УДК 517.955

Л о м о в ц е в Ф. Е. **Задачи Коши для гиперболических факторизованных дифференциально-операторных уравнений четных порядков с переменными областями определения** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2. С. 78–83.

Функциональным методом доказаны теоремы существования и единственности сильных решений задач Коши

$$\left(d^2/dt^2 + A_m(t)\right) \mathbf{L} \left(d^2/dt^2 + A_1(t)\right) u = f,\ t \in \left]0,T\right[,$$

$$d^j u/dt^j \big|_{t=0} = j_j \in H,\ 0 \le j \le 2m-1,\ m = 1,\ 2, \ldots,$$

где $A_k(t)$ – самосопряженные положительно определенные операторы в гильбертовом пространстве H с зависящими от t областями определения. Их обратные $A_k^{-1}(t)$ имеют сильные производные по t $\left(A_k^{-1}(t)\right)^{(i)}$, $i = 1, 2$, такие, что

$$-\left((A_k^{-1}(t))^{(1)} g, g\right)_H \le c_1 \left(A_k^{-1}(t) g, g\right)_H \quad \forall g \in H,$$

$$\left|\left((A_k^{-1}(t))^{(2)} g, v\right)_H\right| \le c_2 \left|g\right|_H \left(A_k^{-1}(t) v, v\right)_H^{1/2} \quad \forall g, v \in H.$$

Получена формула $u = \overline{M_1}^{-1} \mathbf{L}\, \overline{M_m}^{-1} \Im$ сильных решений этих задач Коши.

Библиогр. 3 назв.

Lomovtsev F. E. Cauchy problems for hyperbolic factorized even-order differential-operator equations with variable domains

УДК 517.955

Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФАКТОРИЗОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТНЫХ ПОРЯДКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

The existence and uniqueness theorems of strong solutions of the Cauchy problems for hyperbolic factorized even-order differential equations with variable domains of smooth operator coefficients are proved. The formula of their strong solutions $u = \overline{M_1}^{-1}\,\mathbf{L}\,\overline{M_m}^{-1}\,\Im$ is obtained for the first time.

Докажем корректную сильную разрешимость задач Коши (ЗК) для гиперболических факторизованных дифференциальных уравнений четных порядков с переменными областями определения операторных коэффициентов. Случай постоянных областей определения исследован в работе [1]. В настоящей работе доказательства проводятся функциональным методом , родственным методу из [1]. В отличие от [1] вывод априорных оценок обобщен на случай переменных областей определения и дополнен новыми интерполяционными неравенствами (11), приведено новое доказательство разрешимости и впервые получена формула сильных решений (14).

Постановка задач. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$ рассматриваются задачи Коши:

$$\mathrm{L}_m(t)u \equiv \left(d^2/dt^2 + A_m(t)\right)\mathbf{L}\left(d^2/dt^2 + A_1(t)\right)u = f,\ t \in \left]0,T\right[, \qquad (1)$$

$$\mathbf{l}_j u \equiv d^j u/dt^j\big|_{t=0} = j_j \in H,\ 0 \le j \le 2m-1,\ m = 1,\ 2,\ldots, \qquad (2)$$

где u, f – функции t со значениями в H, $A_k(t)$ – самосопряженные положительные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A_k(t))$.

1. Операторы $A_k(t)$, $t \in [0,T]$, являются сужениями на $D(A_k(t))$ линейных операторов $\breve{A}_k(t)$ в H с не зависящими от t областями определения $D(\breve{A}_k)$.

2. Их обратные $A_k^{-1}(t) \in L_\infty(\left]0,T\right[, \mathcal{L}(H))$ при почти всех t в H имеют сильную производную $dA_k^{-1}(t)/dt \in L_\infty(\left]0,T\right[, \mathcal{L}(H))$, удовлетворяющую неравенствам

$$-\left((dA_k^{-1}(t)/dt)g, g\right) \le c_k^{(1)}\left(A_k^{-1}(t)g, g\right)\ \forall g \in H\ . \qquad (3)$$

3. Операторы $dA_k^{-1}(t)/dt$ при почти всех t в H имеют сильную производную $d^2A_k^{-1}(t)/dt^2 \in L_\infty(\left]0,T\right[, \mathcal{L}(H))$, удовлетворяющую неравенствам

$$\left|\left((d^2A_k^{-1}(t)/dt^2)g, v\right)\right| \le c_k^{(2)}|g|\left(A_k^{-1}(t)v, v\right)^{1/2}\ \forall g, v \in H\ . \qquad (4)$$

