(1)}(\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u,A_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u)-2Re(\mathcal{P}_{k,m}(t)u,\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u)$. В силу условия IV, левые части неравенств (17) не меньше

$$c_2\left[\left|\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right|^2+\left|\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right|_{1,t}^2\right]\Bigg|_{t=\tau},\tag{18}$$

где постоянная $c_2>0$ не зависит от u,t и k. Благодаря, прежде всего, неравенствам (5), справедлива следующая

Лемма 3. *Если выполняются предположения теоремы 1, то существуют не зависящие от u и t постоянные $c_3>0$ и $c_4\geqslant 0$ такие, что для $\forall u\in D(L_m)$ и $\forall t\in[0,T]$*

$$\sum_{k=1}^m\left(\left|\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u\right|^2+|\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u|_{1,t}^2\right)\geqslant c_3\sum_{i=0}^{2m-1}\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|_{2m-1-i,t}^2-c_4\sum_{i=0}^{2m-3}\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|_{2m-2-i,t}^2.\tag{19}$$

Доказательство. Будем доказывать индукцией по m. При $m=1$ лемма 3 верна. Предположим, что она справедлива при $m-1$ различных множителях $\mathcal{M}_k(t)$ и, в частности, выполняются неравенства вида (19) для двух сумм:

$$\mathcal{S}_{m,2}(v)=\sum_{k=2}^m\left(\left|\frac{d\mathcal{L}_k^{(m,2)}(t)v}{dt}\right|^2+\left|\mathcal{L}_k^{(m,2)}(t)v\right|_{1,t}^2\right),$$

$$\mathcal{S}_{m-1,1}(v)=\sum_{k=1}^{m-1}\left(\left|\frac{d\mathcal{L}_k^{(m-1,1)}(t)v}{dt}\right|^2+\left|\mathcal{L}_k^{(m-1,1)}(t)v\right|_{1,t}^2\right).$$

Обозначив сумму левой части неравенства (19) через $\mathcal{S}_{m,1}(u)$, имеем для нее равенство

$$\mathcal{S}_{m,1}(u)=(1/3)[\mathcal{S}_{m,2}(\mathcal{M}_1(t)u)+\mathcal{S}_{m-1,1}(\mathcal{M}_m(t)u)]+\mathcal{P}_m(t)u,$$

при оценке снизу которого в выражении

$$\mathcal{P}_m(t)u=\frac{1}{3}\Bigg\{2\sum_{k=1}^{m-1}\left(\left|\frac{d\mathcal{M}_m(t)\mathcal{L}_k^{(m-1,1)}(t)u}{dt}\right|^2+\left|\mathcal{M}_m(t)\mathcal{L}_k^{(m-1,1)}(t)u\right|_{1,t}^2\right)-\mathcal{S}_{m-1,1}(\mathcal{M}_m(t)u)+$$
$$+2\left|\frac{d\mathcal{L}_m^{(m,1)}(t)u}{dt}\right|^2+2\left|\mathcal{L}_m^{(m,1)}(t)u\right|_{1,t}^2+\left|\frac{d\mathcal{L}_1^{(m,1)}(t)u}{dt}\right|^2+\left|\mathcal{L}_1^{(m,1)}(t)u\right|_{1,t}^2\Bigg\}$$

четыре последних неотрицательных слагаемых можно отбросить. Если в оставшихся слагаемых этого выражения $\mathcal{P}_m(t)u$ применим оценку вида $(1+\delta)|x|^2-|y|^2\geq-(1+\delta^{-1})|x-y|^2$ $\forall x,y\in H,\forall\delta>0$ при $\delta=1$, то в силу неравенств (6) при всех $t\in[0,T]$ придем к оценке

$$\mathcal{P}_m(t)u\ \geq-\ \tilde{c}_4^{(1)}\sum_{i=0}^{2m-3}\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|_{2m-2-i,t}^2\qquad\forall u\in D(L_m)$$

с не зависящей от u и t постоянной $\tilde{c}_4^{(1)} \geq 0$. Таким образом, по предположению индукции

$$\mathcal{S}_{m,1}(u) \geq \tilde{c}_3^{(1)} \sum_{i=0}^{2m-3} \left(\left| \frac{d^i \mathcal{M}_1(t) u}{dt^i} \right|^2_{2m-3-i,t} + \left| \frac{d^i \mathcal{M}_m(t) u}{dt^i} \right|^2_{2m-3-i,t} \right) - \tilde{c}_4^{(2)} \sum_{i=0}^{2m-3} \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|^2_{2m-2-i,t},$$

где постоянные $\tilde{c}_3^{(1)} > 0$ и $\tilde{c}_4^{(2)} \geq 0$ не зависят от u и t.

Поскольку в силу условия V дифференцирование по t операторов $\tilde{A}_1(t)$ и $\tilde{A}_m(t)$, взятие их сужений и сужений их производных по t с $\tilde{D}(L_m)$ на $D(L_m)$ и элементарные оценки дают неравенство

$$\left| \mathcal{M}_1(t) \frac{d^i u}{dt^i} \right|^2_{2m-3-i,t} + \left| \mathcal{M}_m(t) \frac{d^i u}{dt^i} \right|^2_{2m-3-i,t} \leq 2 \left| \frac{d^i \mathcal{M}_1(t) u}{dt^i} \right|^2_{2m-3-i,t} + 2 \left| \frac{d^i \mathcal{M}_m(t) u}{dt^i} \right|^2_{2m-3-i,t} +$$

$$+ \ \tilde{c}_4^{(3)} \sum_{i=0}^{2m-3} \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|^2_{2m-2-i,t}, \ \tilde{c}_4^{(3)} \geq 0,$$

то, применяя тождество $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2Re(x,y)$ и неравенство Шварца, убеждаемся в том, что левая часть последнего неравенства не меньше величины

$$2 \left| \frac{d^{i+2} u}{dt^{i+2}} \right|^2_{2m-3-i,t} + \left(|A_1(t) w|^2_{2m-3-i,t} + |A_m(t) w|^2_{2m-3-i,t} \right) \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|^2_{2m-3-i,t} -$$

$$-2 |A_1(t) w + A_m(t) w|_{2m-3-i,t} \left| \frac{d^{i+2} u}{dt^{i+2}} \right|_{2m-3-i,t} \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{2m-1-i,t}, \quad w = \frac{d^i u}{dt^i} \Bigg/ \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{2m-1-i,t}.$$

В свою очередь, согласно δ – неравенству, закючаем, что эта величина не меньше

$$(2-\delta) \left| \frac{d^{i+2} u}{dt^{i+2}} \right|^2_{2m-3-i,t} + \frac{|A_1(t) w|^2_{2m-3-i,t} + |A_m(t) w|^2_{2m-3-i,t}}{\delta} \times$$

$$\times \left(\delta - \frac{|A_1(t) w + A_m(t) w|^2_{2m-3-i,t}}{|A_1(t) w|^2_{2m-3-i,t} + |A_m(t) w|^2_{2m-3-i,t}} \right) \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|^2_{2m-1-i,t}.$$

