УДК 517.95

С. П. ХОДОС, Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ

О ГЛАДКОСТИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ С ПЕРЕМЕНЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

(Представлено членом-корреспондентом В.И. Корзюком)

Белорусский государственный университет, Минск *Поступило 12.2009*

Существование и единственность классических решений первой и второй смешанных задач для общих несингулярных одномерных гиперболических уравнений второго порядка доказаны в [1] и центрально-симметрической третьей смешанной задачи для трехмерного гиперболического уравнения – в [2] при стационарных граничных условиях. Гладкость сильных и слабых решений несингулярных двучленных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменными областями определения операторных коэффициентов изучалась соответственно в [3] и [4]. Критерии корректности по начальным данным имелись в [1– 4]. В настоящей работе исследуется гладкость слабых решений трехчленного гиперболического дифференциального уравнения типа Эйлера-Пуассона-Дарбу с переменными областями определения операторных коэффициентов. Впервые получены критерии корректной разрешимости по начальным данным в классе гладких решений дифференциально-операторного уравнения типа Эйлера-Пуассона-Дарбу и сингулярного уравнения колебаний струны с нестационарным граничным условием. Обсуждается вопрос следов гладких решений в начальных и граничных условиях.

1. Постановка задачи. Исследуется гладкость слабых решений уравнения

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\frac{B(t)}{t^a}\frac{du(t)}{dt}+A(t)u(t)=f(t), \quad t\in\left]0,T\right[, \quad 0\le a\le 1, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0)=u_0, \quad du(0)/dt=u_1, \quad (u_1=0 \text{ при } a>0), \tag{2}$$

где u и f – функции переменной t со значениями в гильбертовом пространстве (г.п.) H, $A(t)$ и $B(t)$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$ и $D(B(t))$ соответственно и a – параметр сингулярности.

Пусть $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$ – соответственно скалярное произведение и норма в H и операторы $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

A0. При каждом $t\in[0,T]$ операторы $A(t)$ самосопряжены в H и

$$\left(A(t)u,u\right)\ge a_0|u|^2 \quad \forall u\in D\left(A(t)\right), \quad a_0>0.$$

A1. В H обратные операторы $A^{-1}(t)\in B\left([0,T],L(H)\right)$ сильно непрерывны по $t\in[0,T]$, имеют ограниченную сильную производную $dA^{-1}(t)/dt\in B\left([0,T],L(H)\right)$ [5, с. 216, 218] и

$$-\left(\left(dA^{-1}(t)/dt\right)g,g\right)\le a_1\left(A^{-1}(t)g,g\right) \ \ \forall g\in H, \quad a_1\ge 0, \tag{3}$$

$$\left|\left(\left(dA^{-1}(0)/dt\right)g,h\right)\right|\le a_2|g|\left(A^{-1}(0)h,h\right)^{1/2} \quad \forall g,h\in H, \quad a_2\ge 0, \tag{4}$$

A2. При почти всех (п. в.) $t\in\left]0,T\right[$ операторы $dA^{-1}(t)/dt$ имеют в H ограниченную сильную производную $d^2A^{-1}(t)/dt^2\in L_\infty\left(\left]0,T\right[,L(H)\right)$ такую, что

$$\left|\left(\left(d^2A^{-1}(t)/dt^2\right)g,h\right)\right|\le a_3|g|\left(A^{-1}(t)h,h\right)^{1/2} \quad \forall g,h\in H, \quad a_3\ge 0. \tag{5}$$

B0. При каждом $t \in [0,T]$ замкнутые операторы $B(t)$ подчинены квадратному корню $A^{1/2}(t)$ операторов $A(t)$ [5, с. 176] и выполняется оценка

$$-\operatorname{Re}\big(B(t)u,u\big) \le b_0 t^a |u|^2 \quad \forall u \in D\big(A(t)\big), \quad b_0 \ge 0. \tag{6}$$

B1. При всех $t \in [0,T]$ ограничены операторы $B(t)\big(dA^{-1}(t)/dt\big) \in B\big([0,T], L(H)\big)$ и верны

$$-\operatorname{Re}\big(B(t)u, A(t)u\big) \le b_1 t^{\alpha}\big(A(t)u,u\big) \quad \forall u \in D\big(A(t)\big), \quad b_1 \ge 0, \tag{7}$$

$$\left|\big(B(t)\big(dA^{-1}(t)/dt\big)g,h\big)\right| \le b_2 t^{\alpha}|g|\big(A^{-1}(t)h,h\big)^{1/2} \quad \forall g,h \in H, \quad b_2 \ge 0. \tag{8}$$

Исследуем гладкость слабых решений задачи Коши (1), (2).