4. Области определения $D(A_k^m(t))$ степеней $A_k^m(t)$ плотны в H для всех $1 \le k \le m$; для $\forall t \in [0,T]$ эквивалентны нормы: $|A_s(t)u| \sim |A_k(t)u| \sim |A_s(t)u - A_k(t)u|$ $\forall u \in D(A_k(t))$, $1 \le s \ne k \le m$; и при $a \le 2m-4$

$$\left|A_s(t)A_k(t)v - A_k(t)A_s(t)v\right|_{a(t)} \le c_{s,k}|v|_{(a+3)(t)}\ \ \forall v \in W^{a+4}(t),\ t \in [0,T],\ s \ne k, \qquad (5)$$

где гильбертовы пространства $W^b(t)$ – области определения $D(A_1^{b/2}(t))$ степеней $A_1^{b/2}(t)$, наделенные эрмитовыми нормами $|v|_{b(t)} = \left|A_1^{b/2}(t)v\right|$, $b \le 2m$.

5. Существуют не зависящие от t банаховы пространства $V^{2i}, 0 \le i \le m$, такие, что $V^0 = H$; $V^2 = D(\breve{A}_k)$; $V^{2j} \subset V^{2i}$, $j > i$; $W^{2i}(t) \subset V^{2i}$ $\forall t \in [0,T]$, $0 \le i \le m$;

и существуют сильные производные $d^i \tilde{A}_k(t)/dt^i \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(V^{2[j/2]+2},V^{2[j/2]}))$, $0 \le j \le 2m-2-i,\ 0 \le i \le 2m-2$, где $[\cdot]$ – целая часть числа.

Постоянные $c_k^{(1)},\ c_k^{(2)},\ c_{s,k} \ge 0$ не зависят от $g,\ v$ и t.

Однозначность и устойчивость. Обозначим через $\mathcal{H}^a$ гильбертовы пространства $L_2\left(]0,T[,W^a(t)\right)$ с эрмитовыми нормами $\|\cdot\|_a,\ a \le 2m$. Пусть банаховы пространства E^m – пополнения множеств $D(L_m) = \{u \in D(\tilde{L}_m):$ $d^s u/dt^s \in \mathcal{H}^{2m-2[(s+1)/2]},\ 0 \le s \le 2m-1\}$, где $D(\tilde{L}_m) = \{u \in \mathcal{H}^0:\ d^s u/dt^s \in$ $L_2\left(]0,T[,V^{2m-2[(s+1)/2]}\right),\ 0 \le s \le 2m; \dfrac{d^{2m-2}u}{dt^{2m-2}},\ \dfrac{d^{a_1}\tilde{A}_{k_1}(t)}{dt^{a_1}} \ldots \dfrac{d^{a_p}\tilde{A}_{k_p}(t)}{dt^{a_p}} \dfrac{d^{2m-2-2p-|a(p)|}u}{dt^{2m-2-2p-|a(p)|}} \in \mathcal{H}^2,$ $0 \le |a(p)| \le 2m-2-2p,\quad 1 \le p \le m-1,\ 1 \le k_1,\dots,k_p \le m,\ k_i \ne k_j\},\quad a(p) = (a_1,\dots,a_p)$ и $|a(p)| = a_1 + \dots + a_p$, по нормам $\||u\||_m = \left\{\sup\limits_{0<t<T} \sum\limits_{i=0}^{2m-1} \left| \dfrac{d^i u(t)}{dt^i} \right|^2_{(2m-1-i)(t)} \right\}^{1/2}$. Пусть $F^m = \mathcal{H}^0 \times W^{2m-1}(0) \times \ldots \times W^1(0) \times H$ – гильбертовы пространства элементов $\Im = \{f, j_0,\dots,j_{2m-1}\} \in F^m$ с нормами

$$\langle\|\Im\|\rangle_m = \left(\|f\|_0^2 + \sum_{j=0}^{2m-1} \left| j_j \right|^2_{(2m-1-j)(0)} \right)^{1/2}.$$

ЗК (1), (2) соответствуют линейные неограниченные операторы $L_m \equiv \{\mathrm{L}_m(t),\ \mathbf{l}_0,\dots,\mathbf{l}_{2m-1}\} : E^m \supset D(L_m) \to F^m$. Стандартным образом доказывается, что если выполняются условия 1, 2, 4 и 5, то они допускают замыкания $\overline{L_m} : E^m \supset D(\overline{L_m}) \to F^m$. Решения операторных уравнений $\overline{L_m}\, u = \Im,\ \Im \in F^m$, $m = 1,\ 2,\dots$, называются с и л ь н ы м и р е ш е н и я м и ЗК (1), (2). Выведем априорные оценки этих решений.

