УДК 517.956

Л о м о в ц е в Ф. Е. Смешанная задача для многомерного линеаризованного уравнения КдФ с кусочно-постоянными граничными условиями // Доклады НАН Беларуси. 2008. Т. 52. № 4. С. 11–16.

Доказаны теоремы существования и единственности слабых решений следующей смешанной задачи. В области $G =]0, T[\times\Omega$ переменных $(t, x) = (t, x_1, ..., x_n)$, где Ω – ограниченный параллелепипед в R^n, $n \geq 2$, с границей S, изучается уравнение $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x_k^3} =$ $= f(t, x)$ при почти всех $t \in]0, T[$ с граничными

$$u\big|_{S_t} = 0, \quad (\partial u / \partial x_k)\big|_{S_k^-} = 0, \; k = \overline{1, n}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k(t)(\partial^2 u / \partial x_k^2)\cos(\vec{t}\,(x'), \vec{e}_k)\big|_{S - S_t} = 0$$

и начальным $u(0, x) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, условиями. Здесь $\{S_t\}$ – неубывающее и кусочно-постоянное по t семейство частей границы S и S_k^- – множество всех точек $x' \in S$ с отрицательными косинусами углов между единичными векторами $\vec{t}\,(x')$ внешней нормали к S и $\vec{e}_k$ оси Ox_k.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.956

Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КДФ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

(Представлено академиком И.В. Гайшуном)

Белорусский государственный университет *Поступило 06.03.2007*

Одномерные нелинейные волновые процессы моделируются уравнением Кортевега-де Фриса (КдФ) [1]. Одномерные линеаризованные уравнения КдФ высших порядков, вырождающиеся в параболические, изучались в [2]. В настоящей работе впервые установлена корректность смешанной задачи для многомерного линеаризованного уравнения КдФ третьего порядка.

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega=\prod_{k=1}^{n}]0,g_k[$ – ограниченный параллелепипед в R^n, $n\ge 2$, переменных $x=(x_1,...,x_n)$ и S – его граница. В области $G=]0,T[\times\Omega$ изучается уравнение

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x_k^3} = f(t,x),\quad (t,x)\in G, \tag{1}$$

при почти всех t (в дальнейшем при п. в. t) с граничными условиями

$$u\big|_{S_t}=0;\quad (\partial u/\partial x_k)\big|_{S_k^-}=0,\ k=\overline{1,n};\quad \sum_{k=1}^{n} a_k(t)(\partial^2 u/\partial x_k^2)\cos(\vec{t}(x'),\vec{e}_k)\big|_{S-S_t}=0, \tag{2}$$

где $\{S_t\}$ – семейство частей границы S, поверхностная мера которых положительна, и S_k^- – множество всех точек $x'\in S$ с отрицательными косинусами углов между единичными векторами $\vec{t}(x')$ внешней нормали к S в точке x' и $\vec{e}_k$ оси Ox_k, и начальным условием

$$u(0,x)=u_0(x),\quad x\in\Omega. \tag{3}$$

Докажем теоремы существования и единственности слабых решений этой смешанной задачи.

2. Определение слабых решений. Сначала введем пространства слабых решений и исходных данных. Пусть при п. в. t гильбертовы пространства (в дальнейшем г.п.) $H^{+}_{1/3,\,t}(\Omega)$ – замыкание множества всех функций пространства Соболева $W_2^3(\Omega)$, удовлетворяющих граничным условиям (2), по эрмитовым нормам $\big[|u|\big]_{1/3,\,t}=\left(\int_\Omega\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\left|\partial u/\partial x_k\right|^2 dx\right)^{1/2}$, эквивалентным норме $\|\cdot\|_1$. Символами $\|\cdot\|_s$ обозначаем нормы пространств Соболева $W_2^s(\Omega)$. Функции из пространства $H^{+}_{1/3,\,t}(\Omega)$ при п. в. t удовлетворяют условию $u\big|_{S_t}=0$ в обычном смысле. Пространством слабых решений будет г.п. $\mathcal{H}^{+}_{1/3}(G)=L_2(]0,T[,\ H^{+}_{1/3,\,t}(\Omega))$ – измеримая и интегрируемая в квадрате по t сумма пространств $H^{+}_{1/3,\,t}(\Omega)$ [2, с. 62]. Пусть при п. в. t г.п. $H^{*-}_{1/3,\,t}(\Omega)$ с эрмитовыми нормами $\big]|v|\big[_{1/3,-t}=\left(\int_\Omega \big]v\big[^2_{1/3,-t}\,dx\right)^{1/2}$ – антидвойственные к г.п.