Поскольку ввиду тождества параллелограмма и неравенств (5)

$$\delta_0 = \sup_w \frac{|A_1(t) w + A_m(t) w|^2_{2m-3-i,t}}{|A_1(t) w|^2_{2m-3-i,t} + |A_m(t) w|^2_{2m-3-i,t}} = 2 - \inf_w \frac{|A_1(t) w - A_m(t) w|^2_{2m-3-i,t}}{|A_1(t) w|^2_{2m-3-i,t} + |A_m(t) w|^2_{2m-3-i,t}} < 2,$$

то можно выбрать δ таким, чтобы $\delta_0 < \delta < 2$. Это позволяет заключить, что существуют не зависящие от u и t постоянные $c_3 > 0$ и $c_4 \geqslant 0$, с которыми выполняются неравенства (19) при m различных множителях $\mathcal{M}_k(t)$, $\ k = \overline{1, m}$. Лемма 3 доказана.

Просуммировав неравенства (17) с учетом оценок (18), применяем в левых частях полученных неравенств оценки (19), а в правых частях — оценки (14), неравенства Шварца и Коши-Буняковского, δ – неравенство и элементарные оценки и находим не зависящие от u и t постоянные $c_5, \ c_6, \ c_7 > 0$ такие, что

$$c_2 c_3 \sum_{i=0}^{2m-1} \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|^2_{2m-1-i,t} \Bigg|_{t=\tau} \leqslant c_5 \int_0^\tau \sum_{i=0}^{2m-1} \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|^2_{2m-1-i,t} dt + c_6 \int_0^\tau |\mathcal{L}_m(t) u|^2 dt +$$
$$+ c_7 \sum_{i=0}^{2m-1} |l_j u|^2_{2m-1-j,0} + c_2 c_4 \sum_{i=0}^{2m-3} \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|^2_{2m-2-i,t} \Bigg|_{t=\tau} \qquad \forall u \in D(L_m). \tag{20}$$

В последней сумме (20) воспользуемся интерполяционными неравенствами (8) и найдем не зависящую от u и t постоянную $c_8>0$ такую, что

$$c_2c_3\sum_{i=0}^{2m-1}\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|^2_{2m-1-i,t}\Bigg|_{t=\tau}\leqslant c_8\int_0^\tau\sum_{i=0}^{2m-1}\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|^2_{2m-1-i,t}dt+$$

$$+c_6\int_0^\tau|\mathcal{L}_m(t)u|^2dt+(c_7+c_1^2c_2c_4)\sum_{j=0}^{2m-1}|l_ju|^2_{2m-1-j,0}\quad\forall u\in D(L_m).$$

К этим неравенствам применим следующую лемму Гроноулла [4].

Лемма 4. *Если v и g — неотрицательные функции на $[0,T]$, причем v интегрируема, а g не убывает, то из неравенства $v(\tau)\leqslant c\int_0^\tau v(t)dt+g(\tau)$ следует неравенство $v(\tau)\leqslant e^{c\tau}g(\tau),\ \tau\in\in[0,T]$.*

В результате получим неравенства

$$c_2c_3\sum_{i=0}^{2m-1}\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|^2_{2m-1-i,t}\Bigg|_{t=\tau}\leqslant e^{c_9\tau}\left(c_6\int_0^\tau|\mathcal{L}_m(t)u|^2dt+(c_7+c_1^2c_2c_4)\sum_{j=0}^{2m-1}|l_ju|^2_{2m-1-j,0}\right),\qquad(21)$$

где $c_9=c_8/c_2c_3$. Взяв в неравенствах (21) верхнюю грань по τ, придем к неравенствам (13) для $\forall u\in D(L_m)$ с постоянными $c_0(m)=\exp(c_9T)\max\{c_6,c_7+c_1^2c_2c_4\}/c_2c_3$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Вообще говоря, если удается вывести энергетические неравенства (13), не требуя заранее включений (12), то условие (12) выполняется. Дело в том, что если при выводе энергетических неравенств (13) вместо интегрирования по t от 0 до τ проинтегрировать по t от $s,\ s<\tau$, до τ и потом еще дополнительно проинтегрировать по s от 0 до T, то для всех функций $u\in D(L_m)$ можно получить неравенства

$$|||u|||^2_{2m-1,2m-1}\ \leqslant\ \tilde{c}_0(m)||u||^2_{2m,2m},\quad\tilde{c}_0(m)>0,\quad m=1,\ 2,\ ...$$

Теперь выведем априорные оценки сильных решений задач Коши (1), (2). Непосредственно из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Если выполняются предположения теоремы 1, то справедливы энергетические неравенства*

$$|||u|||^2_m\leqslant c_0(m)\langle\|\overline{L}_mu\|\rangle^2_m\quad\forall u\in D(\overline{L}_m),\quad m=1,\ 2,\ ...$$

Доказательство. Принимая во внимание замечание 1 делаем вывод о справедливости условия (12) и лемму 2 – о замыкаемости операторов $L_m,\ m=1,\ 2,\ ...$ Поэтому энергетические неравенства (13) предельным переходом распространяются с гладких решений $u\in D(L_m)$ на все сильные решения $u\in D(\overline{L}_m)$ задач Коши (1), (2).

5. Теорема существования решений задач Коши. Из теоремы 1 и ее следствия 1 заключаем, что если сильное решение задач Коши (1), (2) существует, то оно единственно и непрерывно зависит от данных f и $\varphi_j,\ \ 0\le j\le 2m-1$. Разрешимость в сильном смысле задач Коши (1), (2) при $\forall\mathcal{F}\in F^m$ дает

Теорема 2. *Пусть выполняются условия I-VI. Если справедливо условие (7) при $m>1$, то для каждых $f\in\mathcal{H}$ и $\varphi_j\in W^{2m-1-j}(0),\ 0\leqslant j\leqslant 2m-1$, существует сильное решение $u\in E^m$ задач Коши (1), (2).*

Доказательство осуществим индукцией по m. При $m=1$ уравнение $\overline{L}_1u=\mathcal{F}$, в силу неравенств (3) и (4), разрешимо при $\forall\mathcal{F}\in F^1$ [2, 3]. Сделаем предположение индукции о разрешимости уравнений $\overline{L}_{m-1}u=\mathcal{F}$ при $\forall\mathcal{F}\in F^{m-1}$ и любом составе и порядке $m-1$ различных множителей $\mathcal{M}_k(t)$ в $\mathcal{L}_{m-1}(t)$ и докажем разрешимость уравнений $\overline{L}_mu=\mathcal{F}$ при $\forall\mathcal{F}\in F^m,\ m=2,\dots$