Обозначим пространства $\mathrm{H}^+ = L_2(]0,T[,\ H_t^+)$, $\mathrm{H} = L_2(]0,T[,\ H)$ и $\mathrm{H}^- = L_2(]0,T[,\ H_t^-)$, где H_t^- – антидвойственные банаховы пространства к г. п. H_t^+, полученным наделением областей определения $D(A^{1/2}(t))$ операторов $A^{1/2}(t)$ эрмитовыми нормами $[\cdot]_{(t)} = |A^{1/2}(t)\cdot|$.

О п р е д е л е н и е 1 . Функция $u \in \mathrm{H}_1 = \{u \in \mathrm{H} : du/dt \in \mathrm{H}\}$ называется *слабым решением* задачи Коши (1), (2) для $f \in \mathrm{H}^-$, $u_0 \in H$ и $u_1 \in H_0^-$, ($u_1 = 0$ при $a > 0$), если $u(0) = u_0$ в $C([0,T],H)$ и справедливо тождество

$$\int_0^T\left(\frac{du}{dt}, -\frac{d\varphi}{dt} + \frac{B^*(t)}{t^{\alpha}}\varphi\right)dt + \int_0^T (u, A(t)\varphi)dt = \int_0^T \langle f, \varphi\rangle_{(t)}\,dt + \langle u_1, \varphi(0)\rangle_{(0)} \quad \forall \varphi \in \Phi, \tag{9}$$

где $\Phi \equiv \{\varphi \in \mathrm{H} : \varphi(t) \in D(A(t)) \cap D(B^*(t)), t \in [0,T]; d\varphi/dt, d^2\varphi/dt^2,\ A(t)\varphi, (B^*(t)/t^{\alpha})\varphi \in \mathrm{H};\ \varphi(T) = d\varphi(T)/dt = 0\}$, $B^*(t) : H \supset D(B^*(t)) \to H$ – сопряженные операторы к операторам $B(t) : H \supset D(B(t)) \to H$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(t)}$ – полуторалинейные формы двойственности пространств H_t^+ и H_t^-.

З а м е ч а н и е 1. Множество H_1 слабых решений гиперболического уравнения типа Эйлера-Пуассона-Дарбу (1) содержится во множестве H слабых решений не сингулярного гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка в [4].

2. Теоремы гладкости слабых решений. Выясним, когда слабые решения дифференциально-операторного уравнения типа Эйлера-Пуассона-Дарбу имеют две первые производные по *t*.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполняются условия А0–А2, В0 и В1 без неравенства (6),* $f \in \mathrm{H}^+ \cup \mathrm{H}_1$, $u_0 \in D(A(0))$, $u_1 \in D(A^{1/2}(0))$. *Если для любых* $f \in \mathrm{H}$, $u_0 \in D(A^{1/2}(0))$ *и* $u_1 \in H$ *существуют единственные слабые решения* $u \in \mathrm{H}_1$ *задачи Коши (1), (2), то они обладают следующими свойствами:*

$$u(t) \in D(A(t)), t \in [0,T];\ du(t)/dt \in D(B(t)) \text{ при п. в. } t \in]0,T[,\ du(0)/dt \in D(A^{1/2}(0));$$

$$A(t)u,\ du/dt,\ B(t)(du/dt),\ t^a(d^2u/dt^2) \in \mathrm{H}. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о осуществим модификацией разработанного в [4] метода «слабых решений вспомогательной задачи Коши» сначала для $u_0 = 0$.

1. Введем понятие слабых решений вспомогательной задачи для уравнения (1).