$H^{*+}_{1/3,\,t}(\Omega)$, получающимся замыканием по норме $[|\cdot|]_{1/3,\,t}$ множества всех функций $v\in W_2^3(\Omega)$, для которых выполняются сопряженные граничные условия

$$v\big|_{S_t}=0;\quad (\partial v/\partial x_k)\big|_{S_k^+}=0,\ k=\overline{1,n};\quad \sum_{k=1}^{n} a_k(t)(\partial^2 v/\partial x_k^2)\cos(\vec{t}\,(x'),\vec{e}_k)\big|_{S-S_t}=0, \tag{4}$$

где S_k^+ – множество всех точек $x'\in S$ с $\cos(\vec{t}\,(x'),\vec{e}_k)>0$. В качестве пространств правых частей уравнения (1) и условия (2) возьмем г.п. $\mathscr{H}^{*-}_{1/3}(G)=L_2(]0,T[,\ H^{*-}_{1/3,\,t}(\Omega))$ – измеримая и интегрируемая в квадрате по t сумма пространств $H^{*-}_{1/3,\,t}(\Omega)$, и $L_2(\Omega)$ соответственно.

Определение. Для исходных данных $f\in\mathscr{H}^{*-}_{1/3}(G)$ и $u_0\in L_2(\Omega)$ функция $u\in\mathscr{H}^{+}_{1/3}(G)$ называется *слабым решением* смешанной задачи (1) – (3), если

$$-\int_0^T\!\!\int_\Omega\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial^2\overline{j}}{\partial x_k^2}\ +\ u\frac{\partial\overline{j}}{\partial t}\right\}dxdt\ =\ \int_0^T\!\!\int_\Omega\left\langle f,\overline{j}\right\rangle_{1/3,\,t}dxdt\ +\ \int_\Omega u_0(x)\overline{j}\,(0,x)dx \tag{5}$$

для любой функции $j\in\varPhi(G)\equiv\{j\in W_2^{0,3}(G):\ j\in(4)$ *при п.в.* t; $\partial j/\partial t\in L_2(G)$, $j(T,x)=0$, $x\in\Omega\}$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1/3,\,t}$ – полуторалинейная форма антидвойственности между пространствами $H^{*+}_{1/3,\,t}(\Omega))$ и $H^{*-}_{1/3,\,t}(\Omega))$, а черта над функцией – знак ее комплексного сопряжения.

3. Теорема существования слабых решений. Докажем существование ее слабых решений.

Т е о р е м а 1. *Если* $a_k(t)\in C[0,T]$, $a_k(t)\ge a_0>0$, $\partial a_k(t)/\partial t\in L_\infty(0,T)$, $k=\overline{1,n}$, *и при п. в.* t *для семейства* $\{S_t\}$ *справедливо вложение* $S_t\supset\bigcup_{k=1}^{n}S_k^-$, *тогда для каждых* $f\in\mathscr{H}^{*-}_{1/3}(G)$ *и* $u_0\in L_2(\Omega)$ *существует слабое решение* $u\in\mathscr{H}^{+}_{1/3}(G)$ *смешанной задачи (1)– (3).*

Д о к а з а т е л ь с т в о осуществляется с помощью проекционной теоремы 2 из [3, с. 37].

