О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ МАКСИМАЛЬНЫХ θ-ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Л.М. Белоконь

Могилев, Беларусь
bellu2006@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения, принятые в монографиях [1] и [2]. Обозначаем через π некоторое множество простых чисел; $\pi' = \mathrm{P}\backslash\pi$, P – множество всех простых чисел. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, θ – подгрупповой m-функтор [2]. Если для любой группы G множество $\theta(G)$ включает все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы группы G, то θ будем называть $\mathfrak{F}$-абнормально полным m-функтором; в случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ m-функтор θ называется абнормально полным [3]. Через θ_π будем обозначать подгрупповой m-функтор, сопоставляющий каждой группе G саму группу G и множество всех тех её максимальных θ-подгрупп, индекс каждой из которых не делится на числа из π. Через $\Phi_\theta(G)$ обозначают пересечение всех θ-подгрупп группы G. Если для любой группы G множество $\theta(\mathrm{G})\backslash\{\mathrm{G}\}$ совпадает с множеством всех максимальных (всех максимальных $\mathfrak{F}$-абнормальных) подгрупп в G, то $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Phi_\pi(G)$, ($\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, соответственно; $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi(G)$, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$). Через $\Phi_{\theta,\overline{N}}(G)$ ($\Phi_{\theta_\pi,\overline{N}}(G)$) обозначаем пересечение всех максимальных θ-подгрупп (θ_π-подгрупп, соответственно) группы G, не содержащих нормальной в G подгруппы N. Пересечение всех максимальных (всех максимальных $\mathfrak{F}$-абнормальных) подгрупп группы G, каждая из которых имеет взаимно простой с числами из π индекс и не содержит N, обозначаем через $\Phi_{\pi,\overline{N}}(G)$ ($\Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{N}}(G)$ соответственно). Если в группе G не существует максимальных подгрупп, отвечающих указанным требованиям, соответствующие пересечения считаем совпадающими с G. Подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_N(G)$ группы G, N – нормальная в G подгруппа, определяется следующим образом: $\tilde{\mathrm{F}}_N(G) \supseteq N$, $Soc(G/N) = \tilde{\mathrm{F}}_N(G)\Big/N$ [4]; используем обозначения $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\theta}(G)$, $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)$, $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)$, $\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$ в соответствующих случаях для $N \in \Big\{\ \Phi_\theta(G),\ \ \Phi_{\theta_\pi}(G),\ \ \Phi_\pi(G),\ \ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)\ \Big\}$.

Теорема 1. *Имеют место следующие утверждения.*

(1) *Для всякой группы G и подгруппового m-функтора θ справедливо равенство* $\Phi_{\theta_\pi,\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}(G)$.

(2) *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ – локальная S_n-замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных π'-групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть группа $G \notin \mathfrak{F}$, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π. Если m-функтор θ является $\mathfrak{F}$-абнормально полным, то* $\Phi_{\theta_\pi,\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)}}(G) \neq G$.

Следствие 1.1 [4]. *Имеют место следующие утверждения.*

(1) *Для всякой группы G и непустой формации $\mathfrak{F}$ выполняется равенство* $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)}}(G)$.

(2) *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ – локальная S_n-замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных π'-групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. Если группа $G \notin \mathfrak{F}$, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π, то* $\Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)}}(G) \neq G$.

Так как $\Phi_\pi(G) \neq G$, если G – $\pi'\mathrm{d}$-группа и подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π, то из утверждения (1) теоремы 1 получаем

Следствие 1.2 [4]. *Пусть G – $\pi'\mathrm{d}$-группа, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π. Тогда в G существует хотя бы одна максимальная, π'-индекса подгруппа, не содержащая $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)$; пересечение всех таких подгрупп совпадает с $\Phi_\pi(G)$.*

Теорема 2. *Пусть* θ – $\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'}$*-абнормально полный* m*-функтор. И пусть подгруппа* $\Phi_{\pi}(G)$ *группы* G *обладает свойством* C_{π}*. Тогда:*

(1) $\Phi_{\theta_{\pi},\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\pi}}(G)}}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}}(G)$;

(2) *если* $G \neq \mathrm{F}_{\pi'}(G)$, *то* $\Phi_{\theta_{\pi},\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\pi}}(G)}}(G) \neq G$.

Следующий результат, вытекающий из теоремы 2 при $\pi = \varnothing$, доказан в [5] для случая θ – эпиморфный абнормально полный m-функтор.

Следствие 2.1. *Пусть* θ *– абнормально полный* m*-функтор,* G *группа. Тогда:*

(1) $\Phi_{\theta,\overline{\tilde{\mathrm{F}}(\mathrm{G})}}(G) = \Phi_{\theta}(G)$;

(2) *если* $G \neq \mathrm{F}(G)$, *то* $\Phi_{\theta,\overline{\tilde{\mathrm{F}}(\mathrm{G})}}(G) \neq G$.

Из утверждения (1) следствия 2.1, как и из следствия 1.2, вытекает утверждение [5] о совпадении подгруппы Фраттини неединичной группы G с пересечением всех её максимальных подгрупп, не содержащих $\tilde{\mathrm{F}}(G)$.

Теорема 3. *Пусть подгруппа* $\Phi_{\pi}(G)$ *группы* G *обладает свойством* C_{π}*. Тогда:*

(1) $\Delta_{\pi,\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\pi}}(G)}}(G) = \Delta_{\pi}(G)$;

(2) *если* $G \neq \mathrm{F}_{\pi'}(G)$, *то в* G *существуют максимальные абнормальные подгруппы, имеющие взаимно простые с числами из* π *индексы и не содержащие* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\pi}}(G)$.

Теорема 3, выводимая из теоремы 2, а также теорема 2 и следствие 2.1 включают результат работы [5] о том, что в каждой ненильпотентной группе G существует ненормальная максимальная подгруппа M такая, что $M\tilde{F}(G) = G$; пересечение всех таких максимальных ненормальных подгрупп M совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$.

Литература

1. Шеметков Л.А. *Формации конечных групп.* М: Наука, 1978.

2. Каморников С.Ф., Селькин М.В. *Подгрупповые функторы и классы конечных групп.* Мн.: Бел. навука, 2003.

3. Бородич Е.Н., Бородич Р.В. *О пересечениях* $\mathfrak{F}$*-абнормальных максимальных* θ*-подгрупп* // Весці Нацыянальнай Акадэміі Навук Беларусі. 2007. №3. С. 47 – 52.

4. Белоконь Л.М. *О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп* // Проблемы физики, математики и техники. 2014. №4(21). С. 46 – 59.

5. Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Сыроквашин А.В. *Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп* // Проблемы физики, математики и техники. 2012. №2(11). С. 62 – 64.