
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТИЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ОПЕРАТОРОВ

© 2011 г. К. В. Василевский, Ф. Е. Ломовцев

Доказаны существование, единственность и гладкость слабых решений дифференциально-операторного уравнения первого порядка с переменными областями определения несамосопряженных кусочно-гладких операторов, для которых существуют соответствующие мажорирующие операторы. Исследованы корректность и гладкость слабых решений трех новых смешанных задач с кусочно-гладкими по времени коэффициентами в уравнениях конечного и бесконечного порядка и в граничных условиях.

Введение. Дифференциально-операторные уравнения первого порядка с переменными областями определения разрывных операторов исследовались в [1, с. 63–65] в случае убывающих по времени областей определения квадратного корня самосопряженных операторов, в [2] в случае существования глобального сглаживающего оператора с постоянной областью определения и в [3] в случае существования локальных сглаживающих операторов с переменными областями определения. Настоящая работа посвящена такому дифференциальному уравнению, в котором операторы не обязательно самосопряжены и могут не иметь сглаживающих операторов, а имеют лишь соответствующие локально мажорирующие операторы с переменными областями определения. В приложениях рассмотрены граничные задачи для уравнений с частными производными в случаях, когда разрыв операторов достигается либо за счет изменения порядка дифференцирования, либо за счет разрывов коэффициентов уравнений.

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (\cdot, \cdot) и нормой $|\cdot|$ изучается задача Коши

$$\frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in]0, T[; \quad u(0) = u_0, \quad (1)$$

где u и f – функции переменной t со значениями в H и $A(t) : H \supset D(A(t)) \rightarrow H$ – линейные неограниченные операторы в H , удовлетворяющие следующим условиям.

I. При каждом $t \in [0, T]$ операторы $A(t)$ замкнуты в H и выполняются неравенства

$$[u]_{(t)}^2 \equiv \operatorname{Re}(A(t)u + c_0u, u) \geq c_1|u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)), \quad c_0 \geq 0, \quad c_1 > 0, \quad (2)$$

$$\langle v \rangle_{(t)}^2 \equiv \operatorname{Re}(A^*(t)v + c_0v, v) \geq c_1|v|^2 \quad \forall v \in D(A^*(t)), \quad (3)$$

где $A^*(t) : H \supset D(A^*(t)) \rightarrow H$ – сопряженные операторы к операторам $A(t)$ в H .

II. На каждом частичном интервале $\mathcal{I}_r = [t_r, t_{r+1}[$ конечного или счетного разбиения $[0, T] = \coprod_{r=0}^R \mathcal{I}_r$, где $t_0 = 0$ и $t_{R+1} = T$, ограниченные обратные $A_0^{-1}(t)$ операторов $A_0(t) = A(t) + c_0I$ сильно непрерывны по $t \in \mathcal{I}_r$ в H и при почти всех (п.в.) $t \in \mathcal{I}_r$ имеют в H ограниченную слабую производную $dA_0^{-1}(t)/dt \in L_\infty(\mathcal{I}_r, \mathcal{L}(H))$ такую, что при п.в. $t \in \mathcal{I}_r$

$$|((dA_0^{-1}(t)/dt)g, h)| \leq c_2(r)[A_0^{-1}(t)g]_{(t)}|h| \quad \forall g, h \in H, \quad c_2(r) \geq 0, \quad (4)$$

где $\mathcal{L}(H)$ – банахово пространство всех линейных непрерывных операторов в H .

III. На каждом интервале $t \in \mathcal{I}_r$, $r = \overline{0, R-1}$, операторы $A^*(t)$ подчинены сопряженным операторам $B^*(t)$ с областями определения $D(B^*(t))$ к некоторым замкнутым операторам

$B(t)$ в H с зависящими от t областями определения $D(B(t))$, т.е. $|A^*(t)v| \leq c_3(r)|B^*(t)v|$ $\forall v \in D(B^*(t))$, $\forall t \in \mathcal{I}_r$, $r = \overline{0, R-1}$, $c_3(r) > 0$.

a) На каждом из интервалов \mathcal{I}_r , $r = \overline{0, R-1}$, в отдельности выполняются сформулированные выше условия I и II для операторов $B^*(t)$ вместо операторов $A_0(t)$.

b) Для $q = 1$ ограниченные обратные $B^{-q}(t)$ операторов $B^q(t)$ слабо непрерывны по $t \in \mathcal{I}_r$ в H и при п.в. $t \in \mathcal{I}_r$ в H существует их ограниченная слабая производная $dB^{-q}(t)/dt \in L_\infty(\mathcal{I}_r, \mathcal{L}(H))$, удовлетворяющая при п.в. $t \in \mathcal{I}_r$ неравенству

$$-\operatorname{Re}(\varphi, (dB^{-q}(t)/dt)B^q(t)\varphi) \leq c_4(r)|\varphi|[[\varphi]]_{(t)} \quad \forall \varphi \in D(B^q(t)), \quad c_4(r) \geq 0, \quad r = \overline{0, R-1}, \quad (5)$$

где $[[\varphi]]_{(t)} = [\operatorname{Re}(B(t)\varphi, \varphi)]^{1/2}$, $D(B^q(t))$ – области определения операторов $B^q(t)$.

c) Во всех точках t_r разрывов операторов $A_0^{-1}(t)$ справедливы вложения

$$D(A^*(t_r)) \subset D(B^*(t_r - 0)), \quad r = \overline{1, R}, \quad (6)$$

где $D(B^*(t_r - 0))$ – области определения продолжений слева $B^*(t_r - 0)$ операторов $B^*(t)$.

Постоянные $c_0, c_1, c_i(r)$, $i = \overline{2, 4}$, не зависят от u, v, g, h, φ и t .

Пусть H_t^{*-} – антидвойственные гильбертовы пространства к гильбертовым пространствам H_t^{*+} , которые получаются замыканием множеств $D(A^*(t))$ по эрмитовым нормам $\langle \cdot \rangle_{(t)}$, $t \in [0, T]$. Обозначим $\mathcal{H} = L_2([0, T[, H)$ и $\mathcal{H}^{*-} = L_2([0, T[, H_t^{*-})$.

Определение 1. Функция $u \in \mathcal{H}$ называется *слабым решением* задачи Коши (1) для правой части $f \in \mathcal{H}^{*-}$ и начального данного $u_0 \in H$, если для нее выполняется тождество

$$\int_0^T \left(u(t), A^*(t)\varphi(t) - \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t) \rangle_{(t)} dt + (u_0, \varphi(0)) \quad \forall \varphi \in \Phi,$$

где $\Phi = \{\varphi \in \mathcal{H} : \varphi(t) \in D(A^*(t)), t \in [0, T]; d\varphi/dt \text{ – слабая производная, } A^*(t)\varphi \in \mathcal{H}; \varphi(T) = 0\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(t)}$ – формы антидвойственности между пространствами H_t^{*+} и H_t^{*-} .