Т е о р е м а 2. *Пусть* F *– гильбертово пространство с эрмитовой нормой* $\|\cdot\|_F$ *и* $\varPhi$ *– предгильбертово пространство с эрмитовой нормой* $|||\cdot|||$, *непрерывно вложенное в* F, *т.е. существует постоянная* $c_1>0$ *такая, что* $\|j\|_F\le c_1|||j|||$ $\forall j\in\varPhi$. *Задана полуторалинейная форма* $E(w,j)$ *на* $F\times\varPhi$, *которая при каждом* $j\in\varPhi$ *непрерывна по* w *на* F, *и существует постоянная* $c_2>0$ *такая, что* $|E(j,j)|\ge c_2|||j|||^2$ $\forall j\in\varPhi$. *Если антилинейный функционал* $L(j)$ *непрерывен по* j *на* $\varPhi$, *то существует элемент* $w\in F$, *удовлетворяющий уравнению* $E(w,j)=L(j)$ $\forall j\in\varPhi$.

На г.п. $F=\mathscr{H}^{+}_{1/3}(G)$ с эрмитовой нормой $\|u\|_F=\left(\int_0^T\int_\Omega\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\left|\partial u/\partial x_k\right|^2dxdt\right)^{1/2}$ и предгильбертовом пространстве $\varPhi=\varPhi(G)$ с эрмитовой нормой $|||j|||=\left(\|j\|_F^2\ +\ \int_\Omega|j(0,x)|^2dx\right)^{1/2}$ возьмем следующие полуторалинейную форму и антилинейный функционал

$$E(w,j)=-\int_0^T\!\!\int_\Omega e^{c\langle x\rangle}\left\{\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\frac{\partial w}{\partial x_k}\frac{\partial^2\overline{j}}{\partial x_k^2}\ +\ c\sum_{k=1}^{n}a_k(t)w\frac{\partial^2\overline{j}}{\partial x_k^2}\ +\ w\frac{\partial\overline{j}}{\partial t}\right\}dxdt,\quad c>0,$$

$$L(j) = \int_0^T\int_\Omega \left\langle f, \bar{j} \right\rangle_{1/3,\,t} dxdt \ + \ \int_\Omega u_0(x)\bar{j}(0,x)dx, \quad \langle x\rangle = x_1 + ... + x_n .$$

Тогда пространство Φ непрерывно вложено в пространство F с постоянной $c_1 = 1$. Форма $E(w,j)$ при каждом $j \in \Phi$ непрерывна по w на F. Оценим снизу $\mathrm{Re}\,E(j,j)$ $\forall j \in \Phi(G)$. Ввиду соответственно второго условия из (4) и равенства $j(T,x) = 0$, $x \in \Omega$, верны неравенства

$$-\mathrm{Re}\int_0^T\int_\Omega e^{c\langle x\rangle}\sum_{k=1}^n a_k(t)\frac{\partial j}{\partial x_k}\frac{\partial^2 \bar{j}}{\partial x_k^2}dxdt \ \ge \ \frac{c}{2}\int_0^T\int_\Omega e^{c\langle x\rangle}\sum_{k=1}^n a_k(t)\left|\frac{\partial j}{\partial x_k}\right|^2 dxdt, \tag{6}$$

$$-\mathrm{Re}\int_0^T\int_\Omega e^{c\langle x\rangle} j\,\frac{\partial \bar{j}}{\partial t}dxdt \ = \ \frac{1}{2}\int_\Omega e^{c\langle x\rangle}\left|j(0,x)\right|^2 dx. \tag{7}$$

Л е м м а. *Если в параллелепипеде* Ω *при п. в.* t *имеет место вложение* $S_t \supset \bigcup_{k=1}^n S_k^-$, *то при п. в.* t *для каждой функции* $v \in W_2^{0,2}(\Omega)$, *удовлетворяющей граничным условиям* $(\partial v/\partial x_k)\big|_{S_k^+} = 0$, $k = \overline{1,n}$, *при п. в.* t *выполняется условие* $\sum_{k=1}^n a_k(t)(\partial v/\partial x_k)\cos(\vec{t}(x'),\vec{e}_k)\big|_{S-S_t} = 0$.

