ИЗУЧЕНИЕ ТЕМЫ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» СО СТУДЕНТАМИ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Кепчик Н.В., Матейко О.М.

Белорусский государственный университет, г. Минск

Одним из основных разделов курса «Высшая математика» на географическом факультете БГУ является раздел «Дифференциальные уравнения». К сожалению, из-за нехватки времени знакомство с дифференциальными уравнениями достаточно краткое, как впрочем и с другими разделами. И если не уделить должного внимания приложениям дифференциальным уравнениям в географии, то у студентов возникает вопрос: «Зачем этот курс математики нужен географам»?

Таким образом, кроме изучения основных понятий и методов теории дифференциальных уравнений, необходимо рассмотреть хотя бы ряд несложных задач, которые показывают возможности ДУ в географии.

Хорошо известно, что решение любой такой задачи с помощью ДУ можно разбить на следующие шесть этапов:

1. перевести условие задачи на язык математики и составить дифференциальное уравнение из условия задачи;
2. определить тип полученного уравнения и выбрать соответствующий метод решения;
3. проинтегрировать дифференциальное уравнение и получить его общее решение;
4. найти частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям;
5. вычислить (по мере необходимости) значения вспомогательных параметров, используя дополнительные условия задачи;
6. найти общий закон рассматриваемого процесса и, если это требуется, численные значения искомых величин.

Первый этап в решении таких задач является самым трудным, т.к. общих методов составления дифференциальных уравнений нет и для того, чтобы научиться составлять уравнения следует изучить ряд конкретных примеров и использовать соответствующие законы географии, физики, биологии, химии (чему и следует уделить особое внимание).

Одними из таких учебных примеров, которые авторы постоянно рассматривают на занятиях, являются задачи определения скорости ветра при различных условиях.

Задача 1. Известно, что распределение скорости ветра в приземном слое атмосферы обратно пропорционально высоте. Найти выражение скорости ветра через высоту подъема.

Решение. Пусть k – параметр шероховатости (он зависит от подступающих поверхностей), h – высота над поверхностью, V – скорости ветра в приземном слое атмосферы на высоте h, h_0 – высота над поверхностью, где скорость ветра равна нулю. Тогда по условию имеем, что

$\frac{dV}{dh}=\frac{k}{h}$. Решим полученное уравнение: $dV=k\frac{dh}{h}\Rightarrow \int dV=k\int\frac{dh}{h}\Rightarrow V=k\ln h+c.$ Т.к. $V=0$ при $h=h_0$, то $0=k\ln h_0+c$.

Следовательно, $c=-k\ln h_0$ и $V=k\ln h-k\ln h_0\Rightarrow V=k\ln\frac{h}{h_0}$.

Ответ: закон изменения скорости ветра в приземном слое атмосферы на высоте h имеет вид $V=k\ln\frac{h}{h_0}$.

Задача 2. Проходя через лес и испытывая сопротивление деревьев, ветер теряет часть своей скорости. На малом пути эта потеря пропорциональна скорости в начале этого пути и его длине. Определите скорость ветра, прошедшего по лесу 100 м, если начальная его скорость в лесу была 10 м/с, а по прохождении в лесу пути 1м уменьшилась до 9,5 м/с.

Решение: Пусть V – скорость ветра, x – путь, k– коэффициент пропорциональности, тогда из условия задачи получаем: $\frac{dV}{dx}=-kV$. Знак «минус» в полученном уравнении означает, что скорость ветра при прохождении через лес уменьшается. Решим полученное уравнение: $\frac{dV}{V}=-kdx\Rightarrow\int\frac{dV}{V}=-k\int dx\Rightarrow \ln V=-kx+c\Rightarrow$

$V=e^{-kx+c}\Rightarrow V=e^{-kx}e^{c}\Rightarrow V=e^{-kx}C_1$. Т.к. по условию V = 10 при x = 0, то

$10=e^{-k\cdot 0}C_1\Rightarrow C_1=10\Rightarrow V=10e^{-kx}$.

Далее по условию нам дано, что по прохождении в лесу пути 1м скорость уменьшилась до 9,5 м/с, т. е.

$9{,}5=10e^{-k\cdot 1}\Rightarrow e^{-k}=0{,}95\Rightarrow$ при x = 100 имеем, что

$$V=10e^{-k\cdot 100}\Rightarrow V=10(0{,}95)^{100}\approx 0{,}06\text{ м/с}.$$

Ответ: скорость ветра, прошедшего по лесу 100 м, будет равна 0,06 м/с.

Задача 3. Ветер, проходя в лесу путь, равный единице длины, теряет n-ю часть своей скорости (n – параметр, постоянный для данного вида леса, например, для смешенного леса $n = 59$, а для очень редкого высокого леса $n = 125$). Найти уравнение движения ветра в лесу.