О п р е д е л е н и е 2 . Функция $w \in \{w \in \mathrm{H} : dw/dt \in \mathrm{H}^-, w(0) \in H\}$ называется *слабым решением* вспомогательной задачи для $f = \tilde{f} \in \mathrm{H}^-$, $u_0 = \tilde{u}_0 = 0$, $u_1 = \tilde{u}_1 \in H_0^-$ ($\tilde{u}_1 = 0$ при $a > 0$), если $w(0) = 0$ в H и она является решением уравнения

$$\int_0^T\left(\frac{d(A^{-1}(t)w)}{dt}, -\frac{d\varphi}{dt} + \frac{B^*(t)}{t^{\alpha}}\varphi\right)dt + \int_0^T (w,\varphi)dt = \int_0^T \langle \tilde{f}, \varphi\rangle_{(t)}\,dt + \langle \tilde{u}_1, \varphi(0)\rangle_{(0)} \quad \forall \varphi \in \Phi, \tag{11}$$

где множество Φ из определения 1.

С помощью следующей проекционной теоремы Лионса докажем существование слабых решений вспомогательной задачи Коши.

Т е о р е м а 2 [6, с. 37]. *Пусть* F *– г. п. с эрмитовой нормой* $\|\cdot\|_F$ *и* Ψ *– предг. п. с эрмитовой нормой* $|||\cdot|||$, *непрерывно вложенное в* F, *т.е.* $\exists c_1 > 0$, *что* $\|\psi\|_F \le c_1 |||\psi|||$ $\forall \psi \in \Psi$. *Задана полуторалинейная форма* $E(w,\psi)$ *на* $F \times \Psi$, *которая при каждом* $\psi \in \Psi$ *непрерывна по* w *на* F, *и* $\exists c_2 > 0$, *что* $|E(\psi,\psi)| \ge c_2 |||\psi|||^2$ $\forall \psi \in \Psi$. *Если антилинейный функционал* $L(\psi)$ *непрерывен по* ψ *на* Ψ, *то существует решение* $w \in F$ *уравнения* $E(w,\psi) = L(\psi)$ $\forall \psi \in \Psi$.

Можно показать [7, с. 45-53], что расширения $\overline{A^{1/2}}(t)$ и $\overline{A^{-1/2}}(t)$ операторов $A^{1/2}(t)$ и их обратных $A^{-1/2}(t)$ по непрерывности с H_t^+ и H – изометрии H на H_t^- и H_t^- на H соответственно, расширение $\overline{A^{-1}}(t)$ операторов $A^{-1}(t)$ по непрерывности с H – изометрия H_t^- на H_t^+ и $\overline{A^{-1}}(t) = A^{-1/2}(t)\overline{A^{-1/2}}(t)$ на H_t^-. В г. п. $F = \mathrm{W}_0 = \{w \in \mathrm{W} : w(0) = 0\}$, где W – замыкание множества функций $W_2^2(]0,T[,H) = \{w \in \mathrm{H} : d^i w/dt^i \in \mathrm{H}, i = 1,2\}$ по эрмитовой норме

$$\|w\|_F = \left[\int_0^T \left(\left|\overline{A^{-1/2}}(t)\frac{dw}{dt}\right|^2 + |w|^2 \right) dt + \left|\overline{A^{-1/2}}(0)\frac{dw(0)}{dt}\right|^2 + |w(0)|^2 \right]^{1/2} \tag{12}$$

при $c_1 = 1$ непрерывно вложено предг. п. Ψ – множество

$$\{\psi \in \mathrm{H} : d\psi(t)/dt \in D(A(t)) \cap D(B^*(t)),\ t \in [0,T];\quad d^2\psi/dt^2,\quad d^3\psi/dt^3,\quad A(t)(d\psi/dt),$$
$$(B^*(t)/t^\alpha)(d\psi/dt) \in \mathrm{H},\ \psi(0) = d\psi(T)/dt = d^2\psi(T)/dt^2 = 0\}$$