С помощью этой леммы и неравенства Буняковского получается неравенство

$$-\mathrm{Re}\int_0^T\int_\Omega e^{c\langle x\rangle}\sum_{k=1}^n a_k(t)j\,\frac{\partial^2\bar{j}}{\partial x_k^2}dxdt \ = \ \int_0^T\int_\Omega e^{c\langle x\rangle}\sum_{k=1}^n a_k(t)\left|\frac{\partial j}{\partial x_k}\right|^2 dxdt \ + \ c\,\mathrm{Re}\int_0^T\int_\Omega e^{c\langle x\rangle}\sum_{k=1}^n a_k(t)j\,\frac{\partial\bar{j}}{\partial x_k}dxdt \ge$$

$$\ge\left(\int_0^T\int_\Omega e^{c\langle x\rangle}\sum_{k=1}^n a_k(t)\left|\frac{\partial j}{\partial x_k}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}\left[\left(\int_0^T\int_\Omega e^{c\langle x\rangle}\sum_{k=1}^n a_k(t)\left|\frac{\partial j}{\partial x_k}\right|^2 dxdt\right)^{1/2} - \ c\ \left(\int_0^T\int_\Omega e^{c\langle x\rangle}\sum_{k=1}^n a_k(t)\left|j\right|^2 dxdt\right)^{1/2}\right],$$

правая часть которого, в силу неравенства $\int_\Omega |j|^2 dx \le c_3\int_\Omega\sum_{k=1}^n a_k(t)\left|\partial j/\partial x_k\right|^2 dx$, $c_3 > 0$, при достаточно малом значении $c = c_4 \le 1$ оценивается снизу неотрицательной величиной

$$0 \le \sqrt{a_0}\ \left[\sqrt{a_0} - c_4\left(\max_{t\in[0,T]}\sum_{k=1}^n a_k(t)\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{c_4}{2}\sum_{k=1}^n g_k\right\}\sqrt{c_3}\right]\ \int_0^T\int_\Omega e^{c\langle x\rangle}\sum_{k=1}^n\left|\frac{\partial j}{\partial x_k}\right|^2 dxdt. \tag{8}$$

Поскольку сумма правых частей формул (6)–(8) не меньше $(c_4/2)\left\|j\right\|^2$, то тем более абсолютная величина $\left|E(j,j)\right| \ge (c_4/2)\left\|j\right\|^2$ $\forall j \in \Phi(G)$.

Таким образом, согласно теореме 2 уравнение $E(w,j) = L(j)$ $\forall j \in \Phi(G)$ имеет решение $w \in \mathcal{H}^+_{1/3}(G)$ и, следовательно, смешанная задача (1)–(3) имеет слабое решение $u = \exp\{c_4\langle x\rangle\}\, w \in \mathcal{H}^+_{1/3}(G)$. Теорема 1 доказана.

4. Теорема единственности слабых решений. Пусть семейство $\{S_t\}$ не убывает почти всюду по $t \in [0,T]$, т.е. при п.в. t_1 и t_2 справедливо вложение $S_{t_1} \subset S_{t_2}$, $0 < t_1 < t_2 < T$. В этом случае для семейства г.п. $\{H^+_{1/3,\,t}(\Omega)\}$ при п.в. t_1 и t_2 имеет место вложение $H^+_{1/3,\,t_1}(\Omega)\supset H^+_{1/3,\,t_2}(\Omega)$, $0<t_1<t_2<T$. Докажем единственность слабых решений задачи (1)–(3).