Рассмотрим линейные операторы $L_k^{(m,1)} \equiv \{\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t), l_0, \ldots, l_{2m-3}\} : E^{m-1} \supset D(L_{m-1}) \to$ $\to F^{m-1}$ в других пространствах $L_k^{(m,1)} : E^m \supset D(L_m) \to E^{1,m}$, $1 \le k \le m$, где $E^{1,m} =$ $= E^1 \times W^{2m-2}(0) \times \cdots \times W^1(0)$ – банаховы пространства с нормами

$$|||u|||_{1,m} = \left(|||u|||_1^2 + \sum_{j=0}^{2m-3} |l_j u|^2_{2m-2-j,0} \right)^{1/2}.$$

Замыканием $\widehat{L_k^{(m,1)}}$ последних операторов являются сужения замыкания первых $\overline{L_k^{(m,1)}}$ на E^m, т.е. $\widehat{L_k^{(m,1)}} = \overline{L_k^{(m,1)}}|_{E^m}$, так как $\widehat{L_k^{(m,1)}} \subset \overline{L_k^{(m,1)}}$ и операторы $L_k^{(m,1)} : E^m \supset D(L_m) \to E^{1,m}$, $1 \le$ $\le k \le m$, – непрерывны. Рассмотрим еще линейные операторы $M_k = \{\mathcal{M}_k(t), A_1^{-1/2}(0), \ldots,$ $A_1^{-1/2}(0), l_0, l_1\} : E^{1,m} \supset D(L_1) \times W^{2m-2}(0) \times \cdots \times W^1(0) \to F^m$, замыкания которых $\overline{M}_k$, согласно [2, 3], имеют ограниченные обратные $\overline{M}_k^{-1} : F^m \to E^{1,m}$, $1 \le k \le m$. В силу оценок (14) решения уравнений $\overline{L}_m u = \mathcal{F}$ при $\mathcal{F} \in F^m$ являются одновременно решениями уравнений $\overline{M_k L_k^{(m,1)}} u = \mathcal{F}_k$ при $\mathcal{F}_k = \mathcal{F} + \{[\mathcal{M}_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t) - \mathcal{L}_m(t)]u, 0, ..., 0\} \in F^m, 1 \leqslant k \leqslant m$. Справедлива

Лемма 5. *Пусть X, Y и Z – банаховы пространства. Если $S : X \to Y$ – линейный оператор, замыкаемый по непрерывности до ограниченного $\overline{S}$, и $P : Y \to Z$ – линейный оператор, допускающий замыкание $\overline{P}$, то их произведение $P \cdot S : X \to Z$ допускает замыкание* $\overline{P \cdot S}$ и $\overline{P \cdot S} \subset \overline{P} \cdot \overline{S}$.

Доказательство. Согласно критерия замыкаемости линейных операторов в банаховых пространствах для доказательства замыкаемости произведения $P \cdot S$ в $X \times Z$ покажем, что если $u_n \in D(P \cdot S)$, $u_n \to 0$ в X и $(P \cdot S)u_n = P(Su_n) \to g$ в Z при $n \to \infty$, то $g =$ 0. Из предположений этого критерия имеем, что $v_n = Su_n \in D(P)$, $v_n \to 0$ в Y в силу ограниченности оператора $\overline{S}$ и $Pv_n \to g$ в Z при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $g = 0$, потому что оператор P допускает замыкание в $Y \times Z$.

Осталось доказать алгебраическое вложение $\overline{P \cdot S} \subset \overline{P} \cdot \overline{S}$. Пусть $(\overline{P \cdot S})u = g$, т.е. существуют $u_n \in D(P \cdot S)$, что $u_n \to u$ в X и $(P \cdot S)u_n \to g$ в Z при $n \to \infty$. Тогда очевидно, что $v_n = Su_n \in D(P)$, $v_n \to \overline{S}u$ в Y в силу ограниченности оператора $\overline{S}$ и $Pv_n \to g$ в Z при $n \to \infty$. Отсюда заключаем, что $\overline{S}u \in D(\overline{P})$ и $(\overline{P} \cdot \overline{S})u = g$. Лемма 5 доказана.

Применение леммы 5 к операторам $S = L_k^{(m,1)}$ и $P = M_k$ в пространствах $X = E^m, Y =$ $= E^{1,m}$ и $Z = F^m$ дает вложения $\overline{M_k L_k^{(m,1)}} \subset \overline{M}_k \overline{L_k^{(m,1)}}$, $1 \le k \le m$. Отсюда заключаем, что уравнения $\overline{M_k L_k^{(m,1)}} u = \mathcal{F}_k$ для $\forall u \in D(\overline{L}_m)$ можно записать в виде уравнений $\overline{M}_k \overline{L_k^{(m,1)}} u =$ $= \mathcal{F}_k$, $1 \le k \le m$. Благодаря [2, 3], вторые уравнения при $\forall \mathcal{F}_k \in F^m$ имеют решения $\overline{L_k^{(m,1)}} u =$ $= \overline{M}_k^{-1} \mathcal{F}_k \in E^{1,m}$, а по предположению индукции последние уравнения имеют решения $u =$ $= \overline{L_k^{(m,1)}}^{-1} \overline{M}_k^{-1} \mathcal{F}_k \in E^{m-1}$, где $\overline{L_k^{(m,1)}}^{-1}$ – обратные операторов $\overline{L_k^{(m,1)}}$, $1 \le k \le m$. Осталось доказать, что решение $u \in E^m$.

Покажем, что гладкость этого решения $u \in E^{m-1}$ повышается на единицу за счет повышения на единицу гладкости правых частей $\overline{M}_k^{-1} \mathcal{F}_k \in E^{1,m}$ вместо $\overline{M}_k^{-1} \mathcal{F}_k \in F^{m-1}$, $1 \le$ $\le k \le m$. Из леммы 3 с помощью лемм 1 и 4 для $\forall u \in D(L_m)$ выводятся неравенства

$$c_{10} |||u|||_m^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} |||L_k^{(m,1)} u|||^2_{1,m}, \quad c_{10} > 0,$$