решений задачи Коши: $d\psi/dt = e^{c_3 t}\varphi, \psi(0) = 0,$ для $\forall \varphi \in \Phi$, наделенное эрмитовой нормой

$$|||\psi||| = \left[\int_0^T \left(\left|A^{-1/2}(t)\frac{d\psi}{dt}\right|^2 + |\psi|^2 \right) dt + \left|A^{-1/2}(0)\frac{d\psi(0)}{dt}\right|^2 + |\psi(T)|^2 \right]^{1/2}. \tag{13}$$

Постоянная $c_3 > 0$ указана ниже. На произведении $F \times \Psi$ полуторалинейная форма

$$E(w,\psi) = \int_0^T \left(\frac{d(A^{-1}(t)w)}{dt}, -\frac{d}{dt}\left(e^{-ct}\frac{d\psi}{dt}\right) + e^{-ct}\frac{B^*(t)}{t^\alpha}\frac{d\psi}{dt} \right) dt + \int_0^T e^{-ct}\left(w, \frac{d\psi}{dt}\right) dt, \quad c \ge 0, \tag{14}$$

при каждом $\psi \in \Psi$ очевидно непрерывна по w на F. Антилинейный функционал

$$L(\psi) = \int_0^T e^{-ct}\left(\tilde{f}, \frac{d\psi}{dt}\right) dt + \left(\tilde{u}_1, \frac{d\psi(0)}{dt}\right) \tag{15}$$

при каждых $\tilde{f} \in \mathrm{H}^+ \cup \mathrm{H}_1$ и $\tilde{u}_1 \in D(A^{1/2}(0))$ очевидно непрерывен по ψ на Ψ. Когда $\tilde{f} \in \mathrm{H}_1$, тогда в этом функционале надо проинтегрировать по частям один раз по t.

Остается указать константу $c_2 > 0$ в неравенстве $|E(\psi,\psi)| \ge c_2 |||\psi|||^2$ $\forall \psi \in \Psi$. Проинтегрировав по частям по t при $\forall c \ge 0$ для $\forall \psi \in \Psi$ находим равенства:

$$-2\,\mathrm{Re}\int_0^T \left(\frac{d(A^{-1}(t)\psi)}{dt}, \frac{d}{dt}\left(e^{-ct}\frac{d\psi}{dt}\right) \right) dt = 2\,\mathrm{Re}\int_0^T e^{-ct}\left(\frac{d(A^{-1}(t)\psi)}{dt}, c\frac{d\psi}{dt} - \frac{d^2\psi}{dt^2} \right) dt =$$

$$= \left|A^{-1/2}(0)\frac{d\psi(0)}{dt}\right|^2 + c\int_0^T e^{-ct}\left|A^{-1/2}(t)\frac{d\psi}{dt}\right|^2 dt +$$

$$+3\int_0^T e^{-ct}\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt}\frac{d\psi}{dt}, \frac{d\psi}{dt} \right) dt + 2\,\mathrm{Re}\int_0^T e^{-ct}\left(\frac{d^2A^{-1}(t)}{dt^2}\psi, \frac{d\psi}{dt} \right) dt,$$

$$2\,\mathrm{Re}\int_0^T e^{-ct}\left(\frac{d(A^{-1}(t)\psi)}{dt}, \frac{B^*(t)}{t^\alpha}\frac{d\psi}{dt} \right) dt = 2\,\mathrm{Re}\int_0^T e^{-ct}\frac{1}{t^\alpha}\left(B(t)A^{-1}(t)\frac{d\psi}{dt}, A(t)A^{-1}(t)\frac{d\psi}{dt} \right) dt +$$

$$+2\,\mathrm{Re}\int_0^T e^{-ct}\,\frac{1}{t^{\alpha}}\left(B(t)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}\psi,\frac{d\psi}{dt}\right)dt,$$

$$2\,\mathrm{Re}\int_0^T e^{-ct}\left(\psi,\frac{d\psi}{dt}\right)dt=e^{-cT}\left|\psi(T)\right|^2+c\int_0^T e^{-ct}\left|\psi\right|^2 dt.$$

В силу неравенств (3), (5), (7), (8) сумма их правых частей оценивается снизу величиной

$$\left|A^{-1/2}(0)\frac{d\psi(0)}{dt}\right|^2+e^{-cT}\left|\psi(T)\right|^2+(c-3a_1-a_3-2b_1-b_2)\int_0^T e^{-ct}\left|A^{-1/2}(t)\frac{d\psi}{dt}\right|^2 dt+$$

$$+(c-a_3-b_2)\int_0^T e^{-ct}\left|\psi\right|^2 dt\quad \forall\psi\in\Psi, \tag{16}$$

которая при $c=c_3=3a_1+a_3+2b_1+b_2+1$ не меньше $\exp\{-c_3T\}\left\|\psi\right\|^2$. Отсюда видим, что константа $c_2=\exp\{-c_3T\}/2$.