Исследуем корректность в слабом смысле задачи Коши (1) с кусочно-гладкими операторами и изучим смешанные задачи для уравнений в частных производных с кусочно-гладкими по времени коэффициентами в уравнениях и граничных условиях.

Замечание 1. Если операторы $A(t)$ имеют ограниченные обратные $A^{-1}(t)$ в H , то в условиях I и II постоянная $c_0 = 0$. Это же справедливо для операторов $B(t)$ в условии IIIа).

Замечание 2. Существование продолжений слева $B^*(t_r - 0)$ операторов $B^*(t)$, $t < t_r$, в точки t_r , $r = \overline{1, R}$, следует из условия IIIа) [3]. Если в работах [2, 3] сглаживающие операторы $B_\varepsilon^{-1}(t) = (B(t) + \varepsilon)^{-1}$, $\varepsilon > 0$, построить по мажорирующими операторам $B(t)$ из условия IIIа) и $B(t) = B$ не зависят от t , то неравенство (5) заведомо выполняется, а в [2, 3] еще дополнительно требуется “ограниченная коммутируемость” операторов $A(t)$ и $B_\varepsilon^{-1}(t)$ в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если нет точек разрыва t_r операторов $A_0^{-1}(t)$, то условие III не требуется и сформулированные выше предположения совпадают с предположениями работы [4]. Вложения $D(B(t_r - 0)) \subset D(A(t_r))$ вместо вложений (6) требуются в [5].

2. Существование и единственность слабых решений. В работе [4] доказано, что если выполняется условие I, то для каждого $f \in \mathcal{H}^{*-}$ и $u_0 \in H$ существует слабое решение $u \in \mathcal{H}$ задачи Коши (1). Остается убедиться в их единственности.

Теорема 1. Если выполняются условия I–III, то для каждого $f \in \mathcal{H}^{*-}$ и $u_0 \in H$ слабое решение $u \in \mathcal{H}$ задачи Коши (1) существует и единственно.

Доказательство. Пусть при $f = 0$ и $u_0 = 0$ задача Коши (1) имеет слабое решение $u \in \mathcal{H}$. Согласно определению 1, это означает, что выполняется тождество

$$\int_0^T \left\{ (u(t), A^*(t)\varphi(t)) - \left(u(t), \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) \right\} dt = 0 \quad \forall \varphi \in \Phi. \quad (7)$$

Докажем, что $u = 0$ в \mathcal{H} . В тождестве (7) полагаем $\varphi(t) = 0$ при $t \in [t_1, T]$ и $\varphi(t) = A_0^{*-1}(t)w(t)$ при $t \in [0, t_1[$, где $A_0^{*-1}(t)$ – обратные операторы $A_0^*(t) = A^*(t) + c_0I$ и $w(t) = -\int_t^{t_1} e^{-2cs}u(s) ds$ при $t \in [0, t_1]$ или $u(t) = e^{2ct}(dw(t)/dt)$ при $t \in [0, t_1]$ и $w(t_1) = 0$, и так же, как в [4] при соответствующем значении $c > 0$, приходим к равенству $u(t) = 0$ при п.в. $t \in \mathcal{I}_0$.

В тождестве (7) полагаем

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t_2 \leq t \leq T, \\ A_0^{*-1}(t)w(t), & t_1 \leq t < t_2, \\ \hat{\varphi}_0(t), & 0 \leq t < t_1, \end{cases} \quad (8)$$

где $w(t) = -\int_t^{t_2} e^{-2cs}u(s) ds$ при $t_1 \leq t \leq t_2$ или $u(t) = e^{2ct}(dw(t)/dt)$ при $t_1 \leq t < t_2$ и $w(t_2) = 0$, а $\hat{\varphi}_0(t)$ – слабое решение задачи Коши с обратным течением времени

$$d\hat{\varphi}_0(t)/dt - B^*(t)\hat{\varphi}_0(t) = 0, \quad 0 < t < t_1; \quad \hat{\varphi}_0(t_1) = v_{0,0} = A_0^{*-1}(t_1)w(t_1). \quad (9)$$

Задача Коши (9) сводится заменой $\tau = t_1 - t$ для новой функции $\tilde{\varphi}_0(\tau) = \hat{\varphi}_0(t)$ к задаче Коши с прямым течением времени

$$d\tilde{\varphi}_0(\tau)/d\tau + \tilde{B}^*(\tau)\tilde{\varphi}_0(\tau) = 0, \quad \tilde{B}^*(\tau) = B^*(t_1 - \tau), \quad 0 < \tau < t_1; \quad \tilde{\varphi}_0(0) = v_{0,0}. \quad (10)$$

Для повышения гладкости слабых решений этой задачи применим следующую теорему.

Теорема 2. Пусть выполняются условие IIIa) и для некоторого $q \geq 1$ предположение условия IIIb). Тогда для каждого $f_r \in L_2(\mathcal{I}_r, \widetilde{W}^{*q}(\tau))$ и $v_{r,0} \in \widetilde{W}^{*q}(t_r)$ задачи Коши

$$dv_r(\tau)/d\tau + \tilde{B}^*(\tau)v_r(\tau) = f_r(\tau), \quad \tau \in]t_r, t_{r+1}[; \quad v_r(t_r) = v_{r,0}, \quad r = \overline{0, R-1}, \quad (11)$$

имеют единственное слабые решения $v_r \in \mathcal{H}_r = L_2(\mathcal{I}_r, H)$, обладающие свойствами

$$v_r(\tau) \in D(\tilde{B}^{*q}(\tau)), \quad \tau \in \mathcal{I}_r; \quad d^k v_r(\tau)/d\tau^k \in L_2(\mathcal{I}_r, \widetilde{W}^{*q-k}(\tau)), \quad k = 0, 1, \quad r = \overline{0, R-1}. \quad (12)$$

Гильбертовы пространства $\widetilde{W}^{*\alpha}(\tau)$ – области определения $D(\tilde{B}^{*\alpha})(\tau)$ степени $\tilde{B}^{*\alpha}(\tau)$, $\alpha \geq 0$, операторов $\tilde{B}^*(\tau) = B^*(t_{r+1} + t_r - \tau)$ с нормами $|v|_{\alpha,\tau} = |\tilde{B}^{*\alpha}(\tau)v|$ для $\tau \in \mathcal{I}_r$.