которые предельным переходом распространяются на все функции $u \in E^m$ областей определения замыкания $\widehat{L_k^{(m,1)}}$. Эти неравенства означают, что операторы $\overline{L_k^{(m,1)}}$ гомеоморфно отображают пространство E^m на множество их значений $R(\widehat{L_m^{(m,1)}})$, наделенное нормой пространства $E^{1,m}$. Для завершения доказательства остается показать, что множество $R(\widehat{L_m^{(m,1)}}) = E^{1,m}$. В свою очередь, для этого достаточно убедиться в том, что для любой правой части Φ_k из множества, плотного в $E^{1,m}$, уравнения $\overline{L_k^{(m,1)}}v = \Phi_k,\ 1 \le k \le m$, имеют решения $v \in E^m$. В силу оценок (14) при $m-1$ вместо m решения $v \in E^{m-1}$ уравнений $\overline{L_k^{(m,1)}}v = \Phi_k \in F^{m-1}$ являются одновременно решениями уравнений $\overline{L_{m-2}^{(k)}M_{k-1}}v = \tilde{\Phi}_{k-1}$, где $L_{m-2}^{(k)} = L_k^{(m,k)}L_{k-1}^{(k-1,1)}$ и $\tilde{\Phi}_{k-1} = \Phi_k + \{[\mathcal{L}_k^{(m,k)}(t)\mathcal{L}_{k-1}^{(k-1,1)}(t)\mathcal{M}_{k-1}(t) - \mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)]v, 0, ..., 0\} \in F^{m-1}$, при $2 \leqslant k \leqslant m$ и уравнения $\overline{L_{m-2}^{(1)}M_m}v = \tilde{\Phi}_m$, где $L_{m-2}^{(1)} = L_m^{(m,2)}$ и $\tilde{\Phi}_m = \Phi_1 + \{[\mathcal{L}_m^{(m,2)}(t)\mathcal{M}_m(t) - \mathcal{L}_1^{(m,1)}(t)]v, 0, ..., 0\} \in F^{m-1}$, при $k = 1$. Ниже повышение гладкости решений операторов $\widehat{L_k^{(m,1)}}$ будет получено за счет повышения гладкости решений операторов $\overline{M}_k,\ 1 \le k \le m$.

Пусть гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}}^{2,2}$ – множество $D(L_1)$, наделенное эрмитовой нормой

$$\langle |u| \rangle_{2,2} = (||d^2u/dt^2||_0^2 + ||du/dt||_0^2 + ||u||_2^2)^{1/2}.$$

В дальнейшем для сокращения записи введем обозначения $\mathcal{M}_0(t) = \mathcal{M}_m(t),\ M_0 = M_m$ и $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{\Phi}_m$. Если функция $v \in E^{m-1}$ – решение уравнений $\overline{L_{m-2}^{(k)}M_{k-1}}v = \tilde{\Phi}_{k-1}$ при $\tilde{\Phi}_{k-1} \in F^{2,m} = \tilde{\mathcal{H}}^{2,2} \times W^{2m-1}(0) \times \dots \times W^2(0)$, то $M_k\overline{L_{m-2}^{(k)}M_{k-1}}v = M_k\tilde{\Phi}_{k-1} \in F^m$, где линейные операторы $M_k \equiv \{\mathcal{M}_k(t), I, \dots, I, l_0, l_1\} : F^{2,m} \to F^m,\ 1 \le k \le m$, ограничены. Справедлива

Лемма 6. *Пусть X, Y и Z – банаховы пространства. Если $P : X \to Y$ – линейный оператор, допускающий замыкание $\overline{P}$, $S : Y \to Z$ – линейный ограниченный оператор и их произведение $S \cdot P : X \to Z$ допускает замыкание $\overline{S \cdot P}$, то $S \cdot \overline{P} \subset \overline{S \cdot P}$.*

Доказательство. Пусть $(S \cdot \overline{P})u = g$. Тогда $u \in D(\overline{P})$, т.е. существуют $u_n \in D(P),\ u_n \to u$ в X и $Pu_n \to \overline{P}u$ в Y при $n \to \infty$. Ограниченность оператора S дает $S(Pu_n) \to S(\overline{P}u)$ в Z при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $u_n \in D(S \cdot P),\ u_n \to u$ в X и $S(Pu_n) = (S \cdot P)u_n \to g$ в Z при $n \to \infty$, т.е. $u \in D(\overline{S \cdot P})$ и $(\overline{S \cdot P})u = g$. Лемма 6 доказана.

Применение леммы 6 к операторам $P = L_{m-2}^{(k)}M_{k-1}$ и $S = M_k$ в пространствах $X = E^m,\ Y = F^{2,m}$ и $Z = F^m$ дает вложения

$$M_k\overline{L_{m-2}^{(k)}M_{k-1}} \subset \overline{M_k(L_{m-2}^{(k)}M_{k-1})}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{22}$$

Применяя лемму 5 к операторам $S = M_{k-1} \equiv \{\mathcal{M}_{k-1}(t), l_0, l_1\} : E^m \supset D(L_m) \to E^{m-1} \times W^{2m-2}(0) \times W^{2m-3}(0)$ и $P = M_kL_{m-2}^{(k)} \equiv \{\mathcal{M}_k(t)\mathcal{L}_{m-2}^{(k)}(t), A_1^{-1/2}(0), A_1^{-1/2}(0), l_0, \dots, l_{2m-3}\} : E^{m-1} \times W^{2m-2}(0) \times W^{2m-3}(0) \supset D(L_{m-1}) \times W^{2m-2}(0) \times W^{2m-3}(0) \to F^m$, где $\mathcal{L}_{m-2}^{(k)}(t)$ – – первые координаты-операторы векторов-операторов $L_{m-2}^{(k)}$, получаем вложения

$$\overline{(M_kL_{m-2}^{(k)})M_{k-1}} \subset \overline{M_kL_{m-2}^{(k)}}\,\overline{M_{k-1}}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{23}$$

Из вложений (22) и (23) следуют уравнения $\overline{M_kL_{m-2}^{(k)}}\,\overline{M_{k-1}}v = M_k\tilde{\Phi}_{k-1},\ 1 \le k \le m$, которые при $n = k-1$ по предположению индукции имеют решения $\overline{\mathcal{M}_n(t)}v \in E^{m-1}, 1 \leqslant n \leqslant m$. Справедлива следующая

Лемма 7. *Если выполняются предположения теоремы 1, то существуют не зависящие от v и t постоянные $c_{11} > 0$ и $c_{12} \geqslant 0$ такие, что для $\forall v \in D(L_m)$ и $\forall t \in [0, T]$*

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{2m-3}\left|\frac{d^i\mathcal{M}_k(t)v}{dt^i}\right|_{2m-3-i,t}^2 \geqslant c_{11}\sum_{i=0}^{2m-1}\left|\frac{d^iv}{dt^i}\right|_{2m-1-i,t}^2 - c_{12}\sum_{i=0}^{2m-3}\left|\frac{d^iv}{dt^i}\right|_{2m-2-i,t}^2, \ m = 2,\ 3,\ \dots \tag{24}$$

Доказательство леммы 7 индукцией по m аналогично доказательству леммы 3.