Поскольку по предположению теоремы 1 существует единственное слабое решение $v\in \mathrm{H}_1$ задачи Коши (1), (2) для $f=\tilde f\in \mathrm{H}^+\cup \mathrm{H}_1$, $u_0=\tilde u_0=0$, $u_1=\tilde u_1\in D(A^{1/2}(0))$ ($u_1=\tilde u_1=0$ при $a>0$) и по утверждению теоремы 2 для этих же исходных данных $\tilde f$, $\tilde u_0$, $\tilde u_1$ существует слабое решение $w\in \mathrm{W}_0$ уравнения (11), то ввиду совпадения правых частей интегральных уравнений (9) и (11) получаем представление $v=A^{-1}(t)w$ при п. в. $t\in]0,T[$. Из этого представления следует, что $A(t)v=w\in \mathrm{H}$ и $v(t)\in D(A(t))\ \forall t\in[0,T]$, так как согласно известному вложению $\mathrm{H}_1\subset C([0,T],H)$ слабое решение v после переопределения на множестве нулевой меры в $[0,T]$ становится элементом пространства всех непрерывных функций $C([0,T],H)$. Слабое решение этой задачи Коши имеет в H первую сильную производную $dv/dt=A^{-1/2}(t)\overline{A^{-1/2}}(t)(dw/dt)+(dA^{-1}(t)/dt)w\in \mathrm{H}$, так как $w\in \mathrm{H}$, $dw/dt\in \mathrm{H}^-$ по построению пространства W_0 и операторы $A^{-1/2}(t)$ и $dA^{-1}(t)/dt$ ограничены в H. По определению пространства W_0 эта производная имеет в $D(A^{1/2}(0))$ след

$$\frac{dv(0)}{dt}=A^{-1/2}(0)\overline{A^{-1/2}}(0)\frac{dw(0)}{dt}+\frac{dA^{-1}(0)}{dt}w(0)=A^{-1/2}(0)\overline{A^{-1/2}}(0)\frac{dw(0)}{dt}=\tilde u_1\in D(A^{1/2}(0)), \tag{17}$$

так как $w(0)=0$ в W_0. Поскольку операторы $B(t)A^{-1/2}(t)\in \mathsf{B}([0,T],\ \mathsf{L}(H))$ в силу условия B0, операторы $B(t)(dA^{-1}(t)/dt)\in \mathsf{B}([0,T],\ \mathsf{L}(H))$ в силу условия B1 и функции $\overline{A^{-1/2}(t)}(dw/dt)$, $w\in \mathrm{H}$, в г.п. H для операторов $B(t)$ определено значение

$$B(t)\frac{dv}{dt}=B(t)A^{-1/2}(t)\overline{A^{-1/2}}(t)\frac{dw}{dt}-B(t)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}w\in \mathrm{H}$$

и, следовательно, $dv/dt\in D(B(t))$ при п. в. $t\in]0,T[$. Из уравнения (1) находим произведение t^a на вторую сильную производную $t^a(d^2v/dt^2)=t^a\tilde f-B(t)(dv/dt)-t^a w\in \mathrm{H}$. Итак, свойства (10) слабого решения v задачи Коши (1), (2) при $u_0=0$ установлены.