Доказательство. На интервалах \mathcal{I}_r для каждого $f_r \in L_2(\mathcal{I}_r, \widetilde{H}_r^-)$ и $v_{r,0} \in H$ задачи Коши (11) имеют единственное слабые решения $v_r \in \mathcal{H}_r$, $r = \overline{0, R-1}$, ввиду предположения IIIa) согласно работе [4]. Чтобы доказать их свойства (12), введем вспомогательные задачи

$$d\tilde{v}_r(\tau)/d\tau + \tilde{B}^*(\tau)\tilde{v}_r(\tau) + \tilde{B}^{*q}(\tau)(d\tilde{B}^{*-q}(\tau)/d\tau)\tilde{v}_r(\tau) = \tilde{f}_r(\tau), \quad \tau \in \mathcal{I}_r; \quad \tilde{v}_r(t_r) = \tilde{v}_{r,0}, \quad (13)$$

где $r = \overline{0, R-1}$. Заметим, что если по условию IIIb) операторы $B^{-q}(t)$, $q \geq 1$, слабо непрерывны по $t \in \mathcal{I}_r$ в H и при п.в. $t \in \mathcal{I}_r$ в H существует слабая производная $dB^{-q}(t)/dt \in L_\infty(\mathcal{I}_r, \mathcal{L}(H))$, то их сопряженные операторы $(B^{-q}(t))^* = B^{*-q}(t)$ – степень операторов $B^*(t)$ с показателем $-q \leq 0$ – также слабо непрерывны по $t \in \mathcal{I}_r$ в H и при п.в. $t \in \mathcal{I}_r$ имеют в H слабую производную $dB^{*-q}(t)/dt = (dB^{-q}(t)/dt)^* \in L_\infty(\mathcal{I}_r, \mathcal{L}(H))$, $r = \overline{0, R-1}$.

Определим слабые решения задачи (13).

Определение 2. Функция $\tilde{v}_r \in \mathcal{H}_r$ называется *слабым решением* задачи Коши (13) на интервале \mathcal{I}_r для правой части $\tilde{f}_r \in L_2(\mathcal{I}_r, \widetilde{H}_r^-)$ и начального данного $\tilde{v}_{r,0} \in H$, если

$$\int_{\mathcal{I}_r} \left(\tilde{v}_r(\tau), \tilde{B}(\tau)\varphi(\tau) - \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} + \frac{d\tilde{B}^{-q}(\tau)}{d\tau}\tilde{B}^q(\tau)\varphi(\tau) \right) d\tau = \int_{\mathcal{I}_r} [[\tilde{f}_r(\tau), \varphi(\tau)]]_{(\tau)} d\tau + (\tilde{v}_{r,0}, \varphi(t_r))$$

для всех $\varphi \in \Phi_r^q = \{\varphi \in \mathcal{H}_r : \varphi(\tau) \in D(\tilde{B}^q(\tau)), \tau \in \mathcal{I}_r; d\varphi(\tau)/d\tau$ – слабая производная, $\tilde{B}^q(\tau)\varphi(\tau) \in \mathcal{H}_r; \varphi(t_{r+1}) = 0\}$, где \widetilde{H}_r^- – антидвойственные гильбертовы пространства к

гильбертовым пространствам \tilde{H}_τ^+ , которые получаются замыканием множества $D(\tilde{B}(\tau)) = D(B(t_{r+1} + t_r - \tau))$ по эрмитовым нормам $[[u]]_{(\tau)} = [\operatorname{Re}(\tilde{B}(\tau)u, u)]^{1/2}$, и $[[\cdot, \cdot]]_{(\tau)}$ – формы антидвойственности пространств \tilde{H}_τ^+ и \tilde{H}_τ^- .

Сначала докажем существование слабых решений вспомогательной задачи Коши с помощью проекционной теоремы Лионса из [1, с. 37]. На произведении $F \times \Phi$ гильбертова пространства $F = \mathcal{H}_r$ и предгильбертова пространства $\Phi = \Phi_r^q$, наделенного эрмитовой нормой $|||\varphi||| = (\int_{\mathcal{I}_r} [[\varphi(\tau)]]_{(\tau)}^2 d\tau + |\varphi(t_r)|^2)^{1/2}$, рассмотрим полуторалинейную форму

$$E(v, \varphi) = E_r(v, \varphi) = \int_{\mathcal{I}_r} e^{2c\tau} \left(\tilde{v}_r(\tau), \tilde{B}(\tau)\varphi(\tau) - \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} + \frac{d\tilde{B}^{-q}(t)}{d\tau} \tilde{B}^q(\tau)\varphi(\tau) \right) d\tau,$$

которая при каждом $\varphi \in \Phi_r^q$, очевидно, непрерывна по v на \mathcal{H}_r . Непрерывность вложения Φ_r^q в \mathcal{H}_r с постоянной $c_1^{-1/2}$ обеспечивается неравенством (2) для операторов $B(t)$ вместо операторов $A_0(t)$ согласно условию IIIа). Интегрируя по частям последнее равенство, получаем, что вещественная часть $\operatorname{Re} E_r(\varphi, \varphi)$ равна сумме

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{I}_r} e^{2c\tau} [[\varphi(\tau)]]_{(\tau)}^2 d\tau + \frac{1}{2} e^{2ct_r} |\varphi(t_r)|^2 + c \int_{\mathcal{I}_r} e^{2c\tau} |\varphi(\tau)|^2 d\tau + \\ & + \operatorname{Re} \int_{\mathcal{I}_r} e^{2c\tau} \left(\varphi(\tau), \frac{d\tilde{B}^{-q}(\tau)}{d\tau} \tilde{B}^q(\tau)\varphi(\tau) \right) d\tau \quad \forall c \geq 0, \quad \forall \varphi \in \Phi_r^q, \end{aligned}$$

которая ввиду неравенства (5) оценивается снизу величиной

$$\frac{1}{2} e^{2ct_r} \left(\int_{\mathcal{I}_r} [[\varphi(\tau)]]_{(t)}^2 d\tau + |\varphi(t_r)|^2 \right) + \left(c - \frac{c_4^2(r)}{2} \right) \int_{\mathcal{I}_r} e^{2c\tau} |\varphi(\tau)|^2 d\tau.$$

Отсюда видно, что при $c = c_4^2(r)/2$ верна оценка $|E_r(\varphi, \varphi)| \geq (\exp\{c_4^2(r)t_r\}/2)|||\varphi|||^2 \quad \forall \varphi \in \Phi_r^q$. Антилинейный функционал $L(\varphi) = L_r(\varphi) = \int_{\mathcal{I}_r} [[\tilde{f}_r(\tau), \varphi(\tau)]]_{(\tau)} d\tau + (\tilde{v}_{r,0}, \varphi(t_r))$ при любых $\tilde{f}_r \in L_2(\mathcal{I}_r, \tilde{H}_\tau^-)$ и $\tilde{v}_{r,0} \in H$ очевидно непрерывен по φ на Φ_r^q . Поэтому для любых $\tilde{f}_r \in L_2(\mathcal{I}_r, \tilde{H}_\tau^-)$ и $\tilde{v}_{r,0} \in H$ по теореме Лионса существует решение $v = v_r \in \mathcal{H}_r$ уравнения $E_r(v, \varphi) = L_r(\varphi) \quad \forall \varphi \in \Phi_r^q$ и, следовательно, слабое решение $\tilde{v}_r(\tau) = \exp\{c_4^2(r)\tau\}v_r(\tau)$ задачи Коши (13) на интервале \mathcal{I}_r .