Теорема 1. *Если выполняются условия 1, 2, 4 и 5, сильная производная* $dA_1^{-m}(t)/dt \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H,W^{2m-1}(t)))$ *при* $m > 1$ *и* $D(L_m)$ *плотны в* $\mathcal{H}^0$, *то*

$$\||u\||_m^2 \le c_0(m) \langle\|\overline{L_m} u\|\rangle_m^2 \quad \forall u \in D(\overline{L_m}),\ c_0(m) > 0,\ m = 1,\ 2,\dots. \qquad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\mathrm{M}_k(t) = d^2/dt^2 + \tilde{A}_k(t),\ \mathrm{L}_k^{(s,n)}(t) =$ $= \mathrm{M}_n(t) \ldots \mathrm{M}_{k+1}(t)\mathrm{M}_{k-1}(t) \ldots \mathrm{M}_s(t),\ 1 \le s \le k \le n \le m$, и запишем $\mathrm{L}_m(t) =$ $= \mathrm{M}_k(t)\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t) + \mathrm{P}_{k,m}(t)$, где в силу неравенств (5)

$$|\mathrm{P}_{k,m}(t)\,u|^2 \le \tilde{c}_k \sum_{i=0}^{2m-3} \left| d^i u/dt^i \right|^2_{(2m-1-i)(t)} \quad \forall u \in D(L_m),\ \tilde{c}_k \ge 0. \qquad (7)$$

Операторы сглаживания $A_{k,e}^{-1}(t) = (I + e A_k(t))^{-1},\ e > 0$, имеют свойства [2]:

1) при $\forall\ t \in [0,T]$ норма $\left|A_{k,e}^{-1}(t)v - v\right| \to 0\ \ \forall v \in H$, если $e \to 0$;

2) существует сильная производная по t в H $dA_{k,e}^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0,T[,\ \mathcal{L}(H))$.

Интегрируя один раз по частям, получаем для $\forall u \in D(\tilde{L}_m)$ равенств

$$(A_k(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u, A_{k,e}^{-1}(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)\,u)\Big|_{t=t} = 2\,\mathrm{Re}\int_0^t (A_k(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)\,u, A_{k,e}^{-1}(t)\frac{d}{dt}\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)\,u)dt +$$
$$+ \int_0^t \Big(\frac{d(A_k(t)A_{k,e}^{-1}(t))}{dt}\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u, \mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)\,u)dt + \ (A_k(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u, A_{k,e}^{-1}(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u\,)\Big|_{t=0}.$$

Здесь во втором интеграле воспользуемся формулами из работы [2]

$$d\left(A_k(t)A_{k,e}^{-1}(t)\right)/dt = -A_k(t)A_{k,e}^{-1}(t)\left(dA_k^{-1}(t)/dt\right)A_k(t)A_{k,e}^{-1}(t),$$

неравенствами (3) и придем к неравенствам

$$(A_k(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u, A_{k,e}^{-1}(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)\;u)\Big|_{t=t} \le 2\,\mathrm{Re}\int_0^t (A_k(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)\;u, A_{k,e}^{-1}(t)\frac{d}{dt}\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)\;u)dt +$$

$$c_k^{(1)}\int_0^t (A_{k,e}^{-1}(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u, A_{k,e}^{-1}(t)A_k(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u)dt + (A_k(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u\,, A_{k,e}^{-1}(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u\,)\big|_{t=0}.$$

В этих неравенствах устремим e к нулю и, согласно свойству 1), будем иметь

$$(A_k(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u, \mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)\;u)\Big|_{t=t} \le 2\,\mathrm{Re}\int_0^t (A_k(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)\;u, \frac{d}{dt}\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)\;u)dt +$$

$$+\; c_k^{(1)}\int_0^t (\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u, A_k(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u)dt \;+\; (A_k(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u\,,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u\,)\big|_{t=0}. \qquad (8)$$