2. Теперь докажем теорему 1 в общем случае $0\neq u_0\in D(A(0))$. С этой целью повторим доказательство предыдущего пункта 1 при

$$\tilde f=f-\frac{d^2A^{-1}(t)}{dt^2}A(0)u_0-A(0)u_0\in \mathrm{H},\ \tilde u_0=0,\ \tilde u_1=u_1-\frac{dA^{-1}(0)}{dt}A(0)u_0\in H \tag{18}$$

для любых $f\in \mathrm{H}^+\cup \mathrm{H}_1$, $u_0\in D(A(0))$ и $u_1\in D(A^{1/2}(0))$. В теореме 2 берем те же самые г. п. $F=\mathrm{W}_0$ с номой (12), предг. п. Ψ с номой (13), полуторалинейную форму (14) и антилинейный функционал (15). Для каждых указанных выше данных (18) функционал (15) непрерывен по ψ на пространстве Ψ в силу неравенств (4) и (5). Удвоенная вещественная часть той же формы $E(\psi,\psi)$ оценивается снизу выражением (16) и ее абсолютная величина – через $c_2\left\|\psi\right\|^2$ с той же самой постоянной c_2. Все дальнейшие рассуждения пункта 1 также остаются справедливыми для $\tilde f, \tilde u_0$ и $\tilde u_1$ вида (18) и, следовательно, задача Коши для правой части и начальных данных (18) имеет единственное слабое решение $v\in \mathrm{H}$, для которого выполняются свойства (10). Тогда сумма $u = v + A^{-1}(t)A(0)u_0$ очевидно является слабым решением задачи Коши (1), (2) для $f\in \mathrm{H}^+ \cup \mathrm{H}_1$, $u_0\in D(A(0))$, $u_1\in D(A^{1/2}(0))$ и удовлетворяет свойствам (10). В частности, ввиду равенств (17) и (18) в $D(A^{1/2}(0))$ существует след сильной производной этой суммы

$$\frac{du(0)}{dt}=\frac{dv(0)}{dt}+\frac{dA^{-1}(0)}{dt}A(0)u_0=\tilde u_1+\frac{dA^{-1}(0)}{dt}A(0)u_0=u_1\in D(A^{1/2}(0)).$$

Теорема 1 доказана.

Возникает вопрос, если операторы $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют указанным выше требованиям, то слабые решения задачи Коши удовлетворяют уравнению (1) и начальным условиям (2) только лишь в смысле интегрального уравнения (9). Исчерпывающий ответ на этот вопрос дает следующая теорема о необходимых и достаточных условиях на начальные данные u_0 и u_1 для однозначной разрешимости задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения типа Эйлера-Пуассона-Дарбу с переменными областями определения операторов. Слабые решения задачи Коши (1), (2), имеющие свойства (10), мы называем *гладкими решениями*. Гладкие решения удовлетворяют уравнению (1) в H при п. в. $t\in]0,T[$, первому и при $a=0$ второму начальным условиям (2) в обычном смысле, т.е. в $C([0,T],H)$. Можно показать, что при $a>0$ эти гладкие решения удовлетворяют второму однородному начальному условию из (2) в ослабленном смысле: $\lim\limits_{t\to 0} t^{a/2}(du(t)/dt)=0$ в H.

Т е о р е м а 3 (Критерий корректности во множестве гладких решений). *Пусть выполняются условия A0–A2, B0 и B1, множество* $\mathring{D}(L)=\{v\in D(L): v(t)\in D(B^*(t)), t\in[0,T];$ $(B^*(t)/t^{\alpha})v\in \mathrm{H}\}$ *плотно в* H *и* $f\in \mathrm{H}^+\cup \mathrm{H}_1$. *Для существования единственных слабых решений* $u\in \mathrm{H}_1$, *удовлетворяющих свойствам (10), задачи Коши (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы*

$$u_0\in D(A(0)),\ u_1\in D(A^{1/2}(0)). \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость* условий (19) вытекает из свойств (10).

Достаточность. Для любых $f\in \mathrm{H}$, $u_0\in D(A^{1/2}(0))$, $u_1\in H$ существование и единственность сильных решений $u\in C^{(1)}([0,T],H)\cap \mathrm{B}([0,T],H_t^+)$ задачи Коши (1), (2) доказываются при $\alpha=0$ в [8] и при $\alpha>0$ также как в [9]. Сильные решения задачи Коши (1), (2) являются ее слабыми решениями. Тогда справедливость свойств (10) следует из теоремы 1.