Теперь продолжим доказательство теоремы 2. В определении 2 возьмем $\tilde{f}_r = \tilde{B}^{*q}(\tau)f_r$, $\tilde{v}_{r,0} = \tilde{B}^{*q}(t_r)v_{r,0}$ и $\varphi(\tau) = \tilde{B}^{-q}(\tau)\psi(\tau) \quad \forall \psi(\tau) \in \Phi_r^q$ и получим равенство

$$\int_{\mathcal{I}_r} \left(\tilde{B}^{*-q}(\tau)\tilde{v}_r(\tau), \tilde{B}(\tau)\psi(\tau) - \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \right) d\tau = \int_{\mathcal{I}_r} [[\tilde{f}_r(\tau), \psi(\tau)]]_{(\tau)} d\tau + (v_{r,0}, \psi(t_r))$$

для всех $\psi(\tau) \in \Phi_r^q$, так как $[[\tilde{f}_r, \psi]]_{(\tau)} = (f, \psi)$ для $f \in H$ и $\psi \in D(\tilde{B}(\tau))$. Это означает, что функция $\tilde{B}^{*-q}(\tau)\tilde{v}_r(\tau)$ – слабое решение задачи Коши (11) на интервале \mathcal{I}_r . Поскольку по доказанному выше для каждого $f_r \in L_2(\mathcal{I}_r, \tilde{H}_t^-)$ и $v_{r,0} \in H$ задача Коши (11) на интервале \mathcal{I}_r имеет слабое решение $v_r \in \mathcal{H}_r$, то в силу его единственности при п.в. $t \in \mathcal{I}_r$

$$v_r(\tau) = \tilde{B}^{*-q}(\tau)\tilde{v}_r(\tau). \tag{14}$$

Из равенства (14) следует, что слабое решение $v_r(\tau) \in D(\tilde{B}^{*q}(\tau))$ при п.в. $\tau \in \mathcal{I}_r$ и $v_r \in L_2(\mathcal{I}_r, \tilde{W}^{*q}(t))$, поскольку $\tilde{v}_r \in \mathcal{H}_r$. Тогда если в интегральном тождестве определения 2 на

интервале \mathcal{I}_r перенести операторы $\tilde{B}(\tau)$ справа налево и применить элементарные оценки, то придет к неравенству

$$\left| \int_{\mathcal{I}_r} \left(v_r(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \right) d\tau \right| \leq c_5 \left(\int_{\mathcal{I}_r} |\varphi(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty([t_r, t_{r+1}], H),$$

где $C_0^\infty([t_r, t_{r+1}], H)$ – множество всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в $[t_r, t_{r+1}]$. Известно [6, с. 19], что это неравенство указывает на существование регулярной обобщенной производной $dv_r(\tau)/d\tau \in \mathcal{H}_r$, и, следовательно, уравнение задачи Коши (11) справедливо при п.в. $\tau \in \mathcal{I}_r$. На этом основании из указанного уравнения находим, что

$$\tilde{B}^{*q-1}(\tau)(dv_r(\tau)/d\tau) = \tilde{B}^{*-1}(\tau)\tilde{B}^{*q}(\tau)f_r(\tau) - \tilde{B}^{*q}(\tau)v_r(\tau) \in \mathcal{H}_r, \quad r = \overline{0, R-1}.$$

Поскольку функция $g \in \mathcal{H}_r$ имеет обобщенную производную $dg/d\tau \in \mathcal{H}_r$, то она эквивалентна некоторой непрерывной функции $\tilde{g} \in C(\mathcal{I}_r, H)$. Таким образом, $v_r \in C(\mathcal{I}_r, H)$ и тем самым $v_r(\tau) \in D(\tilde{B}^*(\tau)) \quad \forall \tau \in \mathcal{I}_r, r = \overline{0, R-1}$. Теорема 2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. Из вложения (6) при $r = 1$ следует, что в задаче Коши (10) начальное данное $v_{0,0}$ принадлежит $D(\tilde{B}^*(0))$. Применив к задаче Коши (10) теорему 2 при $q = 1$, $f_r = 0$, $v_{r,0} = v_{0,0}$ и $r = 0$, получаем, что ее слабое решение $\tilde{\varphi}_0(\tau) \in D(\tilde{B}^*(\tau)) \quad \forall \tau \in \mathcal{I}_0$, $d\tilde{\varphi}_0(\tau)/d\tau \in L_2(\mathcal{I}_0, H)$ и тем самым функция $\varphi(t)$ вида (8) принадлежит множеству Φ из определения 1. Подставив эту функцию в тождество (7) и взяв вещественную часть, так же, как и в случае интервала \mathcal{I}_0 , выводим, что $u(t) = 0$ при п.в. $t \in \mathcal{I}_1$. Далее такие же рассуждения повторяем для оставшихся интервалов \mathcal{I}_r , $r = \overline{2, R}$. При этом для каждого интервала \mathcal{I}_r в тождество (7) подставляем функцию $\varphi(t) = \eta_r(t)h_r(t)$, $r = \overline{2, R}$, где

$$h_r(t) = \begin{cases} 0, & t_{r+1} \leq t \leq T, \\ A_0^{*-1}(t)w(t), & t_r \leq t < t_{r+1}, \\ \hat{\varphi}_{r-1}(t), & t_{r-1} \leq t < t_r, \\ 1, & 0 \leq t < t_{r-1}, \end{cases} \quad w(t) = - \int_t^{t_{r+1}} e^{-2cs} u(s) ds, \quad t \in \mathcal{I}_r,$$

$\hat{\varphi}_{r-1}(t)$ – слабое решение задачи Коши с обратным течением времени:

$$d\hat{\varphi}_{r-1}(t)/dt - B^*(t)\hat{\varphi}_{r-1}(t) = 0, \quad t_{r-1} < t < t_r; \quad \hat{\varphi}_{r-1}(t_r) = v_{r-1,0} = A_0^{*-1}(t_r)w(t_r),$$

и $\eta_r(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\eta_r(t) = 0$ при $t \in [0, t_r]$ и $\eta_r(t) = 1$ при $t \in [t_r, T]$, $r = \overline{2, R}$. Таким образом, если R конечно, то за конечное число шагов $R + 1$ убеждаемся в том, что $u(t) = 0$ при п.в. $t \in \mathcal{I}_r$, $r = \overline{0, R}$. Поскольку слабое решение задачи Коши (1) на всем интервале $]0, T[$ существует без требования выполнения условий II и III, то случай счетного числа $R = +\infty$ интервалов \mathcal{I}_r сводится к их конечному числу применением понятия множества нулевой меры в $]0, T[$. Теорема 1 доказана.