Применяя леммы 1 и 4, из неравенств (24) выводятся неравенства

$$c_{13}|||v|||_m^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} |||\mathcal{M}_k(t)v|||_{m-1}^2 + \sum_{j=0}^{2m-3} |l_j v|_{2m-2-j,0}, \quad c_{13} > 0.$$

Эти неравенства предельным переходом распространяем с решений $v \in D(L_m)$ на решения искомых уравнений с правыми частями $M_k\tilde{\Phi}_{k-1}$, для которых значения замыкания $\overline{\mathcal{M}_k(t)}v \in E^{m-1}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и заключаем, что $v \in E^m$, так как уже $v \in E^{m-1}$. Таким образом, ранее найденное решение $u \in E^{m-1}$ исходного уравнения с правой частью $\forall \mathcal{F} \in F^m$ действительно принадлежит пространству E^m, $m = 2, \ldots$

Попутно, отсюда индукцией по m находим, что

$$u = \overline{L}_m^{-1}\mathcal{F} = \overline{M}_1^{-1} \cdots \overline{M}_m^{-1}\mathcal{F} \in E^m \;\; \forall \mathcal{F} \in F^m, \; m = 1, \; 2, \ldots \tag{25}$$

Замечание 2. Тем же способом утверждение теоремы 1 и следствия 1 (возможно, с большими постоянными $c_0(m)$) и методом продолжения по параметру утверждение теоремы 2 распространяются на уравнения с младшими членами

$$\mathcal{L}_m(t)u + \sum_{k=0}^{2m-1} B_k(t)\frac{d^k u}{dt^k} = f, \; t \in]0, T[, \; m = 1, \; 2, \; \ldots, \tag{26}$$

если $B_k(t) \in \mathcal{B}([0,T], \mathfrak{L}(W^{2m-1-k}(t), H))$, $0 \leqslant k \leqslant 2m-1$. Младшие члены уравнений (26) стоит рассматривать не столько, как дополнительные слагаемые, которые подчинены главным членам этих уравнений, а сколько, как остаток факторизации произвольных квазигиперболических дифференциально-операторных уравнений четных порядков, т.е. как слагаемые, которые остаются после приведения квазигиперболических дифференциально-операторных уравнений четных порядков к своему факторизованному (дивергентному) виду (1).

Замечание 3. Анализ доказательств теорем 1, ее следствия 1 и теоремы 2 показывает, что если все операторы $\tilde{A}_k(t) = \tilde{A}_k$ не зависят от t и коммутируют друг с другом, то отпадает необходимость в интерполяционных неравенствах (8) и, следовательно, в этих теоремах и следствии достаточное условие (7) при $m > 1$ становится лишним, если даже области определения $D(A_k(t))$ их сужений $A_k(t)$ зависят от t. Отметим, что это условие, как правило, выполняется даже тогда, когда все $\tilde{A}_k(t)$ гладко зависят от t и не коммутируют друг с другом, но зато области определения $D(A_k(t)) = D(A_k)$ операторов $A_k(t)$ не зависят от t [1], т.е. когда $A_k(t) = \tilde{A}_k(t)$. Между прочим, в [1] на такие переменные операторы $A_k(t)$ с постоянными областями определения $D(A_k)$ налагается более жесткое ограничение $dA^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T], \mathfrak{L}(H, W^{2m}(0)))$ при всех $m \geq 1$.

6. Пример смешанных задач. В ограниченной области $G =]0,T[\times]0,l[$ переменных t и x рассмотрим смешанные задачи: дифференциальные уравнения

$$(\partial^2/\partial t^2 - a_m^2\partial^2/\partial x^2) \cdots (\partial^2/\partial t^2 - a_1^2\partial^2/\partial x^2)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in G, \tag{27}$$

где постоянные $a_k > 0$ различны и $a_1 = 1$; с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\partial^{2i+1}u(t,0)/\partial x^{2i+1} - \beta(t)\partial^{2i}u(t,0)/\partial x^{2i} = 0, \\ &\partial^{2i+1}u(t,l)/\partial x^{2i+1} + \tilde{\beta}(t)\partial^{2i}u(t,l)/\partial x^{2i} = 0, \quad t \in [0,T], \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1, \end{aligned} \tag{28}$$

где неотрицательные функции $\beta(t), \tilde{\beta}(t) \geqslant 0$ одновременно не обращаются в нуль $\beta(t) + \tilde{\beta}(t) \neq 0 \;\; \forall t \in [0,T]$ и по t дважды непрерывно дифференцируемые $\beta(t), \tilde{\beta}(t) \in C^{(2)}[0,T]$; и с начальными условиями

$$\partial^j u(0,x)/\partial t^j = \varphi_j(x), \quad x \in]0,l[, \quad 0 \leqslant j \leqslant 2m-1, \quad m = 1, \; 2, \; \ldots \tag{29}$$

Покажем, что, принимая во внимание замечание 3, в гильбертовом пространстве $H = L_2(0,l)$ дифференциальные операторы $A_k(t)$, полученные сужением дифференциальных выражений $\tilde{A}_k u(t,x) = -a_k^2 \partial^2 u(t,x)/\partial x^2, \ \ t \in [0,T]$, на области определения

$$D(A_k(t)) = \{u \in L_2(0,l) : u(x) \in (26) \ \ \textit{при} \ \ m=1; \ \tilde{A}_k(t)u(x) \in L_2(0,l)\}, \ t \in [0,T],$$

удовлетворяют достаточным предположениям теорем 1 и 2. Операторы $A_1(t), \ t \in [0,T]$, самосопряжены в $L_2(0,l)$, так как они очевидно симметричны в $L_2(0,l)$ и на $L_2(0,l)$ имеют ограниченные обратные

$$A_1^{-1}(t)g = -\int_0^x (x-s)g(s)ds + \mathcal{A}_1(t)\int_0^l g(s)ds + \mathcal{B}_1(t)x\int_0^l g(s)ds +$$
$$+\mathcal{C}_1(t)\int_0^l (l-s)g(s)ds + \mathcal{D}_1(t)x\int_0^l (l-s)g(s)ds,$$

где $\mathcal{A}_1(t) = 1/(\beta + \tilde{\beta} + l\beta\tilde{\beta}), \ \mathcal{B}_1(t) = \beta\mathcal{A}_1(t), \ \mathcal{C}_1(t) = \tilde{\beta}\mathcal{A}_1(t), \ \mathcal{D}_1(t) = \beta\tilde{\beta}\mathcal{A}_1(t)$. Они очевидно положительны в $L_2(0,l)$. Их ограниченность в $L_2(0,l)$ следует из неравенств

$$||A_1^{-1}(t)g||_{0,\Omega}^2 \leqslant c_{13}||g||_{0,\Omega}^2 \quad \forall g \in L_2(0,l), \ t \in [0,T],$$

где $||\cdot||_{0,\Omega}$ – норма в $L_2(\Omega), \ \Omega =]0,l[$, и $c_{13} = l^2 \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}[l^2 + 3(1+l\beta)^2\mathcal{A}_1^2(t) + l^2(1+l\beta)^2\mathcal{C}_1^2(t)]$.