Теорема 3. *Пусть выполняются предположения теоремы 1 и семейство $\{S_t\}$ не убывает и кусочно-постоянное почти всюду по $t\in[0,T]$. Тогда для каждых $f\in\mathcal{H}^{*-}_{1/3}(G)$ и $u_0\in L_2(\Omega)$ слабое решение $u\in\mathcal{H}^+_{1/3}(G)$ смешанной задачи (1) – (3) единственно.*

Доказательство. Если $\mathcal{H}^+_{1/3}(G)\ni u$ – слабое решение смешанной задачи (1) – (3) для $f=0$ и $u_0=0$, то из тождества (5) имеем тождество

$$\int_0^T\int_\Omega\left\{\sum_{k=1}^n a_k(t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial^2\bar{j}}{\partial x_k^2}\;+\;u\frac{\partial\bar{j}}{\partial t}\right\}dxdt=0\quad\forall j\in\Phi(G)\,. \tag{9}$$

В случае семейства $\{S_t\}=S_0$ при п.в. $t\in[0,t_1[$, $0<t_1<T$, здесь можно положить $j(t,x)=$ $=-\int_t^{t_1}e^{-2cs}A^{*-1}(s)u(s,x)ds,\quad 0\le t<t_1,\quad j(t,x)=0,\quad t_1\le t\le T,\quad x\in\Omega$, или тоже самое $u=$ $=e^{2ct}A^*(t)(\partial j/\partial t)$ для $t\in[0,t_1[$ и $j(t,x)=0$ для $t\in[t_1,T]$, $x\in\Omega$, где $A^{*-1}(t)$ – ограниченные обратные операторы в $L_2(\Omega)$ операторов $A^*(t)$, порожденных в $L_2(\Omega)$ дифференциальными выражениями $\mathring{A}^*(t)v=\sum_{k=1}^n a_k(t)\partial^3v/\partial x_k^3$ на всех функциях множества $D(A^*(t))=\{v\in L_2(\Omega):\ v\in(4)$ при п.в. t, $\mathring{A}^*(t)v\in L_2(\Omega)\}$. В силу постоянства семейства $\{S_t\}$ почти всюду на $[0,t_1[$, такая функция j удовлетворяет граничным условиям (4) при п.в. $t\in[0,t_1[$, так как $A^*(t)\int_t^{t_1}e^{-2cs}A^{*-1}(s)u(s,x)ds=\int_t^{t_1}e^{-2cs}A^*(t)A^{*-1}(s)u(s,x)ds$ при п.в. $t<t_1$, ввиду замкнутости операторов $A^*(t)$ и ограниченности операторов $A^*(t)\,A^{*-1}(s)\in$ $\in L_\infty(]0,t_1[\times]0,t_1[,\ \mathcal{L}(L_2(\Omega)))$ [4, лемма 7.1, с. 176].

Для этой функции j из тождества (9) после интегрирования по частям имеем равенство

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega e^{2ct}\left\{-A^*(t)\frac{\partial j}{\partial t}A^*(t)\bar{j}\;+\;A^*(t)\frac{\partial j}{\partial t}\frac{\partial\bar{j}}{\partial t}\right\}dxdt=0. \tag{10}$$

Поскольку операторы $A^*(t)$ являются сужением операторов $\mathring{A}^*(t)$ на $D(A^*(t))$, то

$$-\operatorname{Re}\int_0^{t_1}\int_\Omega e^{2ct}A^*(t)\frac{\partial j}{\partial t}A^*(t)\bar{j}\,dxdt=\frac12\int_\Omega\left|A^*(0)j(0,x)\right|^2dx+c\int_0^{t_1}\int_\Omega e^{2ct}\left|A^*(t)j\right|^2dxdt+$$

$$+\operatorname{Re}\int_0^{t_1}\int_\Omega e^{2ct}\frac{\partial\mathring{A}^*(t)}{\partial t}j\,A^*(t)\bar{j}\,dxdt\;\ge\;(c-c_5)\int_0^{t_1}\int_\Omega e^{2ct}\left|A^*(t)j\right|^2dxdt\,,$$

так как существует $c_5>0$, что $\left\|\left(\partial\mathring{A}^*(t)/\partial t\right)A^{*-1}(t)g\right\|_0\le c_5\|g\|_0\ \ \forall g\in L_2(\Omega)$ при п.в. $t\in]0,t_1[$ [4, лемма 7.1, с. 176] . Поэтому, оценивая вещественную часть равенства (10) снизу и учитывая положительность операторов $A^*(t)\ge 0$, приходим к неравенству $(c-c_5)\int_0^{t_1}\int_\Omega e^{2ct}\left|A^*(t)j\right|^2 dxdt \le 0$, из которого при $c>c_5$ заключаем, что $j=0$ и, значит, $u=0$ при п.в. $t\in \left]0,t_1\right[$.