На том же основании, что и в [4], справедливо

Следствие 1. *Если выполнены предположения теоремы 1, то имеет место неравенство*

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \leq \frac{4}{c_1} \left(\int_0^T \langle f(t) \rangle_{(-t)}^2 dt + |u_0|^2 \right),$$

где $\langle \cdot \rangle_{(-t)}$ – нормы в гильбертовых пространствах H_t^{*-} .

Применив к уравнению из (1) на интервале \mathcal{I}_r теорему 2 гладкости при $q = 1$ и $\tilde{B}^*(t) = A_0(t)$, получим

Следствие 2. Если выполняются условия I, II и на \mathcal{I}_r неравенство (5) при $q = 1$ и $B(t) = A_0^*(t)$, то для каждого $f \in L_2(\mathcal{I}_r, W(t))$ и $u(t_r) \in W(t_r)$ слабые решения $u \in \mathcal{H}$ уравнения из (1) являются локально гладкими решениями, т.е.

$$u(t) \in D(A(t)), \quad t \in \mathcal{I}_r; \quad du(t)/dt, A(t)u(t) \in L_2(\mathcal{I}_r, H), \quad r = \overline{0, R},$$

где $W(t)$ – множество $D(A(t))$, наделенные нормой графика операторов $A_0(t)$.

Замечание 3. Если некоторые операторы $A(t)$ удовлетворяют условиям I и II на \mathcal{I}_r , то для операторов $B(t) = A_0(t)$ на \mathcal{I}_r выполняется условие IIIb) и, в частности, при $q = 1$ оценка (5) вытекает из оценки (4). Если же $B(t) \neq A_0(t)$ и $B(t)$ самосопряжены в H на \mathcal{I}_r , то условие IIIa) обеспечивает выполнение условия IIIb), так как при $q = 1$ оценка (5) следует из оценки (4) с операторами $B^*(t) = B(t)$ вместо операторов $A_0(t)$.

3. Приложения. Применим полученные результаты для построения неизученных ранее корректных смешанных задач для параболических и неклассических уравнений в частных производных с кусочно-гладкими по времени коэффициентами в уравнениях и граничных условиях, где в отличие от примеров в [5] сглаживающих операторов не существует, а имеются лишь мажорирующие операторы.

Смешанная задача для параболического уравнения с разрывным коэффициентом в уравнении и кусочно-гладкими коэффициентами в граничных условиях. В ограниченной области $G_1 =]0, T_1[\times]0, l[$ рассматривается уравнение

$$\partial u(t, x)/\partial t - a(t)(\partial^6 u(t, x)/\partial x^6) = f(t, x), \quad \{t, x\} \in G_1, \quad (15)$$

при зависящих от t граничных условиях

$$\frac{\partial^{5-i} u(t, 0)}{\partial x^{5-i}} = a_{i+1}(t) \frac{\partial^i u(t, 0)}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial^{5-i} u(t, l)}{\partial x^{5-i}} = (-1)^i a_{i+1}(t) \frac{\partial^i u(t, l)}{\partial x^i}, \quad i = \overline{0, 2}, \quad (16)$$

для всех $t \in [0, T_1]$ и начальном условии

$$u(0, x) = u_0(x), \quad 0 < x < l. \quad (17)$$

Предполагаем, что коэффициент $a(t) \geq a_0 > 0$ – непрерывно дифференцируемая функция на интервале $[0, T_1]$, кроме, быть может, счетного числа точек $t_r \in]0, T_1[, r = 1, 2, \dots$, таких, что $t_r \rightarrow T_1$ при $r \rightarrow +\infty$, и коэффициенты $a_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$, – неотрицательные и непрерывные всюду на $[0, T_1]$, но непрерывно дифференцируемые на $[0, T_1]$ функции, кроме, быть может, точек t_r , $r = 1, 2, \dots$. В смешанной задаче (15)–(17) операторы $A(t)$ терпят разрыв в счетном числе точек t_r из-за разрыва коэффициента уравнения $a(t)$. Справедлива

Теорема 3. Пусть $0 < a_0 \leq a(t)$, $a_i \geq 0$, $t \in [0, T_1]$, $a(t) \in C^{(1)}(\mathcal{I}_r)$, $\mathcal{I}_r = [t_r, t_{r+1}[$, $r = 0, 1, \dots$, $a_i(t) \in C[0, T_1] \cap C_1(\mathcal{I}_r)$. Тогда для каждого $f \in L_2(]0, T_1[, W_{2,t}^{-3}(0, l))$ и $u_0 \in L_2(0, l)$ смешанная задача (15)–(17) имеет единственное слабое решение $u \in L_2(G_1)$, где гильбертовы пространства $W_{2,t}^{-3}(0, l)$ антидвойственные к гильбертовым пространствам $W_{2,t}^3(0, l)$, которые являются замыканием множества $D(A(t)) = \{u(t, x) \in W_2^6(0, l) : u(t, x) \in (16)\}$ по эрмитовым нормам $\langle u \rangle_{(t)} = [u]_{(t)} = (\int_0^l [A(t)u + u] \bar{u} dx)^{1/2}$.

Доказательство состоит в проверке предположений теоремы 1. Нетрудно убедиться в том, что дифференциальные операторы $\tilde{A}(t) = -a(t)\partial^6/\partial x^6$ с областями определения $D(A(t))$, указанными в теореме 3, самосопряжены в $H = L_2(0, l)$ при каждом $t \in [0, T_1]$, если считать, что в уравнении (15) значение коэффициента $a(T_1)$ равно, например, единице. Из доказательств [7, с. 824] следует, что порожденные ими линейные операторы $A(t)$ при $c_0 = 1$ удовлетворяют условиям I, II, и III, и в том числе неравенству (4) на каждом частичном интервале \mathcal{I}_r , $r = 0, 1, \dots$. Тогда для мажорирующих операторов $B(t)$, порожденных дифференциальными выражениями $\tilde{B}(t) = -\partial^6/\partial x^6 + I$ и граничными условиями (16) с областями определения $D(B(t)) = D(A(t))$, очевидно выполняется условие III согласования в точках t_r разрывов и в том числе верны неравенства (5) на \mathcal{I}_r в силу замечания 2 и вложения (6) в точках t_r в

силу равенства областей $D(B(t_r)) = D(A(t_r - 0))$ благодаря непрерывности коэффициентов a_i , $i = \overline{1, 3}$, в точках t_r , $r = 1, 2, \dots$. Теорема 3 доказана.