Операторы $A_1^{-1}(t), \ t \in [0,T]$, имеют в $L_2(0,l)$ сильную производную

$$\frac{dA_1^{-1}(t)}{dt}g = \dot{\mathcal{A}}_1(t)\int_0^l g(s)ds + \dot{\mathcal{B}}_1(t)x\int_0^l g(s)ds + \dot{\mathcal{C}}_1(t)\int_0^l (l-s)g(s)ds + \dot{\mathcal{D}}_1(t)x\int_0^l (l-s)g(s)ds,$$

где точками над функциями обозначены первые производные по t данных функций. Эта сильная производная является ограниченным оператором в $L_2(0,l)$, так как при всех $t \in [0,T]$

$$||(dA_1^{-1}(t)/dt)g||_{0,\Omega}^2 \leqslant c_{14}||g||_{0,\Omega}^2 \quad \forall g \in L_2(0,l), \quad t \in [0,T[,$$

где

$$c_{14} = 4l^2 \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left[\dot{\mathcal{A}}_1^2(t) + \frac{l^2}{3}\dot{\mathcal{B}}_1^2(t) + \frac{l^2}{3}\dot{\mathcal{C}}_1^2(t) + \frac{l^4}{9}\dot{\mathcal{D}}_1^2(t)\right],$$

и удовлетворяет неравенствам (3), потому что

$$-((dA_1^{-1}(t)/dt)A_1(t)u, A_1(t)u)_{0,\Omega} \leqslant c_{15}||A_1^{1/2}(t)u||_{0,\Omega}^2 \quad \forall u \in D(A_1(t)), \quad t \in [0,T],$$

где $(\cdot,\cdot)_{0,\Omega}$ – скалярное произведение в $L_2(0,l)$ и

$$c_{15} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\{\,(2|\dot{\mathcal{A}}_1(t)| + \sqrt{l}(1+l)|\dot{\mathcal{B}}_1(t)| + \sqrt{l}|\dot{\mathcal{C}}_1(t)| + l^2|\dot{\mathcal{D}}_1(t)|)(1+\tilde{\beta}),$$
$$(2|\dot{\mathcal{A}}_1(t)| + \sqrt{l}|\dot{\mathcal{B}}_1(t)| + \sqrt{l}(1+l)|\dot{\mathcal{C}}_1(t)| + l^2|\dot{\mathcal{D}}_1(t)|)(1+\beta), \sqrt{l}|\dot{\mathcal{B}}_1(t)| + \sqrt{l}|\dot{\mathcal{C}}_1(t)| + 2l|\dot{\mathcal{D}}_1(t)|\,\}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\left|\left|A_1^{1/2}(t)u\right|\right|_{0,\Omega}^2 = \frac{1}{1+\tilde{\beta}(t)}\left(\left|\frac{\partial u(t,l)}{\partial x}\right|^2 + \tilde{\beta}(t)|u(t,l)|^2\right) +$$
$$+\frac{1}{1+\beta(t)}\left(\left|\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}\right|^2 + \beta(t)|u(t,0)|^2\right) + \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right|_{0,\Omega}^2, \quad t \in [0,T]. \tag{30}$$

Операторы $dA_1^{-1}(t)/dt$ при всех $t\in[0,T]$ имеют в $L_2(0,l)$ сильную производную

$$\frac{d^2A_1^{-1}(t)}{dt^2}g=\ddot{\mathcal{A}}_1(t)\int_0^l g(s)ds+\ddot{\mathcal{B}}_1(t)x\int_0^l g(s)ds+$$
$$+\ddot{\mathcal{C}}_1(t)\int_0^l (l-s)g(s)ds+\ddot{\mathcal{D}}_1(t)x\int_0^l (l-s)g(s)ds,$$

ограниченную в $L_2(0,l)$, потому что при всех $t\in[0,T]$

$$\big|\big|(d^2A_1^{-1}(t)/dt^2)g\big|\big|^2_{0,\Omega}\leqslant c_{16}||g||^2_{0,\Omega}\quad \forall g\in L_2(0,l),$$

где постоянная c_{16} получается из постоянной c_{14} заменой функций с одной точкой на те же функции с двумя точками, которые означают их вторые производные по t. Операторы $d^2A_1^{-1}(t)/dt^2$ удовлетворяют неравенствам (4), так как при всех $t\in[0,T]$

$$\Big|\big(\big(d^2A_1^{-1}(t)/dt^2\big)\,g,A_1(t)u\big)_{0,\Omega}\Big|\leqslant c_{17}||g||_{0,\Omega}||A_1^{1/2}(t)u||_{0,\Omega}\quad\forall g\in L_2(0,l),\quad \forall u\in D(A_1(t)),$$

где

$$c_{17}=\sqrt{l}\sup_{0<t<T}\Big\{(\sqrt{3}|\ddot{\mathcal{A}}_1(t)|+l|\ddot{\mathcal{C}}_1(t)|+\sqrt{3}\,l|\ddot{\mathcal{B}}_1(t)|+l^2|\ddot{\mathcal{D}}_1(t)|)\sqrt{1+\tilde\beta},$$
$$(\sqrt{3}|\ddot{\mathcal{A}}_1(t)|+l|\ddot{\mathcal{C}}_1(t)|)\sqrt{1+\beta},\sqrt{3}\,l|\ddot{\mathcal{B}}_1(t)|+l^{3/2}|\ddot{\mathcal{D}}_1(t)|\Big\}.$$

Операторы $A_k(t),\ t\in[0,T]$, очевидно удовлетворяют и условиям IV-VI. Причем банаховыми пространствами V^{2k} являются пространства Соболева $W_2^{2k}(0,l)$ со своими обычными нормами $||\cdot||_{2k,\Omega},\ 0\leqslant k\leqslant m,\ V^2=D(\tilde A_1),\ V^0=L_2(0,l)$. Гильбертовыми пространствами $W^{2k}(t)$ являются замкнутые подпространства $W^{2k}_{2,\Delta(t)}(0,l)$ пространств Соболева $W_2^{2k}(0,l)$ а именно: множества $\{u\in W_2^{2k}(0,l):u\in(28),\quad t\in[0,T],\quad 0\leqslant i\leqslant k-1\}$, наделенные индуцированными эрмитовыми нормами $||\cdot||_{2k,t,\Omega}$ из $W_2^{2k}(0,l),\ 1\leqslant k\leqslant m$. Гильбертовыми пространствами $W^{2k+1}(t),\ t\in[0,T]$, являются пространства $W^{2k+1}_{2,\Delta(t)}(0,l)$ – замыкания множеств $\{u\in W_2^{2k+2}(0,l):u\in(28),\ t\in[0,T],\quad 0\leqslant i\leqslant k\}$ по эрмитовым нормам $||u(t,x)||_{2k+1,t,\Omega}=||A_1^{1/2}(t)\partial^{2k}u(t,x)/\partial x^{2k}||_{0,\Omega},\quad 0\leqslant k\leqslant m-1$. Аналогично определяются гильбертовы пространства $W^\alpha(t),\ t\in[0,T]$, для нецелых $\alpha\in]0,2m[$.