Тогда из тождества (9) получаем тождество

$$\int_{t_1}^{T}\int_\Omega \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial^2 \overline{j}}{\partial x_k^2} \;+\; u\frac{\partial \overline{j}}{\partial t}\right\}dxdt = 0 \quad \forall j \in \Phi(G). \tag{11}$$

В случае семейства $\{S_t\} = S_{t_1}$ при п.в. $t\in\left[t_1,t_2\right[$, $t_1<t_2<T$, здесь можно положить

$$j(t,x)=\begin{cases}0, & t\in[t_2,T],\ x\in\Omega,\\ -\int_t^{t_2} e^{-2cs}A^{*-1}(s)u(s,x)ds, & t\in[t_1,t_2[,\ x\in\Omega,\\ y(t,x), & t\in[0,t_1[,\ x\in\Omega,\end{cases} \tag{12}$$

где $y(t,x)$ – сильное решение (обратной) смешанной задачи

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} \;-\; \sum_{k=1}^{n} a_k(0)\left(\frac{\partial^3 y(t,x)}{\partial x_k^3} \;+\; \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x_k^2}\right) = 0,\ \ (t,x)\in\left]0,t_1\right[\times\Omega,$$

$$y\in(4)\ \ \textit{при п.в.}\ \ t\in\left]0,t_1\right[;\quad y(t_1,x) = -\int_{t_1}^{t_2} e^{-2cs}A^{*-1}(s)u(s,x)ds,\quad x\in\Omega,$$

которая заменой $t'=t_1-t$ сводится к соответствующей (прямой) смешанной задаче. Согласно теореме 3 гладкости из [5], примененной к этой смешанной задаче в г.п. $H = L_{2,r}(\Omega)$ с весом $r(x)=\exp\{\langle x\rangle\}$, $\mathrm{H}^q = L_2(]0,t_1[,W^q)$ и W^q — область определения $D(A^{*q}(0))$ оператора $A^{*q}(0)$ с нормой $|v|_q = \left\|A^{*q}(0)v\right\|_0$, при $q=2/3$ и $q_0=1/3$, ее сильное решение $y\in W_2^{0,3}(]0,t_1[\times\Omega)$, y удовлетворяет граничным условиям (4) при п.в. $t\in\left]0,t_1\right[$ и $\partial y/\partial t\in L_2(]0,t_1[\times\Omega)$, так как $y(t_1,x)\in D(A^{*2/3}(0))$. Действительно, очевидные неравенства $\left\|A^*(0)v\right\|_0\le c_6\left\|v\right\|_3$, $c_6>0$, и $\left\|A^{*-1}(0)A^*(0)v\right\|_0 = \left\|v\right\|_0$ $\forall v\in D(A^*(0))$ означают, что оператор $p = A^*(0)\in\mathscr{L}(W_2^3(\Omega),L_2(\Omega))$ **I** $\mathscr{L}(L_2(\Omega),W^{-1})$ и, следовательно, по теореме 5.1 об интерполяции $p\in\mathscr{L}([W_2^3(\Omega),L_2(\Omega)]_q$, $[L_2(\Omega),W^{-1}]_q)$, $0<q<1$, [6, с. 41]. При $q=1/3$ промежуточные пространства $[W_2^3(\Omega),L_2(\Omega)]_{1/3} = W_2^2(\Omega)$, согласно теореме 9.1 из [6, с. 56], и $[L_2(\Omega),W^{-1}]_{1/3} = [W^0,W^{-1}]_{1/3} = W^{-1/3}$ по определению 2.1 из [6, с. 23]. Итак, непрерывный оператор $p\in\mathscr{L}(W_2^2(\Omega),W^{-1/3})$, т.е.