Смешанная задача для неклассического уравнения переменного порядка с разрывным коэффициентом в уравнении и кусочно-гладким коэффициентом в граничных условиях. В ограниченной области $G_2 =]0, T_2[\times]0, l[$ решается уравнение

$$\partial u(t, x) / \partial t + \tilde{A}(t)u(t, x) = f(t, x), \quad \{t, x\} \in G_2, \quad (18)$$

где $\tilde{A}(t) = a(t)\partial^3/\partial x^3$ для $0 \leq t < t^0$ и $\tilde{A}(t) = a(t)\partial^4/\partial x^4$ для $t^0 \leq t \leq T_2$, при зависящих от t граничных условиях

$$u(t, 0) = \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 u(t, l)}{\partial x^3} = a_1(t) \frac{\partial u(t, l)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u(t, l)}{\partial x^2} = -a_1(t)u(t, l), \quad t^0 \leq t \leq T_2, \quad (19)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u(t, l)}{\partial x^2} = a_1(t)u(t, l), \quad \frac{\partial u(t, l)}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq t < t^0,$$

и начальном условии

$$u(0, x) = u_0(x), \quad 0 < x < l. \quad (20)$$

На коэффициенты $a(t)$ и $a_1(t)$ налагаются те же требования, что и в предыдущей задаче, и дополнительно условие $0 < a_{1,0} \leq a_1(t)$, $t \in [0, t^0[$. Операторы $A(t)$ смешанной задачи (18)–(20) разрывны в счетном числе точек t^0 и t_r вследствие роста порядка производной по x в t_0 и разрывов коэффициента уравнения $a(t)$ в t_r , $r = 1, 2, \dots$

Корректную разрешимость в слабом смысле этой задачи устанавливает

Теорема 4. Пусть коэффициенты задачи (18)–(20) удовлетворяют следующим условиям: $0 < a_0 \leq a(t)$, $t \in [0, T_2]$, $0 < a_{1,0} \leq a_1(t)$, $t \in [0, t^0[$, $a_1(t) \geq 0$, $t \in [t^0, T_2]$, $a(t) \in C^{(1)}(\mathcal{I}_r)$, $a_1(t) \in C[0, T_2] \cap C^{(1)}(\mathcal{I}_r)$, $r = 0, 1, \dots$. Тогда для любых $f \in L_2(]0, T_2[, W_{2,t}^{*-}(0, l))$ и $u_0 \in L_2(0, l)$ существуют единственные слабые решения $u \in L_2(G_2)$ этой смешанной задачи. Здесь гильбертосы пространства $W_{2,t}^{*-}(0, l)$ – антидвойственные к гильбертовым пространствам $W_{2,t}^{*+}(0, l)$ – замыканиям указанных в доказательстве множеств $D(A^*(t))$ по вычислительным там же эрмитовым нормам $\langle v \rangle_{(t)} = (\operatorname{Re} \int_0^l A_0^*(t)v \bar{v} dx)^{1/2}$, $t \in [0, T_2]$.

Доказательство. Для $0 \leq t < t^0$ при любом $c_0 > 0$ операторы $\tilde{A}(t)$ в областях $D(A(t)) = \{u(t, x) \in W_2^3(0, l) : u(t, x) \in (19)\}$ удовлетворяют неравенству (2):

$$\operatorname{Re}(A_0(t)u(x), u(x))_0 = a_1(t)|u(l)|^2 + (1/2)|\partial u(0)/\partial x|^2 + c_0\|u(x)\|_0^2 \geq c_0\|u(x)\|_0^2,$$

а в $L_2(0, l)$ их сопряженные операторы $\tilde{A}^*(t) = -a(t)\partial^3/\partial x^3$ в своих областях $D(A^*(t))$, состоящих из всех функций $v(t, x) \in W_2^3(0, l)$, для которых выполняются сопряженные граничные условия

$$v(t, 0) = \partial v(t, 0)/\partial x = 0, \quad \partial^2 v(t, l)/\partial x^2 = -a_1(t)v(t, l), \quad 0 \leq t < t^0,$$

удовлетворяют неравенству (3):

$$\operatorname{Re}(A_0^*(t)v(x), v(x))_0 = a_1(t)|v(l)|^2 + (1/2)|\partial v(0)/\partial x|^2 + c_0\|v(x)\|_0^2 \geq c_0\|v(x)\|_0^2.$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_0$ – скалярное произведение в $L_2(0, l)$. Для $t_0 \leq t \leq T_2$ операторы $\tilde{A}(t) = a(t)\partial^4/\partial x^4$ в областях $D(A(t)) = \{u(t, x) \in W_2^4(0, l) : u(t, x) \in (19)\}$ очевидно самосопряжены в $L_2(0, l)$ и при всех достаточно больших $c_0 > 0$ удовлетворяют неравенствам (2) и (3), так как для всех $0 < \varepsilon < 1$ существует постоянная $c_8(\varepsilon) > 0$, при которой

$$(A(t)u(x), u(x))_0 = \left\| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \right\|_0^2 + 2a_1(t) \operatorname{Re} \frac{\partial u(l)}{\partial x} \bar{u(l)} \geq (1 - \varepsilon) \left\| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \right\|_0^2 - c_8(\varepsilon)\|u(x)\|_0^2,$$

в силу известных неравенств для следов функций.

Для операторов $A(t)$ верно условие II, поскольку для них на $[0, t^0[$ выполняются все требования теоремы 9 и неравенство (31) из [7] благодаря предположению $0 < a_{1,0} \leq a_1(t)$, $t \in [0, t^0[,$ а на $[t^0, T_2]$ – теоремы 7 из [7] и оценки (12) из [4].

Далее, если в условии III взять $B(t) = A_0(t)$, то на интервале $[0, t^0[$ верны предположения IIIa), причем неравенство (5) для операторов $A_0^*(t)$ – согласно этой же теореме 7 из [7], предположения IIIb) – согласно замечанию 2 и на интервале $[t^0, T_2]$ выполнены предположения IIIa), очевидно, ввиду замечания 2. Вложения (6) для операторов $A(t)$ справедливы, так как в данной смешанной задаче

$$D(A(t^0)) \subsetneq D(A(t^0 - 0)), \quad D(A^*(t_r)) = D(A^*(t_r - 0)), \quad t_r \neq t^0, \quad r = 1, 2, \dots$$

Поскольку все предположения теоремы 1 проверены, то теорема 4 доказана.

Смешанная задача для параболического уравнения переменного неограниченного порядка с кусочно-гладкими коэффициентами в граничных условиях. В ограниченной области $G_3 =]0, T_3[\times]0, l[$ задано уравнение переменного порядка

$$\partial u(t, x)/\partial t + \tilde{A}_r(t)u(t, x) = f(t, x), \quad x \in]0, l[, \quad t \in \mathcal{I}_r, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

где на бесконечном разбиении $[0, T_3[= \coprod_{r=1}^{\infty} \mathcal{I}_r$ дифференциальные выражения имеют вид

$$\tilde{A}_r(t)u(x) = a_r(t)(-1)^r(\partial^{2r}u(x)/\partial x^{2r}), \quad t \in \mathcal{I}_r = [T_3(r-1)/r, T_3r/(r+1)[, \quad r = 1, 2, \dots,$$