Для смешанных задач (27)-(29) в качестве банаховых пространств $\mathcal{E}^m(G)$ их сильных решений возьмем замыкания пересечений замкнутых подпространств пространств Соболева-Слободецкого $\mathcal{D}(L_m)=\{u\in\tilde{\mathcal{D}}(L_m):u\in(28)\}$, где

$$\tilde{\mathcal{D}}(L_m)=\Bigg\{u\in\bigcap_{i=0}^{2m}W_2^{i,2m-2[(i+1)/2]}(G):v_s\equiv\frac{\partial^{2m-2-2[(s+1)/2]+s}u}{\partial t^s\partial x^{2m-2-2[(s+1)/2]}},$$
$$\partial v_s(t,0)/\partial x-\beta(t)v_s(t,0)=\partial v_s(t,l)/\partial x+\tilde\beta(t)v_s(t,l)=0,\quad t\in[0,T],\quad 0\leqslant s\leqslant 2m-2\Bigg\},$$

по нормам

$$|||u(t,x)|||_m=\left\{\sup_{0<t<T}\sum_{i=0}^{2m-1}\left|\left|\frac{\partial^i u(t,x)}{\partial t^i}\right|\right|^2_{2m-1-i,t,\Omega}\right\}^{1/2}.$$

Для смешанных задач (27)-(29) в качестве пространств правых частей $f(t,x)$ и начальных данных $\varphi_j(x)$ возьмем гильбертовы пространства $\mathcal{F}^m(G)=L_2(G)\times W^{2m-1}_{2,\Delta(0)}(0,l)\times\cdots\times L_2(0,l)$ функций $\mathcal{F}(t,x)=\{f(t,x),\varphi_0(x),\ldots,\varphi_{2m-1}(x)\}$ с эрмитовыми нормами

$$\langle\|\mathcal{F}(t,x)\|\rangle_m=\left\{\int_0^T||f(t,x)||^2_{0,\Omega}dt+\sum_{j=0}^{2m-1}||\varphi_j||^2_{2m-1-j,0,\Omega}\right\}^{1/2},$$

где, как и выше, гильбертовы пространства $W^s_{2,\Delta(0)}(0,l)$ – замыкания множеств всех функций $u(x)$ из пространств Соболева $W_2^{2[(s+1)/2]}(0,l)$, удовлетворяющих условиям (28) при $t=0$ и $0 \leqslant i \leqslant [(s+1)/2]$, по эрмитовым нормам

$$||u(x)||_{s,0,\Omega} = ||A_1^{(s-2[s/2])/2}(0)\partial^{2[s/2]}u(x)/\partial x^{2[s/2]}||_{0,\Omega}, \quad 1 \leqslant s \leqslant 2m-1.$$

Принимая во внимание замечание 3 о том, что в случае постоянных коэффициентов a_k отпадает необходимость в условии (7) при $m>1$, из абстрактных теоремы 1, ее следствия 1 и теоремы 2 получаем следующую теорему существования, единственности и непрерывной зависимости от правых частей уравнений и начальных данных сильных решений задач (27)-(29).

Теорема 3. *При сделанных предположениях на коэффициенты β и $\tilde\beta$ для каждых $f(t,x) \in L_2(G)$ и $\varphi_j(x) \in W^{2m-1-j}_{2,\Delta(0)}(0,l)$, $0 \leqslant j \leqslant 2m-1$, смешанные задачи (27)-(29) имеют единственное сильное решение $u(t,x) \in C^{(2m-1)}([0,T],L_2(0,l)) \bigcap \mathcal{E}^m(G)$, удовлетворяющее неравенствам*

$$|||u(t,x)|||^2_m \leqslant c_0(m)\langle\|\mathcal{F}(t,x)\|\rangle^2_m,\ \mathcal{F}(t,x) = \{f(t,x),\varphi_0(x),\dots,\varphi_{2m-1}(x)\},\ m=1,\ 2,\ \dots \quad (31)$$

Отметим, что теорема 3 анонсирована в [8].

Замечание 4. В данных смешанных задачах требование того, что функции β и $\tilde\beta$ одновременно не обращаются в нуль ни при каком $t \in [0,T]$, не является принципиальным и обусловлено лишь тем, чтобы обратные операторы $A_1^{-1}(t)$ были ограниченными в $L_2(0,l)$ для упрощения проверки предположений теорем 1 и 2 и следствия 1. Если в доказательстве теоремы 3 вместо $A_1^{-1}(t)$ взять $(A_1(t)+\delta_1 I)^{-1}$, $\delta_1>0$, то в этом случае функции β и $\tilde\beta$ смогут одновременно обращаться в нуль и при этом утверждение теоремы 3 для смешанных задач (27)-(29) останется в силе.

6. Проблемы задач Коши. В гильбертовом пространстве $H=L_2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, условию (7) при $m>1$ из теорем 1 и 2 удовлетворяют дифференциальные операторы

$$A(t) = (I-\Delta_x)^{p(t)},\ p(t) > n/2,\ p(t) \in C^{(1)}[0,T],$$

где Δ_x – оператор Лапласа по $x=(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ с зависящими от t областями определения

$$D(A(t)) = \left\{u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n) : (I-\Delta_x)^{p(t)}u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)\right\}, \quad t \in [0,T].$$

Здесь частные производные дробных порядков и дробные степени данных операторов $A(t)$ при построении пространств $W^\alpha(t)$ определяются выражениями

$$A^{\alpha/(2m)}(t)u = F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t)\alpha/(2m)}F[u]], \quad \alpha>0, \quad \forall u \in D(A^{\alpha/(2m)}(t)),$$
$$A^{-\alpha/(2m)}(t)g = F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)\alpha/(2m)}] * g, \quad \alpha>0, \quad \forall g \in L_2(\mathbb{R}^n),$$

где F и F^{-1} – прямое и обратное интегральные преобразования Фурье-Планшереля и $*$ – символ свертки функций. С помощью свойств интегральных преобразований Фурье-Планшереля убеждаемся в том, что $A^{1-1/(2m)}(t)(dA^{-1}(t)/dt) \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n)))$ при $m>1$, так как для $\forall t$

$$\left\|A^{1-1/(2m)}(t)\left(dA^{-1}(t)/dt\right)g\right\|^2 = (p'(t))^2\left\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)/(2m)}\ln(1+|\xi|^2)F[g]]\right\|^2 \leq$$

$$\leq \frac{(p'(t))^2}{(\rho e)^2(2\pi)^n}\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)/(2m)+\rho}F[g]\|^2 \leq \frac{(p'(t))^2}{(\rho e)^2(2\pi)^n}\|F[g]\|^2 = \frac{(p'(t))^2}{(\rho e)^2}\|g\|^2 \qquad \forall g \in L_2(\mathbb{R}^n),$$

если удовлетворяющий оценке $\ln z \ \leq (1/\rho e) z^\rho \quad \forall z \geq 1$ параметр $0 < \rho \leq \min\limits_{[0,T]} p(t)/(2m)$.