$$\left\|A^{*2/3}(0)v\right\|_0 = \left\|A^{*-1/3}(0)A^*(0)v\right\|_0 \le c_7\left\|v\right\|_2,\ \ c_7>0,\ \ \forall v\in D(A^{*2/3}(0)). \tag{13}$$

С другой стороны, во-первых, по определению дробных степеней операторов для $\forall v\in D(A^{*2/3}(0))$ $\exists v_n\in D(A^*(0))$, что $v_n\to v$ и $A^{*2/3}(0)v_n\to A^{*2/3}(0)v$ в $L_2(\Omega)$ при $n\to\infty$ [4, с. 140].

Во-вторых, ясно, что замыкание области $D(A^*(0))$ в норме $\|\cdot\|_2$ равно множеству $\mathrm{D}(t) =$ $=\{v\in W_2^2(\Omega): v\big|_{S_t}=0;\ (\partial v/\partial x_k)\big|_{S_k^+}=0,\ k=\overline{1,n},\}$ при $t=0$. Поскольку по построению функция $y(t_1,x)\in \mathrm{D}(t_1)$ и ввиду не убывания $\{S_t\}$ по t множества $\mathrm{D}(0)\supset \mathrm{D}(t_1)$, то $y(t_1,x)\in D(A^{*2/3}(0))$, в силу оценки (13). Аналогично доказывается вложение $L_2(]0,t_1[,H^{*+}_{1/3,\,0})\subset W^{1/3}$ при $q_0=1/3$.

Для функции j, заданной формулой (12), тождество (11) превращается в равенство

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} e^{2ct}\left\{-A^*(t)\frac{\partial j}{\partial t}A^*(t)\overline{j} \ + \ A^*(t)\frac{\partial j}{\partial t}\frac{\partial \overline{j}}{\partial t}\right\}dxdt = 0,$$

из которого также как из равенства (10) выводится, что $u=0$ при п.в. $t\in\,]t_1,t_2[$ и т.д. Таким образом, за конечное число шагов мы заключаем, что $u=0$ при п.в. $t\in\,]0,T[$. Случай счетного количества интервалов постоянства $\{S_t\}$ по $t\in[0,T]$ сводится к их конечному числу, если воспользоваться определением множества нулевой меры в $[0,T]$. Теорема 3 доказана.

Замечание. Для всех слабых решений $u\in \mathscr{H}^+_{1/3}(G)$ задачи (1)–(3) выполняется оценка

$$\int_0^T\int_\Omega \sum_{k=1}^n a_k(t)\left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_k}\right|^2 dxdt \ \le \ \frac{4}{c_4^2}\left(\int_0^T\int_\Omega]\,f(t,x)[^2_{1/3,-t}\,dxdt \ + \ \int_\Omega |u_0(x)|^2\,dx\right).$$

О существовании слабых решений задачи (1)–(3) докладывалось на конференции [7].

Литература

1. Korteweg D. J., de Vries G. // Phyl. May. 1895. Vol. 39. P. 422 — 443.
2. Ю р ч у к Н. И. // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 3. С. 560 — 563.
3. L i o n s J.-L. Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Berlin, 1961.
4. К р е й н С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
5. Л о м о в ц е в Ф. Е. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 7. С. 1132 — 1141.
6. Л и о н с Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
7. Л о м о в ц е в Ф. Е. // Международн. математ. конференц. “Еругинские чтения - X”: Тез. докл., Могилев, 24—26 мая, 2005 / Могилевск. гос. ун-т. Могилев, 2005. С. 165 — 166.

F. E. LOMOVTSEV

A MIXED PROBLEM FOR LINED MANY-DIMENSION KDV EQUATION
WITH PIECE-CONSTANT BOUNDARY CONDITIONS

The existence and uniqueness theorems of weak solutions of the new mixed problem for lined many-dimension KdV equation with the piece-constant boundary conditions are proved.