З а м е ч а н и е 2. Критерии корректной разрешимости задачи Коши для несингулярных двучленных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка установлены в [3, 8] при жестких для переменных областей определения требованиях соответствующей гладкости по t и ограниченности произведения $A^{1/2}(t)(dA^{1/2}(t)/dt)$, которые в настоящей работе отсутствуют. Например, если это произведение сильно непрерывно по t, то область определения $D(A^{1/2}(t))$ не зависит от t [10, с. 585].

3. Смешанная задача для сингулярного уравнения колебаний струны с нестационарным граничным условием. В области $G=]0,l[\times]0,T[$ независимых переменных x и t задано сингулярное гиперболическое уравнение

$$u_{tt}+t^{-\alpha}(b_1(x)u_{xt}+b_0(x)u_t)-(a(x)u_x)_x=f(x,t),\quad \alpha\in[0,1], \tag{20}$$

с зависящими от времени t граничными

$$u\big|_{x=0}=0,\quad [u_x+\beta(t)u]\big|_{x=l}=0,\quad t\in[0,T], \tag{21}$$

и начальными условиями

$$u\big|_{t=0}=u_0(x),\quad u_t\big|_{t=0}=u_1(x),\quad x\in]0,l[\ \ (u_1=0 \text{ при } \alpha>0). \qquad (22)$$

О п р е д е л е н и е 3. Функция $u\in W_2^{0,1}(G)=\{u\in L_2(G):u_t\in L_2(G)\}$ называется *слабым решением* смешанной задачи (20)–(22) для заданных функций $f\in L_2(G)$ и $u_0,\ u_1\in L_2(0,l)$ $(u_1=0$ при $\alpha>0)$, если $u(x,0)=u_0(x)$ в $C(\overline{G})$ и справедливо тождество

$$\int_G [u_t(\overline{\varphi}_t+t^{-\alpha}(b_1(x)\overline{\varphi}_x+b_0(x)\overline{\varphi})-u(a(x)\overline{\varphi}_x)_x]dxdt=\int_G f\overline{\varphi}dxdt+\int_0^l u_1(x)\overline{\varphi}(x,0)\ dx\ \ \forall\varphi\in\Phi(G),$$

где $\Phi(G)=\left\{\varphi\in W_2^2(G):t^{\alpha}\varphi_x\in L_2(G);\,\varphi\in(21),\,\varphi(l,t)=0,t\in[0,T],\,\varphi(x,T)=\varphi_t(x,T)=0,\,x\in]0,l[\right\}$.

Согласно теореме 3 имеет место следующий критерий корректной разрешимости по начальным данным в классе гладких решений этой смешанной задачи.

Т е о р е м а 4. *При* $a(x)\ge a_0>0,x\in[0,l],b_1(0)=0,b_1(l)\ge 0,a(x)\in C^{(1)}[0,l],b_i(x)\in C^{(i)}[0,l]$, $i=0,1,\beta(t)\in C^{(2)}[0,T],0\le\beta(t)\le c_4t^{\gamma},\gamma\ge\alpha,|\beta'(t)|\le c_5t^{\mu},\ \mu\ge\alpha,t\in[0,T],c_4,c_5>0,2b_0(x)-b_1'(x)\ge 0$, $2\beta(t)b_0(l)+b_0'(l)\ge 0,\ \ a'(x)b_0'(x)+a(x)b_0''(x)\le 0,\ \ a(x)b_1'(x)-b_1(x)a'(x)+2a(x)b_0(x)\ge 0,\ \ \{x,t\}\in\overline{G}$, $f(x,t)\in L_2(]0,T[,\ \mathring{W}^1_{2,t}(0,l))\cup W_2^{0,1}(G)$ *для существования единственных слабых решений, удовлетворяющих свойствам:* $u\in W_2^{2,1}(G)=\{\,u\in L_2(G):u_x,u_{xx},u_t\in L_2(G)\}$, $u\in(21),u_t(x,0)\in\mathring{W}^1_{2,0}(0,l)$, $u_{xt},t^au_{tt}\in L_2(G)$, *смешанной задачи (20)– (22) необходимо и достаточно, чтобы*

$$u_0(x)\in W_2^2(0,l),\ u_0(0)=0,\ \ [(u_0)_x(l)+b(0)u_0(l)]=0,\ u_1\in\mathring{W}^1_{2,0}(0,l),$$