К сожалению, условию (7) при $m > 1$, которое обеспечивает интерполяционные неравенства (8), редко удовлетворяют эллиптические дифференциальные операторы $A_1(t)$ с зависящими от t коэффициентами в граничных условиях. Покажем, что оно не выполняется для операторов $A_1(t)$ из смешанных задач (27)-(29) при $m = 2$. Для них это условие при $m = 2$ равносильно условию $A_1^{3/2}(t)(dA_1^{-2}(t)/dt) \in \mathcal{B}([0,T], \mathfrak{L}(L_2(0,l)))$, которое не всегда выполняется. В правой части равенства

$$A_1^{3/2}(t)\frac{dA_1^{-2}(t)}{dt} = A_1^{1/2}(t)\frac{dA_1^{-1}(t)}{dt} + A_1^{3/2}(t)\frac{dA_1^{-1}(t)}{dt}A_1^{-1}(t) \tag{32}$$

слагаемые могут не быть ограниченными операторами, если, по крайней мере, один из коэффициентов $\beta(t)$ или $\tilde{\beta}(t)$ зависит от t, так как в этом случае производная $dA_1^{-1}(t)/dt$ может "терять" граничные условия, необходимые для квадратного корня $A_1^{1/2}(t)$. Если в (28) при $m = 1$ в некоторой открытой окрестности V_0 точки t_0 коэффициенты $\beta(t)$ и $\tilde{\beta}(t)$ обращаются в ноль, то хорошо известно, что при $t \in V_0$ граничные условия $\partial v(x)/\partial x|_{x=0} = 0$ и $\partial v(x)/\partial x|_{x=l} = 0$ "держатся" не всеми функциями $v(x) \in D(A_1^{1/2}(t))$ из областей определения операторов $A_1^{1/2}(t)$, потому что в этом случае норма их графика эквивалентна норме пространства Соболева $W_2^1(0,l)$ (см. (28) и (30)). Однако, если $\exists t_0 \in [0,T]$, что $\beta(t_0) \neq 0$ и $\tilde{\beta}(t_0) \neq 0$, то в силу их непрерывности $\beta(t), \tilde{\beta}(t) \in C[0,T]$ существует окрестность V_0 этой точки t_0, где $\beta(t) \neq 0$ и $\tilde{\beta}(t) \neq 0 \ \forall t \in V_0$. Тогда из формулы нормы графика операторов $A_1^{1/2}(t)$, первого граничного условия (28) при $m = 1$ и формулы (30) их нормы $\|A_1^{1/2}(t)\cdot\|$ видим, что при каждом $t \in V_0$ функции $v(x) \in D(A_1^{1/2}(t))$ являются непрерывными по x ($v(x) \in C[0,l]$), $\partial v(x)/\partial x \in L_2(0,l)$ и их производная $\partial v(x)/\partial x$ имеет след при $x = 0$ в обобщенном смысле, как предел $\partial v(x)/\partial x|_{x=0} = \lim\limits_{n\to\infty} \partial v_n(x)/\partial x|_{x=0} = \beta(t) \lim\limits_{n\to\infty} v_n(x)|_{x=0} = \beta(t)v(0)$ в $\mathbb{R}$ некоторых функций $v_n(x) \in D(A_1(t)) = \{w \in W_2^2(0,l) : w \in (28) \text{ при } m = 1\}$ по определению квадратного корня $A_1^{1/2}(t)$. Тоже самое справедливо для следа $\partial v(x)/\partial x|_{x=l}$ всех функций $v(x) \in D(A_1^{1/2}(t))$, $t \in V_0$. Таким образом, в этом смысле при каждом $t \in V_0$ граничные условия

$$[\partial v(x)/\partial x - \beta(t)v(x)]|_{x=0} = 0, \ [\partial v(x)/\partial x + \tilde{\beta}(t)v(x)]|_{x=l} = 0$$

"сохраняются" для всех функций $v(x) \in D(A_1^{1/2}(t))$, в то время как они могут "теряться" производной $dA_1^{-1}(t)/dt$ при зависящих от $t \in V_0$ коэффициентах $\beta(t)$ и (или) $\tilde{\beta}(t)$. Действительно, если, например, $\beta(t) = t$, $\tilde{\beta}(t) = 1$ и $l = 1$, то для функций

$$v(x) = \frac{dA_1^{-1}(t)}{dt}\, g = \frac{x-2}{(2t+1)^2}\int_0^1 (2-s)g(s)ds \quad \forall g \in L_2(0,1)$$

(зависящее от t) первое граничное условие

$$[\partial v(x)/\partial x - tv(x)]|_{x=0} = \frac{1}{2t+1}\int_0^1 (2-s)g(s)ds = 0 \quad \forall t > 0,$$

не выполняется, например, при $g(x) = 1$. Поэтому для таких $\beta(t)$, $\tilde{\beta}(t)$ и l в правой части равенства (32) первое и, тем более, второе произведения операторов не могут быть ограниченными в $L_2(0,l)$ и, кроме того, "взаимная компенсация" этого недостатка в результате сложения невозможна. Отметим, что при этих $\beta(t) = t$, $\tilde{\beta}(t) = 1$ и $l = 1$ для функций $v(x) = (dA_1^{-1}(t)/dt)g$ (не зависящее от t) второе граничное условие $[\partial v(x)/\partial x + v(x)]|_{x=1} = 0$, $t \in [0,T]$, выполняется для всех $g \in L_2(0,1)$. Как избавиться или, по крайней мере, ослабить условие (7) при $m > 1$ в задачах Коши (1), (2), когда операторы $A_k(t)$ зависят от t, имеют зависящие от t области определения и не коммутируют друг с другом?

Представляется также целесообразным выявить условия и разработать конструктивные методы факторизации гиперболических дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения переменных неограниченных операторных коэффициентов.

Список литературы

[1] *Радыно Я.В., Юрчук Н.И.* //Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 2. С. 331-342.

[2] *Ломовцев Ф.Е.* //Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 873-886.

[3] *Ломовцев Ф.Е.* // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 1. С. 34-37.

[4] *Гординг Л.* Задача Коши для гиперболических уравнений. М., 1961.

[5] *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.,1967.

[6] *Lions J.-L.* Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Berlin, 1961.

[7] *Ломовцев Ф.Е.* //Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 10. С. 1394-1403.

[8] *Ломовцев Ф.Е.* // Тез. докл. Международ. конференции "Дифференциальные уравнения и нелинейные колебания". (Черновцы, 27-29 августа 2001 г.). Киев, 2003. С. 98.

Белорусский государственный университет, г. Минск

Поступила в редакцию 22.04.2004г.