при зависящих от t граничных условиях

$$\begin{aligned} (\partial^{2i+1}u(t, 0)/\partial x^{2i+1}) - a_1(t)(\partial^{2i}u(t, 0)/\partial x^{2i}) &= 0, \\ (\partial^{2i+1}u(t, l)/\partial x^{2i+1}) + a_2(t)(\partial^{2i}u(t, l)/\partial x^{2i}) &= 0, \quad t \in \mathcal{I}_r, \quad i = \overline{0, r-1}, \quad r = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

и начальном условии

$$u(0, x) = u_0(x), \quad 0 < x < l. \quad (23)$$

Здесь коэффициенты $a_r(t)$ – любые строго положительные, непрерывно дифференцируемые функции на \mathcal{I}_r , а коэффициенты $a_i(t)$, $i = 1, 2$, – любые неотрицательные непрерывные функции всюду на $[0, T_3]$, но непрерывно дифференцируемые по t на $[0, T_3]$, кроме, быть может, счетного числа точек t_r , $r = 2, 3, \dots$. В смешанной задаче (21)–(23) операторы $A(t)$ разрывны в счетном числе точек t_r , $r = 2, 3, \dots$, главным образом за счет изменения в них порядка дифференцирования по x в уравнении (21). Справедлива

Теорема 5. Пусть коэффициенты удовлетворяют условиям $0 < a_{r,0} \leq a_r(t)$, $t \in \mathcal{I}_r$, $a_i(t) \geq 0$, $t \in [0, T_3]$, $a_r(t) \in C^{(1)}(\mathcal{I}_r)$ и $a_i(t) \in C[0, T_3] \cap C^{(1)}(\mathcal{I}_r)$, $i = 1, 2$, $r = 1, 2, \dots$. Тогда для каждого $f \in L_2(\mathcal{I}_r, W_{2,t}^{-r}(0, l))$, $r = 1, 2, \dots$, и $u_0 \in L_2(0, l)$ существуют единственное слабые решения $u \in L_2(G_3)$ смешанной задачи (21)–(23), где гильбертовы пространства $W_{2,t}^{-r}(0, l)$ антидвойственные к гильбертовым пространствам $W_{2,t}^r(0, l)$, которые получаются замыканием множеств $D(A_r(t)) = \{u(t, x) \in W_2^{2r}(0, l) : u(t, x) \in (22)\}$ по эрмитовым нормам $\langle u \rangle_{(t)} = [u]_{(t)} = (\int_0^l [A(t)u + c_0 u] \bar{u} dx)^{1/2}$, $t \in \mathcal{I}_r$, $c_0 > 0$, где операторами $A(t)$ являются дифференциальные выражения $\tilde{A}_r(t)$ с областями определения $D(A_r(t))$.

Доказательство. Методом математической индукции по r покажем симметричность операторов $A_r(t)$ на $D(A_r(t))$ в $L_2(0, l)$ и существование их ограниченных обратных $A_r^{-1}(t)$ на $L_2(0, l)$ для всех $t \in \mathcal{I}_r$, $r = 1, 2, \dots$, что, как известно, обеспечивает их самосопряженность в $L_2(0, l)$. Поскольку при любом фиксированном $t_0 \in \mathcal{I}_r$ симметричность и ограниченная обратимость операторов $A_r(t_0)$ в $L_2(0, l)$ не зависят от чисел $a_r(t_0) \geq a_{r,0} > 0$, то только для упрощения доказательства будем считать, что в уравнении (21) $a_r(t_0) = 1$, $r = 1, 2, \dots$. Тогда в пространстве $L_2(0, l)$ имеет место представление операторов $A_r(t_0) = A_1^r(t_0) - r$ -степень оператора $A_1(t_0)$, который соответствует дифференциальному выражению $\tilde{A}_1(t_0)u = -\partial^2u/\partial x^2$ в области $D(A_1(t_0)) = \{u(t_0, x) \in W_2^2(0, l) : u(t_0, x) \in (22)\}$ для $t_0 \in \mathcal{I}_r$. Для упрощения выкладок при доказательстве обратимости операторов $A_r(t_0)$ временно будем считать,

что в граничных условиях (22) коэффициенты $a_i(t_0)$, $i = 1, 2$, при каждом $t_0 \in [0, T_3]$ одновременно в нуль не обращаются.

1⁰. При $r = 1$ для каждого $t_0 \in [0, T_3]$ непосредственным интегрированием по частям по x можно убедиться в симметричности оператора $A_1(t_0)$ на $D(A_1(t_0))$ в $L_2(0, l)$. Ограничность в $L_2(0, l)$ его обратного оператора

$$\begin{aligned} A_1^{-1}(t_0)g(x) = & -\int_0^x (x-s)g(s) ds + \mathcal{A}_1(t_0) \int_0^l g(s) ds + \mathcal{B}_1(t_0)x \int_0^l g(s) ds + \\ & + \mathcal{C}_1(t_0) \int_0^l (l-s)g(s) ds + \mathcal{D}_1(t_0)x \int_0^l (l-s)g(s) ds, \end{aligned}$$

где $\mathcal{A}_1(t_0) = [a_1(t_0) + a_2(t_0) + la_1(t_0)a_2(t_0)]^{-1}$, $\mathcal{B}_1(t_0) = a_1(t_0)\mathcal{A}_1(t_0)$, $\mathcal{C}_1(t_0) = a_2(t_0)\mathcal{A}_1(t_0)$, $\mathcal{D}_1(t_0) = a_1(t_0)a_2(t_0)\mathcal{A}_1(t_0)$, легко устанавливается элементарными оценками.

2⁰. Пусть операторы $A_j(t_0)$ симметричны и ограниченно обратимы в $L_2(0, l)$ для $t_0 \in [0, T_3]$ при всех $1 \leq j \leq r$.

3⁰. Тогда для $t_0 \in \mathcal{I}_{r+1}$ симметричность оператора $A_{r+1}(t_0) = A_1(t_0)A_r(t_0) = A_r(t_0)A_1(t_0)$ следует из симметричности операторов $A_1(t_0)$ и $A_r(t_0)$, а ограниченная обратимость оператора $A_{r+1}(t_0)$ – из равенства $A_{r+1}^{-1}(t_0) = A_r^{-1}(t_0)A_1^{-1}(t_0)$ и ограниченности обратных $A_1^{-1}(t_0)$ и $A_r^{-1}(t_0)$ в $L_2(0, l)$ согласно предположению индукции.