где $\mathring{W}^1_{2,t}(0,l)$ *– замыкания множеств* $\{v(x)\in W_2^2(0,l):\ v(x)\in(21)\}$ *по эрмитовым нормам*

$$\|v\|_{(t)}=\left[\frac{\beta(t)}{1+\beta(t)}|v(l)|^2+\frac{1}{1+\beta(t)}|v_x(l)|^2+\int_0^l|v_x(x)|^2\,dx\right]^{1/2},\quad t\in[0,T].$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект №Ф09К-019).

Литература

1. Б а р а н о в с к а я С. Н. // Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук (01.01.02). Минск. 1992. – 13 с.
2. Ю р ч у к Н. И., Б а р а н о в с к а я С. Н., Я ш к и н В. И., Ч а р и е К о к у // Труды ИМ НАН Беларуси. 2000. Т. 6. С. 154–157.
3. Л о м о в ц е в Ф. Е. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 873–886.
4. Л я х о в Д. А., Л о м о в ц е в Ф. Е. // Вестник БГУ. Сер. 1. 2010. № . С.
5. К р е й н С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
6. L i o n s J.-L. Equations differentielles operationnelles et problemes aux limites. Berlin-Verlag. 1961.
7. Б е р е з а н с к и й Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
8. Л о м о в ц е в Ф. Е. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 2. С. 276–278.
9. Х о д о с С. П. // Вестник БГУ. Сер. 1. 2009. № 3. С. 57–62.
10. И о с и д а К. Функциональный анализ. М., 1967.

Summary

The smooth of week solutions of the Cauchy problem for hyperbolic triad-term operator-differential equation of Euler-Poisson-Darboux type with variable domains of operator coefficients is investigated. In first time the criteria of the correct solvability with respect to the initial data of the operator-differential equation of Euler-Poisson-Darboux type with variable domains and of the singular wave equation with time-dependent boundary condition are obtained.

Резюме

Исследована гладкость слабых решений задачи Коши для гиперболического трехчленного дифференциально-операторного уравнения типа Эйлера-Пуссона-Дарбу с переменными областями определения операторных коэффициентов. Впервые получены критерии корректной разрешимости по начальным данным для дифференциально-операторного уравнения типа Эйлера-Пуссона-Дарбу с переменными областями определения и сингулярного уравнения колебаний струны с зависящим от времени граничным условием.

Khodos S.P., Lomovtsev F.E.
khodos_svetlana@tut.by, lomovcev@bsu.by

On a smoothness of week solutions of hyperbolic operator-differential equation of Euler-Poisson-Darboux type with variable domains

УДК 517.95

Ходос С.П., Ломовцев Ф.Е. О гладкости слабых решениях гиперболического дифференциально-операторного уравнения типа Эйлера-Пуассона-Дарбу с переменными областями определения // Доклады НАН Беларуси. 2010. Т. 54. № 5. С. 30–35.

Исследована гладкость слабых решений задачи Коши для гиперболического трехчленного дифференциально-операторного уравнения типа Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$d^2(t)/dt^2+(B(t)/t)(du/dt)+A(t)u(t)=f(t), t\in]0,T[, a\in[0,1],$$

с зависящими от t областями определения операторов $A(t)$ и $B(t)$, действующих в гильбертовом пространстве H. В пространстве H при каждом $t\in[0,T]$ операторы $A(t)$ самосопряжены, положительны и имеют дважды дифференцируемые по t обратные операторы, операторы $B(t)$ замкнуты и подчинены квадратному корню $A^{1/2}(t)$ операторов $A(t)$ и для них выполняются некоторые неравенства. Впервые получены критерии корректной разрешимости по начальным данным задачи Коши для этого уравнения и смешанной задачи для сингулярного уравнения колебаний струны при зависящем от времени t граничном условии.

Библиогр. 10 назв.