Решение: Пусть V – скорость ветра, x – путь, t – время, тогда из условия задачи получаем: $\frac{dV}{dx} = -\frac{V}{n}$.

Решим полученное уравнение:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dx}{n} \Rightarrow \int\frac{dV}{V} = -\int\frac{dx}{n} \Rightarrow \ln V = -\frac{x}{n} + c \Rightarrow V = C_1 e^{-\frac{x}{n}}.$$

Если $V = V_0$ при $x = 0$, то $C_1 = V_0 \Rightarrow V = V_0 e^{-\frac{x}{n}}$.

А из того, что $V = \frac{dx}{dt}$, имеем: $\frac{dx}{dt} = V_0 e^{-\frac{x}{n}}$. Решая это уравнение и учитывая начальные условия, получим: $ne^{\frac{x}{n}} = V_0 t + n \Rightarrow x = n\ln\left(\frac{V_0 t}{n} + 1\right)$.

Ответ: уравнение движения ветра в лесу имеет вид

$x = n\ln\left(\frac{V_0 t}{n} + 1\right)$.

Также на занятиях по данной теме рассматриваются различные математические модели роста населения Земли [2], а все необходимые для понимания этой задачи математические учебные темы рассмотрены в учебном пособии [3]. Простейшую модель (модель Мальтуса) можно построить, предположив, что скорость прироста пропорциональна количеству, т. е. $\frac{dP}{dt} = kP$, где $P = P(t)$ – количество населения в данный момент времени t.

В течение длительного промежутка времени (около 6 тыс. лет) рост населения Земли следовал гиперболическому закону и описывался дифференциальным уравнением $\frac{dP}{dt} = kP^2$. Решая это уравнение, получаем $P(t) = -\frac{1}{C + kt} = \frac{C_1}{t_0 - t}$. Демографические данные за многие годы свидетельствуют, что количество населения увеличивалось по этой формуле вплоть до 60-х гг. XX в.

Рассматривается также логистическое уравнение (уравнение Ферхюльста, оно используется также в экологии для описания роста численности популяции), которое имеет следующий вид $\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$, где параметр r характеризует скорость роста (размножения), а K – емкость среды (т. е. максимально возможную численность популяции). Решением уравнения является логистическая функция или S-образная кривая (логистическая кривая)

$$P(t) = \frac{KP_0 e^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)},$$

где P_0 – начальная численность популяции, $K = \lim_{t\to\infty} P(t)$. С 70-х гг. XX в. на смену гиперболическому росту населения Земли пришел рост логистический.

В заключение хочется немного сказать о нашей уникальной кафедре – кафедре общей математики и информатики, которая в этом учебном году справляет свой 50-летний юбилей [4]. Одной из специфик нашей кафедры, отличающей ее от других кафедр высшей математики, является профессиональная направленность излагаемого материала, способствующая дополнительной мотивации изучения курса математики, например, студентами биологического факультета [5] или студентами географического факультета [6, 7], на которых работают авторы сообщения. Такой методологический подход используется не только на естественно научных факультетах, но и на социально-гуманитарных факультетах Белорусского государственного университета, на которых ведут занятия преподаватели нашей кафедры.

Литература

1. Кепчик, Н.В. Теория дифференциальных уравнений как основная компонента математической подготовки студентов-биологов / Н.В. Кепчик // Четвертые научные чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвященные 85-летию со дня рождения Ю.С. Богданова: тезисы докладов Междунар. науч. конф., Минск, 7–10 декабря 2005 г. / БГУ. – Минск: БГУ, 2005. – С. 150–151.

2. Матейко, О.М. Высшая математика для географов: учебное пособие. В 2-х ч. Ч. 2 / О.М. Матейко, А.Н. Таныгина. – Минск: БГУ, 2013. –175 с.

3. Матейко, О.М. Высшая математика для географов: учебное пособие. В 2-х ч. Ч. 1 / О.М. Матейко, А.Н. Таныгина. – Минск: БГУ, 2012. – 271 с.

4. Еровенко, В.А. Кафедра общей математики и информатики: история становления и современность / В.А. Еровенко, О.М. Матейко, О.А. Велько // Вестник Белорусского государственного университета. Серия 1. – 2014. – № 3. – С. 101–103.

5. Кепчик, Н.В. Математические методы в биологии в контексте университетского образования / Н.В. Кепчик // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2006. – № 4. – С. 224–230.

6. Матейко, О.М. Особенности обучения высшей математики студентов геолого-географических специальностей / О.М. Матейко, В.Г. Скатецкий // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2006. – № 4. – С. 216–223.

7. Матейко, О.М. Профессионально ориентированный курс «Высшая математика» для студентов географических специальностей / О.М. Матейко, А.Н. Таныгина // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. Сер. В. – 2011. – № 2. – С. 28–36.