Интегрируя один раз по частям , имеем для $\forall u \in D(\tilde{L}_m)$ равенства

$$\left|\frac{d}{dt}\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u\right|^2\big|_{t=t} = 2\,\mathrm{Re}\int_0^t \Big(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u, \frac{d}{dt}\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u\Big)dt + \left|\frac{d}{dt}\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u\right|^2\big|_{t=0}.$$

Сложив эти равенства с неравенствами (8), получаем неравенства

$$\Big[\,\Big|\frac{d}{dt}\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u\Big|^2 + \left|A_k^{1/2}(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u\right|^2\Big]\Big|_{t=t} \le 2\,\mathrm{Re}\int_0^t \Big(\,\mathrm{L}_m(t)u, \frac{d}{dt}\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u\Big)dt \;+$$

$$+\int_0^t \Phi_k(u,u)dt + \Big[\left|\frac{d}{dt}\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u\right|^2 + \left|A_k^{1/2}(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u\right|^2\Big]\Big|_{t=0},\; \forall u \in D(\tilde{L}_m), \qquad (9)$$

где $\quad \Phi_k(u,u) = c_k^{(1)}(\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u, A_k(t)\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u) - 2\,\mathrm{Re}(\,\mathrm{P}_{k,m}(t)u, \dfrac{d}{dt}\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u)$.

Из условий 1, 4 и 5 вытекают неравенства (см. [1])

$$\left|A_s(t)u - A_k(t)u\right|_{a(t)} \ge \tilde{c}_{s,k}\left|u\right|_{(a+2)(t)} \forall u \in W^{a+2}(t), t \in [0,T], a \le 2m-2, 1 \le s < k \le m,$$

где $\tilde{c}_{s,k} > 0$, и по аналогу леммы 1 из [1] для $\forall u \in D(L_m), \forall t \in [0,T]$ – неравенства

$$\sum_{k=1}^m \Big(\left|\frac{d}{dt}\,\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u\;\right|^2 + |\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t)u|_{1(t)}^2\Big) \ge \quad c_1\sum_{i=0}^{2m-1}\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2_{(2m-1-i)(t)} - c_2\sum_{i=0}^{2m-3}\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2_{(2m-2-i)(t)}, \quad (10)$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 \ge 0$. Можно доказать интерполяционные неравенства

$$\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2_{(2m-2-i)(t)}\Big|_{t=t} \le c_3\int_0^t \left|\frac{d^{i+1}u}{dt^{i+1}}\right|^2_{(2m-1-(i+1))(t)} dt + c_3(1+2\,\mathrm{M}_{(2m-2-i)/2m})\times$$

$$\times\int_0^t \left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2_{(2m-1-i)(t)} dt + \left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2_{(2m-2-i)(t)}\Big|_{t=0}\;\; \forall u \in D(L_m),\; 0 \le i \le 2m-2, \qquad (11)$$

где $c_3 = \sup\limits_{0<t<T}\left\|A_1^{-1}(t)\right\|^{1/2}$ и $\mathrm{M}_g = \dfrac{1}{3}\sup\limits_{0<t<T}\left\|A_1^{m-1/2}(t)(dA_1^{-m}(t)/dt)\right\|\displaystyle\int_0^\infty \frac{s^g}{(1+s)^2}ds$.

Просуммируем (9) по k, $1 \le k \le m$, применим оценки (7), (10) и (11) и найдем

$$\sum_{i=0}^{2m-1}\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2_{(2m-1-i)(t)}\Big|_{t=t} \;\le\; c_4\int_0^t \sum_{i=0}^{2m-1}\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2_{(2m-1-i)(t)} dt \;+$$

$$c_5\int_0^t \left|\,\mathrm{L}_m(t)u\right|^2 dt \;+\; c_6\sum_{j=0}^{2m-1}\left|\mathbf{l}_j u\right|^2_{(2m-1-j)(0)} \quad \forall u \in D(L_m),$$

где постоянные c_4, c_5, $c_6 > 0$. Наконец, здесь воспользуемся леммой Гронуолла [1], возьмем верхнюю грань по t и получим неравенства (6) для $\forall u \in D(L_m)$. Затем неравенства (6) распространяются предельным переходом на $\forall u \in D(\overline{L_m})$.