В случае одновременного обращения обоих коэффициентов $a_i(t_0)$, $i = 1, 2$, в нуль достаточно в $L_2(0, l)$ при некотором $\delta > 0$ решить уравнение

$$(A_{r+1}(t_0) + \delta^2)v(x) = (A_1(t_0) + \delta)(A_r(t_0) + \delta)v(x) - \delta(A_1(t_0) + A_r(t_0))v(x) = g(x).$$

Это уравнение очевидно сводится к уравнению

$$\begin{aligned} v(x) - \delta(A_r(t_0) + \delta)^{-1}(A_1(t_0) + \delta)^{-1}(A_1(t_0) + A_r(t_0))v(x) = \\ = (A_r(t_0) + \delta)^{-1}(A_1(t_0) + \delta)^{-1}g(x) \quad \forall g(x) \in L_2(0, l), \end{aligned} \quad (24)$$

решение которого при любом

$$0 < \delta < \|(A_r(t_0) + \delta)^{-1}(A_1(t_0) + \delta)^{-1}A_1(t_0) + (A_1(t_0) + \delta)^{-1}(A_r(t_0) + \delta)^{-1}A_r(t_0)\|^{-1}$$

выражается соответствующим рядом Неймана и представляет собой ограниченный оператор от $g(x)$ в $L_2(0, l)$ в силу ограниченности операторов $(A_r(t_0) + \delta)^{-1}$ по предположению индукции и $(A_1(t_0) + \delta)^{-1}$ в $L_2(0, l)$. Операторы $A_{r+1}(t_0)$ и $A_{r+1}(t_0) + \delta^2$, $\delta > 0$, самосопряжены одновременно.

Существование локальных единственных решений смешанной задачи (21)–(23) на интервалах \mathcal{I}_r обеспечивается следующей теоремой (см. теоремы 2 и 5 в [8]).

Теорема 6. Пусть операторы $A(t)$ с зависящими от t областями определения $D(A(t))$ самосопряжены, положительно определены и сильно непрерывные по $t \in \mathcal{I}_r$, обратные операторы $A_0^{-1}(t) \in L_\infty(\mathcal{I}_r, \mathcal{L}(H))$ при п.в. $t \in \mathcal{I}_r$ имеют сильно производную $dA_0^{-1}(t)/dt \in L_\infty(\mathcal{I}_r, \mathcal{L}(H))$. Тогда для любых функций $f_r \in L_2(\mathcal{I}_r, H_t^-)$, $u_{r,0} \in H$ и $f_r \in L_2(\mathcal{I}_r, H)$, $u_{r,0} \in H_{t_r}^+$ задача Коши (1) имеет соответственно единственное сильные (слабые) решения $u_r \in C(\mathcal{I}_r, H) \cap L_2(\mathcal{I}_r, H_t^+)$ и гладкие решения $u_r(t) \in D(A(t))$, $t \in \mathcal{I}_r$; $du_r(t)/dt$, $A(t)u_r(t) \in L_2(\mathcal{I}_r, H)$, $r = 0, 1, 2, \dots$

На каждом \mathcal{I}_r ограниченность в $L_2(0, l)$ сильной производной операторов $(A_1(t) + \delta)^{-1}$ по $t \in \mathcal{I}_r$ при всех $0 < \delta < \delta_1$ проверяется непосредственно и обеспечивается тем, что $a(t)$, $a_i(t) \in C^{(1)}(\mathcal{I}_r)$, $i = 1, 2$. Тогда ограниченность в $L_2(0, l)$ сильной производной $d(A_{r+1}(t) + \delta^2)^{-1}/dt$ на \mathcal{I}_{r+1} при всех $0 < \delta < \delta_{r+1}$ следует из ограниченной сильной дифференцируемости по $t \in \mathcal{I}_{r+1}$ соответствующего ряда Неймана для уравнения (24) в силу

ограниченности сильных производных $d(A_r(t) + \delta)^{-1}/dt$ согласно предположению индукции и $d(A_1(t) + \delta)^{-1}/dt$. Поэтому если в условии III за мажорирующие операторы на \mathcal{I}_r взять $B(t) = A_r(t) + \delta$, то остается лишь проверить вложения (6) в точках t_r , $r = 2, 3, \dots$ Эти вложения для данной смешанной задачи верны, поскольку коэффициенты $a_i(t)$, $i = 1, 2$, непрерывны в точках t_r и, следовательно, $D(A(t_r)) \subsetneq D(A(t_r - 0))$, $r = 2, 3, \dots$ Теорема 6 доказана.

Замечание 4. Самосопряженные операторы $A_r(t)$ на \mathcal{I}_r не удовлетворяют предположениям в [1, с. 63], так как для любых различных точек $t_1, t_2 \in \mathcal{I}_r$, в которых $a_1(t_1) \neq a_1(t_2)$ или $a_2(t_1) \neq a_2(t_2)$, области $D(A_r(t_1))$ и $D(A_r(t_2))$ несравнимы, т.е. $D(A_r(t_1)) \not\subseteq D(A_r(t_2))$ и $D(A_r(t_1)) \not\supseteq D(A_r(t_2))$, $r = 1, 2, \dots$ Это же можно сказать и об операторах $A(t)$ задач (15)–(17) и (18)–(20). В задачах (18)–(20) и (21)–(23) можно говорить о повышении лишь локальной гладкости ее слабых решений и их нельзя решить последовательно на интервалах \mathcal{I}_r , $r = 1, 2, \dots$, обычным образом, так как для этого в случае гладких решений необходимы вложения $D(A(t_r - 0)) \subset D(A(t_r))$, а в случае сильных решений – вложения $D(A_0^{1/2}(t_r - 0)) \subset \subset D(A_0^{1/2}(t_r))$, $r = 2, 3, \dots$, которые в ней не возможны. С помощью теорем 7 и 9 из [7] аналогично строятся новые корректные смешанные задачи в многомерных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с зависящими от t и $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ коэффициентами в уравнениях и граничных условиях. Только для упрощения изложения и выделения новизны результатов настоящей работы исследованные выше смешанные задачи рассмотрены на интервале $]0, l[$ и их коэффициенты взяты зависящими лишь от t . Уравнение (21) имеет переменные по t неограниченные порядки производных по x и граничные условия (22) – зависящие от t коэффициенты, а в работе [5] изучались параболические уравнения переменных конечных порядков производных по x при кусочно-постоянных по t граничных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lions J.-L. Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Berlin, 1961.
2. Юрчук Н.И. Метод энергетических неравенств в исследовании дифференциально-операторных уравнений: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1981.
3. Ломовцев Ф.Е. Границные задачи для дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения гладких и разрывных операторных коэффициентов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Минск, 2003.
4. Ломовцев Ф.Е. Обобщение теории Лионса для эволюционных дифференциально-операторных уравнений первого порядка с переменными областями определения гладких операторных коэффициентов. I // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 630–640.
5. Ломовцев Ф.Е. Абстрактные эволюционные дифференциальные уравнения с разрывными операторными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1141.
6. Лионс Ж.-Л., Маджсенес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
7. Ломовцев Ф.Е. Обобщение теории Лионса для эволюционных дифференциально-операторных уравнений первого порядка с переменными областями определения гладких операторных коэффициентов. II // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 6. С. 820–826.
8. Ломовцев Ф.Е. О необходимых и достаточных условиях разрешимости задачи Коши для эволюционного дифференциально-операторного уравнения // Докл. АН БССР. 1991. Т. 35. № 4. С. 300–304.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
26.12.2007 г.