Разрешимость. Из теоремы 1 вытекают однозначность и устойчивость сильных решений ЗК (1),(2). Их разрешимость дает

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы 1 и условие 3 , то для* $\forall f \in \mathscr{H}^0$ *и* $\forall j_j \in W^{2m-1-j}(0), 0 \le j \le 2m-1$, *существует сильное решение* $u \in E^m$ *ЗК (1), (2).*

Д о к а з а т е л ь с т в о осуществим индукцией по m. При $m=1$ уравнение $\overline{L_1}u = \Im$, в силу неравенств (3) и (4), разрешимо при $\forall \Im \in F^1$ [2]. Сделаем индуктивное предположение о разрешимости уравнений $\overline{L_{m-1}}u = \Im$ при $\forall \Im \in F^{m-1}$, $m = 2,...$, и любом составе и порядке различных множителей $\mathrm{M}_k(t)$ в $\mathrm{L}_{m-1}(t)$ и докажем разрешимость уравнений $\overline{L_m}u = \Im$ в E^m при $\forall \Im \in F^m$, $m = 2,...$.
Возьмем линейные операторы $L_k^{(1,m)} \equiv \{\mathrm{L}_k^{(1,m)}(t), \mathbf{l}_0, ..., \mathbf{l}_{2m-3}\} : E^{m-1} \supset D(L_{m-1})$ $\to F^{m-1}$ в других пространствах $L_k^{(1,m)} : E^m \supset D(L_m) \to E^{1,m} = E^1 \times W^{2m-2}(0) \times \mathbf{L} \times$ $\times W^1(0)$ – банаховы пространства с нормами $\|u\|_{1,m} = (\|u\|_1^2 + \sum_{j=0}^{2m-3} |\mathbf{l}_j u|^2_{(2m-2-j)(0)})^{1/2}$.

Их замыканиями являются сужения замыканий $\overline{L_k^{(1,m)}}$ на E^m. Рассмотрим линейные операторы $M_k \equiv \{\mathrm{M}_k(t), A_1^{-1/2}(0), ..., A_1^{-1/2}(0), \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1\} : E^{1,m} \supset D(L_1) \times W^{2m-2}(0) \times$ $\mathbf{L} \times W^1(0) \quad \to F^m$, замыкания которых $\overline{M_k}$ согласно [2] имеют ограниченные обратные $\overline{M_k}^{-1} : F^m \to E^{1,m}$. В силу (7) решения уравнений $\overline{L_m}u = \Im$ при $\Im \in F^m$ одновременно являются решениями уравнений $\overline{M_k L_k^{(1,m)}}u = \Im_k$ при каких-то $\Im_k \in F^m$, $1 \le k \le m$. Применяя лемму 5 из [3] к операторам $S_1 = L_k^{(1,m)}$ и $T_1 = M_k$ в пространствах $E_1 = E^m, F_1 = E^{1,m}$ и $G_1 = F^m$, получаем вложения $\overline{M_k L_k^{(1,m)}} \subset$ $\overline{M_k}\,\overline{L_k^{(1,m)}}$. Отсюда заключаем, что уравнения $\overline{M_k L_k^{(1,m)}}u = \Im_k$ для $\forall u \in D(\overline{L_m})$ можно записать в виде $\overline{M_k}\,\overline{L_k^{(1,m)}} = \Im_k$. Благодаря [2], вторые уравнения для $\forall \Im_k \in F^m$ имеют решения $\overline{L_k^{(1,m)}}u = \overline{M_k}^{-1}\Im_k \in E^{1,m}$, а по индуктивному предположению последние уравнения имеют решения $u = \overline{L_k^{(1,m)}}^{-1}\,\overline{M_k}^{-1}\Im_k \in E^{m-1}$, где $\overline{L_k^{(1,m)}}^{-1}$ – обратные операторов $\overline{L_k^{(1,m)}}$. Докажем, что $u \in E^m$.

В силу (7), решения $u \in E^{m-1}$ уравнений $\overline{L_k^{(1,m)}}u = \Phi_k \in F^{m-1}$ являются решениями уравнений $\overline{L_{m-2}^{(k)} M_k}u = \Phi\!\!\!/_k$ при каких-то $L_{m-2}^{(k)}$ и $\Phi\!\!\!/_k \in F^{m-1}, 1 \le k \le m$.
Пусть гильбертово пространство $\mathscr{H}^{2,2}$ — множество $D(L_1)$ с эрмитовой нормой $\|u\|_{2,2} = \left(\|d^2u/dt^2\|_0^2 + \|du/dt\|_0^2 + \|u\|_2^2\right)^{1/2}$. Если $v \in E^{m-1}$ – решение уравнений $\overline{L_{m-2}^{(k)} M_k}v = \Phi\!\!\!/_k$ при $\Phi\!\!\!/_k \in F^{2,m} = \mathscr{H}^{2,2} \times W^{2m-1}(0) \times \mathbf{L} \times W^2(0)$, то $M_k \overline{L_{m-2}^{(k)} M_k}v = M_k \Phi\!\!\!/_k \in$ F^m, где операторы $M_k \equiv \{\mathrm{M}_k(t), I, ..., I, \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1\} : F^{2,m} \to F^m$ ограничены. Применяя аналог леммы 6 из [3], к операторам $T_1 = L_{m-2}^{(k)} M_k$ и $S_1 = M_k$ в пространствах $E_1 = E^m$, $F_1 = F^{2,m}$ и $G_1 = F^m$, получаем вложения

$$M_k \overline{L_{m-2}^{(k)} M_k} \subset \overline{M_k \left(L_{m-2}^{(k)} M_k\right)} \ . \tag{12}$$

Применение леммы 5 из [3] к операторам $S_1 = M_k \equiv \{ \mathrm{M}_k(t), \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1 \} : E^m \supset D(L_m) \to E^{m-1} \times W^{2m-2}(0) \times W^{2m-3}(0)$ и $T_1 = M_k L_{m-2}^{(k)} \equiv \{ \mathrm{L}_{m-1}^{(k)}(t), A_1^{-1/2}(0), A_1^{-1/2}(0), \mathbf{l}_0, ..., \mathbf{l}_{2m-3} \} : E^{m-1} \times W^{2m-2}(0) \times W^{2m-3}(0) \supset D(L_{m-1}) \times W^{2m-2}(0) \times W^{2m-3}(0) \to F^m$ приводит к вложениям

$$\overline{\left(M_k L_{m-2}^{(k)}\right) M_k} \subset \overline{M_k L_{m-2}^{(k)}}\, \overline{M_k} \ . \tag{13}$$

Из (12) и (13) имеем уравнения $\overline{M_k L_{m-2}^{(k)}}\, \overline{M_k} v = M_k \Phi_k$, которые по предположению индукции имеют решения $\overline{\mathrm{M}}_k(t) v \in E^{m-1}, 1 \le k \le m.$ Для $\forall v \in D(L_m)$ выводятся неравенства

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{2m-3} \left| d^i \ \mathrm{M}_k(t) v / dt^i \right|^2_{(2m-3-i)(t)} \ \ge c_7 \sum_{i=0}^{2m-1} \left| \frac{d^i v}{dt^i} \right|^2_{(2m-1-i)(t)} - c_8 \sum_{i=0}^{2m-3} \left| \frac{d^i v}{dt^i} \right|^2_{(2m-2-i)(t)}, c_7 > 0,$$

из которых предельным переходом убеждаемся в том, что $v \in E^m$, так как уже $v \in E^{m-1}$. Используя этот факт, неравенства (7), (10) и (11) и лемму Гронуолла, можно вывести неравенства

$$c_9 \left\| u \right\|_m^2 \le \sum_{k=1}^{m} \left\| \overline{L_k^{(1,m)}} u \right\|^2_{1,m} \quad \forall u \in E^m, \ c_9 > 0,$$

которые означают, что решение $u \in E^m$. Попутно индукцией по m находим, что

$$u = \overline{L_m}^{-1} \Im = \overline{M_1}^{-1} \mathbf{L}\, \overline{M_m}^{-1} \Im \in E^m \quad \forall \Im \in F^m, \ \ m = 1, \ 2, ... \tag{14}$$

Замечание. Тем же способом утверждение теоремы 1 (возможно, с большими $c_0(m)$) и методом продолжения по параметру утверждение теоремы 2 распространяются на уравнения с младшими частями

$$\mathrm{L}_m(t) u + \sum_{k=0}^{2m-1} B_k(t) \frac{d^k u}{dt^k} \ = f, \ t \in \left]0, T\right[, \ m = 1, \ 2, ...,$$

если $B_k(t) \in L_\infty(\left]0, T\right[, \mathcal{L}\left(W^{2m-1-k}(t), H\right)), \ \ 0 \le k \le 2m-1.$

1. Р а д ы н о Я. В., Ю р ч у к Н. И.//Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 2. С. 331.
2. Л о м о в ц е в Ф. Е.//Докл. НАНБ . 2001. Т. 45, № 1. С. 34.
3. Л о м о в ц е в Ф. Е. //Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 5. С. 873.

Поступила в редакцию 05.02.01